

**Zadania do samodzielnej pracy - Całka Newtona i Riemanna; całki niewłaściwe**

1. Oblicz następujące całki:

a)  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx,$

c)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x) dx,$

b)  $\int_0^{\infty} e^{-2x} \sin^2(x) dx,$

d)  $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$

2. Oblicz z definicji całkę Riemanna:

a)  $\int_{-2}^3 x^2 dx,$

b)  $\int_0^{10} 2^x dx.$

3. Korzystając z definicji całki Riemanna oblicz granicę ciągu

a)  $a_n = \frac{\sqrt[n]{e^1} + \sqrt[n]{e^2} + \sqrt[n]{e^3} + \dots + \sqrt[n]{e^n}}{n},$

b)  $a_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n}}{n}.$

4. Wyznacz (na dwa sposoby) funkcję pierwotną funkcji  $f(x) = |\cos x|$  na przedziale  $[0; \pi]$ .

5. Wyznacz funkcję  $\Phi(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ , jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} & , x \in [-1; 0] \\ \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 2 \cos x + 5} & , x > 0 \end{cases}$$

Czy funkcja  $\Phi(x)$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f(x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ?

6. Wyznacz funkcję  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ , jeśli:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} \cos^2(x) & , x \leq 0 \\ \frac{\cos^3 x}{(1 + \sin^2 x)^2} & , x > 0 \end{cases}$$

Czy funkcja  $\Phi(x)$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f(x)$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ?

7. Zbadaj zbieżność całek:

a)  $\int_{-1}^1 \frac{x}{1 - x^4} dx,$

c)  $\int_1^e \frac{dx}{x^2 \sqrt{\ln x}}.$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{(x^5 + x^3 + 1)^3} dx,$