Kolokwium I

Teoria grafów, WMS

Zadanie 1. (**15p.**) Dany jest graf H_n, $n \geqslant 1$, zdefiniowany następująco:
Wierzchołkami grafu H_n są ciągi ternarne (o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$) długości n, a krawędź między dwoma wierzchołkami istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się na dokładnie jednej pozycji.

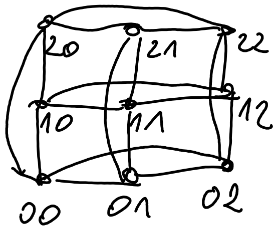
a) Zbadaj planarność grafu H_n.

b) Wykorzystując twierdzenie Mengera, udowodnij, że graf H_n jest $2n$-spójny.

a) H_1

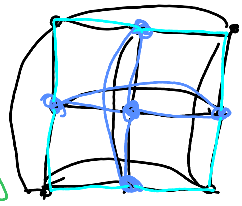
planarny 1p

H_2



nie jest planarny

1p ma minor topologiczny K_5



2p 1p

H_n, $n \geq 3$, $\delta(H_n) = 2n$, dla $n \geq 3$ $\delta(H_n) \geq 6$
graf planarny ma st. min. ≤ 5 $\Rightarrow$ H_n nie jest planarny

b) Tw. Mengera

2p Graf jest k-spójny wtw, gdy dla każdych dwóch wierzchołków istnieje k wewnętrznie rozłącznych ścieżek je łączących.

Szukam $2n$ wew. rozł. ścieżek między dowolnymi wierzchołkami.

2p Traktuję graf H_n jako powstały z trzech kopii H_{n-1}, przez dodanie do każdego wierzchołka na końcu cyfry 0, 1 albo 2 (H^0_{n-1}, H^1_{n-1}, H^2_{n-1}) i połączenie krawędziami odpowiadających sobie wierzchołków w różnych kopiach.

1p Dowód indukcyjny względem n:

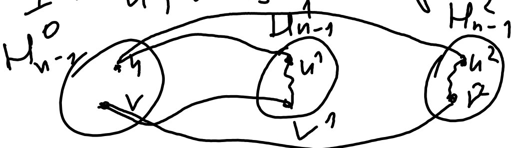
1p 1°. $n=1$

K_3 z def. jest 2-spójny

1p 2° zał. graf H_{n-1} jest $(2n-2)$-spójny
teza. graf H_n jest $2n$-spójny

Biorę u, v - dwa wierzchołki H_n:

I. u, v są w tej samej kopii H_{n-1} $\rightarrow$ BSO $u, v \in H^0_{n-1}$



w H^0_{n-1} z zał. są $2n-2$ ścieżki, dwie kolejne: 1p
$u - u^1 \underset{w\, H^1_{n-1}}{\sim} v^1 - v$, $u - u^2 \underset{w\, H^2_{n-1}}{\sim} v^2 - v$

II u, v w różnych kopiach, BSO $u = u^0 \in H^0_{n-1}$, $v = v^1 \in H^1_{n-1}$
niech $P_1, P_2, \dots, P_{2n-2}$ ścieżki z u^0 do v^0 (kopia v^1 w H^0_{n-1}); niech u_i^0 następnik u^0 na P_i
mamy ścieżki: $u^0 u_i^0 - u_i^1 P_i^1 v^1$ dla $i \in \{2, 3, \dots, 2n-2\}$ $\rightarrow$ $2n-3$ ścieżki
$u^0 P_1 v^0 - v^1$, $u^0 - u^1 P_1^1 v^1$ $\rightarrow$ 2 ścieżki
$u^0 - u^2 \sim v^2 v^1$ $\rightarrow$ 1 ścieżka
w sumie $2n$ wew. rozł. ścieżki
2p

Zadanie 2. (**12p.**) Niech $\mathcal{P}$ będzie własnością zawierania skojarzenia liczebności k. Udowodnij, że własność $\mathcal{P}$ jest $(2k-1)$-stabilna. Czy stabilność własności $\mathcal{P}$ jest równa $2k-1$?

Lemat:

1p zał. $u, v \in V(G)$, $uv \notin E(G)$, $d(u)+d(v) \geq 2k-1$, $G+uv \in \mathcal{P}$

teza. $G \in \mathcal{P}$

Dowód. nie wprost, Hp. $G \notin \mathcal{P}$, czyli w G nie istnieje skojarzenie liczebności k → 1p

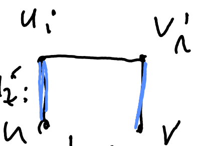
1p Ale w $G+uv$ istnieje takie skojarzenie, więc w G istnieje skojarzenie liczebności $k-1$. Niech $u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_{k-1}v_{k-1}$ będzie tym skojarzeniem.

1p Gdyby u lub v miał sąsiada poza skojarzeniem, to byłaby k-ta krawędź skojarzenia w G, sprzeczność.

niech $W = \{u_1, u_2, \dots, u_{k-1}\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$

$N(u) \subset W$, $N(v) \subset W$

1p $uu_i \in E(G) \Rightarrow vv_i \notin E(G)$, bo gdyby była tu krawędź:



ze skojarzenia usuwam u_iv_i, dodaję uu_i, vv_i, mamy skojarzenie liczebności k w G, sprzeczność.

Stąd: $d(v) \leq \underbrace{2(k-1)}_{\text{moc } W} - d(u)$ 1p

każdy sąsiad u „blokuje" dokładnie jednego sąsiada v.

$d(u)+d(v) \leq 2k-2$

z zał. $d(u)+d(v) \geq 2k-1$ } sprzeczność 1p □

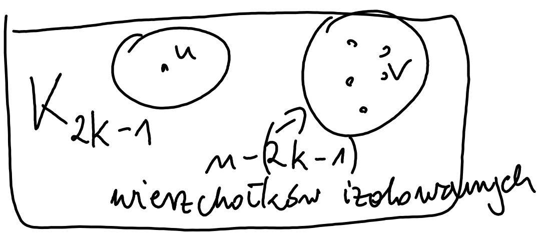
Dowód, że $\mathcal{P}$ jest $(2k-1)$-stabilna.

Biorę $cl_{2k-1}(G) = ((G+e_1)+e_2)+\dots+e_l$, gdzie $(G+e_1+\dots+e_i) =: G_i$

3p $e_i = u_iv_i$: $d_{G_{i-1}}(u_i)+d_{G_{i-1}}(v_i) \geq 2k-1$, $u_iv_i \notin G_{i-1}$

jeśli $G_l = cl_{2k-1}(G) \in \mathcal{P}$, to z lematu $G_{l-1} \in \mathcal{P}$, z lematu $G_{l-2} \in \mathcal{P}$, itd. $G \in \mathcal{P}$ □

Stabilność własności $\mathcal{P}$ wynosi $2k-1$, bo:



G rzędu n

$d(u)+d(v) = 2k-2+0 = 2k-2 \geq 2k-2$

czyli $cl_{2k-2}(G) \in \mathcal{P}$, bo $cl_{2k-2}(G) = K_n$

ale $G \notin \mathcal{P}$

Stąd $\mathcal{P}$ nie jest $(2k-2)$-stabilna. 2p

Zadanie 3. (**13p.**) Dany jest graf F_n, $n \geqslant 1$, powstały z n rozłącznych kopii grafu K_2 poprzez dodanie nowego wierzchołka v oraz połączenie go krawędzią z każdym innym wierzchołkiem.

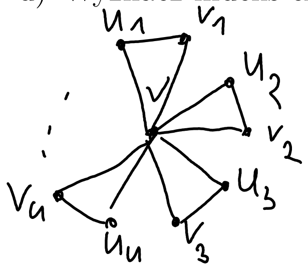
a) Zbadaj eulerowskość grafu F_n.

b) Zbadaj hamiltonowskość grafu krawędziowego grafu F_n.

c) Wyznacz liczbę chromatyczną grafu F_n.

d) Wyznacz indeks chromatyczny grafu F_n.

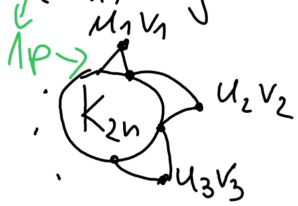
F_n :



$d_{F_n}(v) = 2n = \Delta(F_n)$

a) F_n jest eulerowski, bo jest spójny i każdy wierzchołek ma st. parzysty 1p 1p? 1p

b) $L(F_n)$ – graf krawędziowy



1p ma cykl Hamiltona:

$u_1v_1, v_1v, vu_2, u_2v_2, v_2v, \ldots, vu_1$ → wierzchołki $L(F_n)$ powstałe z krawędzi grafu F_n

1p

c) $\chi(F_n) = 3$, 1p

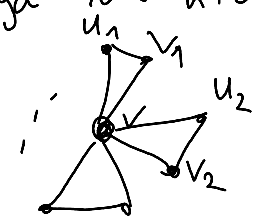
1p $\chi(F_n) \geqslant 3$, bo ma C_3

1p $\chi(F_n) \leq 3$, bo $c(v) = 1$, $c(u_i) = 2$, $c(v_i) = 3$, c – właściwe

d) $\chi'(F_n) = 2n$, $n \geqslant 2$ 1p, $\boxed{\chi'(F_1) = 3}$ 1p

z tw. Vizinga $\chi'(F_n) \in \{2n, 2n+1\}$ 1p

c – właściwe:



wokół v różne kolory)

$c(u_iv_i) = c(vu_{i+1})$

$c(u_nv_n) = c(vu_1)$

1p