Lemat Burnside'a. Twierdzenie Pólyi.

Lemat Burnside'a stosujemy, gdy chcemy policzyć różne (względem pewnej grupy permutacji) kolorowania elementów (wierzchołków, krawędzi, ścian) pewnego obiektu. Obiekt ten często da się przedstawić w formie grafu. W tym przypadku nie interesuje nas ile jest elementów w danym kolorze. Ważne jest jedynie ile kolorów mamy dostępnych. Liczymy również kolorowania, które nie wykorzystują wszystkich dostępnych kolorów.

Zadanie 1. Na ile różnych sposobów można pokolorować witraż z rysunku za pomocą trzech kolorów? Witraż można dowolnie obracać w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozwiązanie: Zaczynamy od zidentyfikowania co będziemy kolorować i ponumerowania tych elementów.

Następnie wypisujemy elementy grupy permutacji działającej na witraż (permutującej ponumerowane elementy). Rozważamy przekształcenia witraża na siebie. Ponieważ możemy obracać go w trójwymiarze, to rozważamy obroty i symetrie (gdybyśmy mogli obracać obiekt tylko w przestrzeni dwuwymiarowej, rozważalibyśmy wyłącznie obroty).

Permutacje: $id, o_1 = (1234), o_2 = (13)(24), o_3 = (1432), s_1 = (24), s_2 = (13), s_3 = (12)(34), s_4 = (14)(23)$.

Dla każdej z permutacji znajdujemy liczbę kolorowań, które przechodzą same w siebie po jej działaniu. Tę liczbę oznaczamy $C(\sigma)$, gdzie σ jest wybraną permutacją z wyżej wypisanych. Wygodnie umieścić to w tabeli.

σ	$C(\sigma)$
id	3^4
o_1	3
o_2	3^2
o_3	3
s_1	3^3
s_2	3^3
s_3	3^2
s_4	3^2

Zauważmy, że aby kolorowanie przeszło samo na siebie po działaniu permutacji σ, to wszystkie elementy w cyklu muszą być pokolorowane na ten sam kolor. Dla każdego cyklu permutacji wybieramy niezależnie kolor na 3 sposoby. (Uwaga! Punkty stałe permutacji to też cykle - jednoelementowe).

Stosujemy lemat Burnside'a:

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} C(f)$$

Oznaczenia jak na wykładzie:
G - grupa permutacji
C - zbiór wszystkich kolorowań
$N(G, C)$ - liczba różnych kolorowań

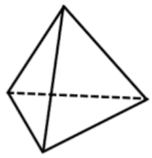
Podstawiamy do wzoru:

$$N(G,C) = \frac{1}{8}(3^4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3) = \frac{1}{8}(81+6+27+54) = \frac{168}{8} = 21.$$

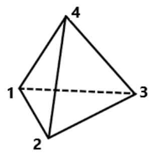
□

Twierdzenie Pólyi stosujemy, gdy chcemy policzyć różne (względem grupy permutacji) kolorowania danego obiektu, które spełniają dodatkowe warunki na liczbę elementów w danym kolorze. Przykładowo: jeśli chcemy policzyć kolorowania używające wszystkich dostępnych kolorów.

Zadanie 2. Na ile różnych sposobów można pokolorować wierzchołki czworościanu foremnego za pomocą trzech kolorów, w taki sposób, aby kolor zielony został użyty dwa razy, a pozostałe pokory po raz? Czworościan można obracać w przestrzeni trójwymiarowej.



Rozwiązanie: Postępujemy analogicznie jak w przypadku lematu Burnside'a. Liczymy kolorowania wierzchołków, więc wierzchołki numerujemy i wypisujemy wszystkie ich permutacje odpowiadające obrotom czworościanu w trójwymiarze (patrz tabelka poniżej - oznaczenia są nieistnienie, ważne żeby wypisać wszystkie permutacje).



Permutacje:
Obroty czworościanu względem jego wybranej (jednej z 4) wysokości o 120° i 240°.
Obroty czworościanu względem prostej przechodzącej przez środki przeciwległych ścian.

Dodatkowo w tabelce umieszczamy jednomian odpowiadający danej permutacji. W każdym jednomianie występują zmienne z_i. Jest ich tyle, ile elementów, które kolorujemy. W naszym przypadku 4. Dla permutacji σ o typie $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ zmienną z_i podnosimy do potęgi λ_i (w rozkładzie na cykle jest λ_i cykli długości i).

σ	jednomian
id	z_1^4
$o_{1,120} = (234)$	$z_1^1 z_3^1$
$o_{1,240} = (243)$	$z_1^1 z_3^1$
$o_{2,120} = (341)$	$z_1^1 z_3^1$
$o_{2,240} = (314)$	$z_1^1 z_3^1$
$o_{3,120} = (142)$	$z_1^1 z_3^1$
$o_{3,240} = (124)$	$z_1^1 z_3^1$
$o_{4,120} = (123)$	$z_1^1 z_3^1$
$o_{4,240} = (132)$	$z_1^1 z_3^1$
$o_{1-2} = (12)(34)$	z_2^2
$o_{1-3} = (13)(24)$	z_2^2
$o_{1-4} = (14)(23)$	z_2^2

Rozważamy następujący wielomian, zawierający sumę jednomianów odpowiadających wszystkim permutacjom:

$$P_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{|G|}(z_1^4 + 8\cdot z_1^1 z_3^1 + 3\cdot z_2^2)$$

Aby policzyć liczbę różnych kolorować spełniających podany warunek co do liczby wystąpień poszczególnych kolorów, podstawiamy $z_i = u_1^i + u_2^i + u_3^i$ (zmienne u_j są trzy, bo mamy do dyspozycji 3 kolory). Otrzymujemy:

$$P_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{12}\Big((u_1+u_2+u_3)^4 + 8\cdot(u_1+u_2+u_3)(u_1^3+u_2^3+u_3^3) + 3\cdot(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^2\Big)$$

Liczba różnych kolorowań, w których kolor zielony występuje dwukrotnie, a pozostałe kolory po raz jest równa współczynnikowi w otrzymanym wielomianie przy jednomianie postaci $u_1^2u_2u_3$. Zauważmy, że taki jednomian może zostać wyprodukowany jedynie w wyrażeniu $(u_1 + u_2 + u_3)^4$. Przekształćmy:

$$(u_1+u_2+u_3)^4 = \Big(u_1+(u_2+u_3)\Big)^4 = u_1^4+4u_1^3(u_2+u_3)+6u_1^2(u_2+u_3)^2+4u_1(u_2+u_3)^3+(u_2+u_3)^4$$

Ponownie jednomian $u_1^2u_2u_3$ otrzymamy jedynie w $6u_1^2(u_2 + u_3)^2$ i współczynnik przy nim wynosi 12. Dzieląc to przez rząd grupy otrzymujemy wynik - jest jedno kolorowanie spełniające warunki zadania. $\square$

Zadania:

1. Ile jest dwukolorowych naszyjników o sześciu koralikach, różnych względem:
   a) obrotów naszyjnika w przestrzeni dwuwymiarowej,
   b) obrotów naszyjnika w przestrzeni trójwymiarowej wymiarowej?
2. Długie przekątne sześciokąta foremnego dzielą go na sześć trójkątów. Każdy z trójkątów kolorujemy na niebiesko, czerwono lub zielono. Ile jest różnych pokolorowań które są:
   a) rożne ze względu na obroty sześciokąta na płaszczyźnie,
   b) rożne ze względu na obroty sześciokąta w trójwymiarze?
3. Ile jest różnych dwukolorowych naszyjników o siedmiu koralikach, takich że dokładnie trzy koraliki są w kolorze białym? Naszyjniki można obracać w trójwymiarze.
4. Ile istotnie rożnych naszyjników złożonych z dwóch koralików czerwonych, czterech białych i jednego czarnego można utworzyć, jeśli wszystkie koraliki muszą być wykorzystane? Naszyjniki można obracać w przestrzeni trójwymiarowej.