

Zestaw 4 - Jądro w digrafie

1. Podaj przykład digrafu, który ma więcej niż jedno jądro oraz:
 - a) jądra są równoliczne,
 - b) jądra nie są równoliczne.
2. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Oceń prawdziwość następujących stwierdzeń:
 - a) Każda orientacja grafu G ma jądro.
 - b) Istnieje orientacja grafu G , która ma jądro.
3. Niech $D = (V, A)$ będzie digrafem prostym. Wykaż, że $S \subset V$ jest jądrem digrafu D wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja charakterystyczna zbioru S spełnia warunek $\forall v \in V \varphi_S(v) = 1 - \max_{u \in N^+(v)} \varphi_S(u)$.

Definicja 1. Funkcję $g: V \rightarrow \mathbb{N}$ nazywamy **funkcją Grundy'ego**, jeśli dla każdego wierzchołka $v \in V$ wartość $g(v)$ jest najmniejszą liczbą naturalną, która nie należy do zbioru $\{g(u): u \in N^+(v)\}$.

4. Znajdź funkcję Grundy'ego dla następujących digrafów:
 - a) cyklu $\vec{C}_3$,
 - b) cyklu $\vec{C}_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$,
 - c) cyklu $\vec{C}_4$ o wierzchołkach v_1, v_2, v_3, v_4 z dodanymi wierzchołkami v_5, v_6 i łukami v_1v_5, v_5v_6 ,
 - d) cyklu $\vec{C}_3$ o wierzchołkach v_1, v_2, v_3 z dodanym wierzchołkiem v_4 i łukami v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4 .
5. Wykaż, że jeśli D posiada funkcję Grundy'ego, to D ma jądro.