

**Zestaw 4 - Jądro w digrafie**

1. Podaj przykład digrafu, który ma więcej niż jedno jądro oraz:
  - a) jądra są równoliczne,
  - b) jądra nie są równoliczne.
2. Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem. Oceń prawdziwość następujących stwierdzeń:
  - a) Każda orientacja grafu  $G$  ma jądro.
  - b) Istnieje orientacja grafu  $G$ , która ma jądro.
3. Niech  $D = (V, A)$  będzie digrafem prostym. Wykaż, że  $S \subset V$  jest jądrem digrafu  $D$  wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja charakterystyczna zbioru  $S$  spełnia warunek  $\forall v \in V \varphi_S(v) = 1 - \max_{u \in N^+(v)} \varphi_S(u)$ .

**Definicja 1.** Funkcję  $g: V \rightarrow \mathbb{N}$  nazywamy **funkcją Grundy'ego**, jeśli dla każdego wierzchołka  $v \in V$  wartość  $g(v)$  jest najmniejszą liczbą naturalną, która nie należy do zbioru  $\{g(u) : u \in N^+(v)\}$ .

4. Znajdź funkcję Grundy'ego dla następujących digrafów:
  - a) cyklu  $\vec{C}_3$ ,
  - b) cyklu  $\vec{C}_{2k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,
  - c) cyklu  $\vec{C}_4$  o wierzchołkach  $v_1, v_2, v_3, v_4$  z dodanymi wierzchołkami  $v_5, v_6$  i łukami  $v_1v_5, v_5v_6$ ,
  - d) cyklu  $\vec{C}_3$  o wierzchołkach  $v_1, v_2, v_3$  z dodanym wierzchołkiem  $v_4$  i łukami  $v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4$ .
5. Wykaż, że jeśli  $D$  posiada funkcję Grundy'ego, to  $D$  ma jądro.
6. Udowodnij, że acykliczny digraf prosty ma jądro.