Zestaw 5 - Przestrzenie liniowe

1. Udowodnij, że jeśli $\mathcal{F}$ jest podprzestrzenią przestrzeni krawędziowej grafu rozmiaru m, to $\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}^{\perp} = m$.

2. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem o zbiorze wierzchołków $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ i zbiorze krawędzi $E = \{e_1 = v_1v_2, e_2 = v_2v_3, e_3 = v_3v_4, e_4 = v_4v_1, e_5 = v_4v_2, e_6 = v_4v_5, e_7 = v_1v_5\}$.

   a) Znajdź podprzestrzeń $\mathcal{F}$ przestrzeni krawędziowej generowaną przez wektor $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$.

   b) Wyznacz bazę $\mathcal{F}^{\perp}$.

   c) Wyznacz bazy przestrzeni cykli i przekrojów.

3. Udowodnij, że w grafie spójnym przekrój $E(V_1, V_2)$ jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory V_1 oraz V_2 indukują podgrafy spójne.

4. Udowodnij, że przekroje postaci $E(v) = \{uv \in E(G) \colon u \in N(v)\}$ generują przestrzeń przekrojów grafu G. Podaj bazę tej przestrzeni złożoną z przekrojów postaci $E(v)$.

5. Udowodnij, że $\dim \mathcal{C} = m - n + p$ oraz $\dim \mathcal{B} = n - p$, gdzie n jest rzędem grafu G, m jego rozmiarem, a p liczbą składowych.

6. Udowodnij, że macierz incydencji dowolnego digrafu jest macierzą unimodularną.

L. Adamus, S. Cichacz, A. Marczyk