# Zadania do samodzielnej pracy - Granice i ciągłość funkcji

1. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x+1}$,

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{27-x^3}{x-3}$,

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{2x-6}$,

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^5+32}$,

e) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^3+125}{2x^2-50}$,

f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+5x-2}{4x^2+9x+2}$,

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5-1}{x-1}$,

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-x+5}{-x^3+6x^2-x+7}$.

2. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$,

d) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}-8}{\sqrt[4]{x}-2}$,

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1}+x)$.

3. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{4x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{3\sin 2x}$,

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$,

d) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{8-x}{\sin \frac{1}{8}\pi x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg} 2x}{\mathrm{tg} x}$,

g) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$,

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$,

i) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

4. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-4}{3x^3+x^2-x-1}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-125}{x^2-25}$,

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$,

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+\sin x}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^x}{x}$,

Aleksandra Gorzkowska

j) $\lim\limits_{x\to -1} e^{\frac{1}{x+1}}$,

k) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}$,

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg} x}{x}$.

5. Oblicz (jeżeli istnieją) granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x-\cos x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$,

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{ctg} x$,

e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

6. Znaleźć granicę lewostronną i prawostronną funkcji $f$ w punkcie $x_0$, gdzie:

a) $f(x)=e^{\frac{1}{1-x^3}}$, $x_0=1$,

b) $f(x)=\dfrac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_0=1$,

c) $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0=0$,

d) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+3}{3^{\frac{1}{x}}+2}$, $x_0=0$,

e) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{|\sin x|}}$, $x_0=0$.

7. Obliczyć granice jednostronne funkcji $f$ w punkcie $x_0$, a następnie rozstrzygnąć, czy funkcja ma w tym punkcie granicę:

a) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $x_0=0$,

b) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}+x$, $x_0=1$,

c) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$, $x_0=2$,

d) $f(x)=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=1$,

e) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, $x_0=0$,

f) $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{|x-\frac{\pi}{2}|}$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

8. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x+5}, & x\neq -5 \\ -10, & x=-5 \end{cases}$,

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$,

c) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

d) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x^2, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$,

e) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\leqslant 1 \\ |x-1|, & |x|>1 \end{cases}$,

f) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

9. Jaka powinna być wartość funkcji $f$ w punkcie $x = 0$, aby tak zdefiniowana funkcja była ciągła w $\mathbb{R}$, jeżeli dla $x \neq 0$ funkcja $f$ dana jest wzorem:

   a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,

   b) $f(x) = x \sin \dfrac{\pi}{x}$,

   c) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

10. Znaleźć asymptoty (o ile istnieją) następujących funkcji:

    a) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3}$,

    b) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$,

    c) $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$,

    d) $f(x) = x + 2\sqrt{-x}$,

    e) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$,

    f) $f(x) = x - 2\mathrm{arctg} x$.

11. Dobrać $a \in \mathbb{R}$ tak, żeby funkcja $f(x)$ była ciągła na $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases},$$

12. Dobrać $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, żeby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x < 0 \\ \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}, & 0 \leqslant x < 1, \\ c, & x = 1, \\ \dfrac{x^2+(b-1)x-b}{x-1}, & x > 1, \end{cases},$$

    była ciągła na $\mathbb{R}$.