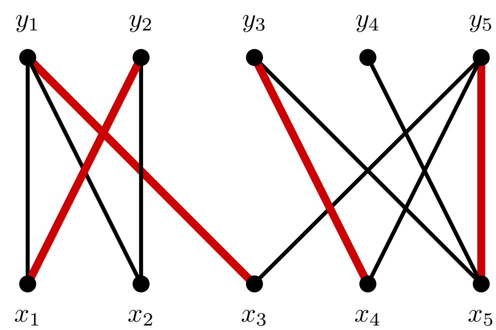
Teoria

Definicje: skojarzenie z X do Y; skojarzenie pełne; pokrycie wierzchołkowe; zbiór niezależny; system różnych reprezentantów
Twierdzenia: tw. Halla

A. Zadania na ćwiczenia

A1 Korzystając z odpowiedniego algorytmu, wskaż maksymalne skojarzenie z $X = \{x_1, \ldots, x_5\}$ do $Y = \{y_1, \ldots, y_5\}$ w grafie G poniżej, wychodząc od zaznaczonego skojarzenia. Wskaż minimalne pokrycie grafu G.



A2 Wykaż, że jeżeli $\delta(G) \geq \frac{|X|}{2}$, to

(a) minimalny zbiór pokrywający w G ma $|X|$ wierzchołków,

(b) maksymalny zbiór niezależny w G ma $|Y|$ wierzchołków.

A3 Niech $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie rodziną zbiorów skończonych. Udowodnij, że dla rodziny $\mathcal{A}$ istnieje system różnych reprezentantów wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |I|.$$

A4 Czy dla poniższych rodzin zbiorów istnieją systemy różnych reprezentantów?

a) $\{1, 2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{6\}$

b) $\{1, 2, 5\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{1, 5\}, \{3, 4\}$.

B. Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

B1 Znajdź najliczniejszy zbiór niezależny oraz najmniej liczny zbiór pokrywający w grafach: K_n, P_n, C_n.

C. Zadania do samodzielnej pracy

C1 Sprawdź, czy graf z zadania A1 spełnia warunek Halla.

C2 Czy dla poniższych rodzin zbiorów istnieją systemy różnych reprezentantów?

a) $\{1,2,5\},\{2,6\},\{2,3\},\{2,3,4\},\{6\},\{2,4,6\}$

b) $\{a,c,g\},\{g,h\},\{a,g,h\},\{f,g\},\{c,h\}$

C3 Sformułuj i udowodnij haremową (poligamiczną) wersję twierdzenia Halla. W haremie każdy mężczyzna może mieć ustaloną dla niego liczbę żon, każda kobieta zaś może mieć tylko jednego męża.