

## Kolokwium I

*Grafy i sieci, Matematyka, WMS*

**Zadanie 1 (15 punktów).** Digraf nazywamy *r-regularnym*, jeśli dla każdego wierzchołka  $v$  tego digrafu  $d^+(v) = d^-(v) = r$ .

- a) Uzasadnij, że dla każdego  $n$  parzystego nie istnieje regularny turniej  $T_n$ .
- b) Udowodnij, że dla każdego  $n$  nieparzystego istnieje regularny turniej  $T_n$ .

**Zadanie 2 (10 punktów).** Niech  $X$  będzie alfabetem o  $k$  literach. Udowodnij, że istnieje ciąg cykliczny długości  $k^3$ , w którym występuje każde trzyliterowe słowo nad alfabetem  $X$  (każdy ciąg długości 3 o elementach z  $X$ ) jako podciąg trzech kolejnych pozycji.

**Zadanie 3 (15 punktów).** Udowodnij, że jeśli digraf prosty  $D$  rzędu  $n$  jest silnie spójny oraz dla każdej pary niepołączonych wierzchołków  $u, v \in V(D)$   $d(u) + d(v) \geq 2n - 3$ , to  $D$  jest trasowalny. Czy istnieje digraf silnie spójny  $D$  rzędu  $n$  taki, że dla każdej pary niepołączonych wierzchołków  $u, v \in V(D)$   $d(u) + d(v) \geq 2n - 1$ , ale  $D$  nie jest hamiltonowski?

**Zadanie 4 (10 punktów).** Niech  $T_n$  będzie turniejem, który nie jest silnie spójny. Odpowiedz na poniższe pytania:

- a) Jak wygląda digraf kondensacji turnieju  $T_n$ ?
- b) Czy w digrafie kondensacji turnieju  $T_n$  istnieje jądro? Jeśli tak, czy jest ono jedyne? Jeśli jest ono jedyne, wskaż je.
- c) Czy w turnieju  $T_n$  istnieje jądro?

Uzasadnij odpowiedzi.

*Powodzenia!*