Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
w Krakowie
Wydział Matematyki Stosowanej

Wstęp do Analizy numerycznej

Andrzej Kałuża

November 18, 2024

1 Arytmetyka zmiennoprzecinkowa

Zadanie 1.1

Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x istnieją dokładnie jedna liczba całkowita c oraz dokładnie jedna liczba $m \in [\beta^{-1}, 1)$, gdzie$\beta \geq 2$ jest ustaloną liczbą naturalną, takie że

$$x = \beta^c m. \tag{1}$$

Zadanie 1.2

Niech $\beta \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną oraz niech $m = \sum_{k=1}^{\infty} e_{-k}\beta^{-k}$, gdzie $e_{-1} \neq 0$ $e_{-i} \in \{0, 1, \dots, \beta - 1\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. Rozważmy, dla ustalonego $t \in \mathbb{N}$, funkcję

$$rd_t : m \to m_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{t} e_{-k}\beta^{-k} & \text{gdy } 0 \leq e_{-(t-1)} \leq \frac{\beta}{2} - 1 \\ \sum_{k=1}^{t} e_{-k}\beta^{-k} + \beta^{-t} & \text{gdy } \frac{\beta}{2} \leq e_{-(t-1)} \leq \beta - 1 \end{cases}$$

Uzasadnij że

$$|rd_t(m) - m| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t}.$$

Zadanie 1.3

Uzasadnij, że relacja równości w sensie jeden jest relacją równoważności w zbiorze wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na przedziale $[1, \infty)$.

Zadanie 1.4

Sprawdzić, czy podane poniżej równości w sensie jeden są prawdziwe:

(i) $K_1 2^{-t} + K_2 2^{-2t} =_1 K_1 2^{-t}$,

(ii) $\frac{K_1}{1 - K \cdot 2^{-t}} =_1 K_1$,

(iii) $K_1 2^{-t} =_1 1$,

(iv) $\cos(2^{-t}) =_1 1$,

(v) $K_1 2^{-2t} =_1 0$.

Zadanie 1.5

Pokaż, że:

(a) jeśli $\lim_{t \to +\infty} 2^t (a(t) - 1) = 0$, to $a(t) =_1 1$,

(b) jeśli $a(t) =_1 1$, to $\lim_{t \to +\infty} a(t) = 1$.

Zadanie 1.6

Wykaż poniższe zależnośći:

- jeżeli $1 + E = (1 + a_1)(1 + a_2)$ oraz $|a_i| \leq K_i 2^{-t}$ $(i = 1, 2)$ to $|E| \leq_1 (K_1 + K_2)2^{-t}$;
- jeżeli $1 + E = \frac{1+a_1}{1+a_2}$ oraz $|a_i| \leq K_i 2^{-t}$ $(i = 1, 2)$ to $|E| \leq_1 (K_1 + K_2)2^{-t}$;
- jeżeli $1 + E = \sqrt{1 + a}$ oraz $|a| \leq K2^{-t}$ to $|E| \leq_1 \frac{1}{2}K2^{-t}$;

Zadanie 1.7

Zbadać błędy wytworzone działań dla zadań:

- $\phi_1(a, b) = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$, $ab > 0$,
- $\phi_2(a, b) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b > 0$, $a \geq 0$,

Zadanie 1.8

Dla zadania $\phi(a, b, c) = \frac{a^2-bc}{b^2+ac}$, $a, b, c > 0$, znaleźć błąd wytworzony przy obliczaniu tej wielkości w arytmetyce *fl*.

Zadanie 1.9

Załóżmy, że dla $a, b > 0$ chcemy obliczyć w arytmetyce *fl* dwie wielkości $\phi_1(a, b) = \frac{a}{a+b}$ i $\phi_2(a, b) = \frac{b}{a+b}$. Rozważmy następujące algorytmy dla tych zadań:

(a) $A_1(a, b) = \phi_1(a, b)$, $A_2(a, b) = \phi_2(a, b)$,

(b) $\tilde{A}_1(a, b) = \phi_2(a, b)$, $\tilde{A}_2(a, b) = 1 - \tilde{A}_1(a, b)$.

Zbadać w którym przypadku błędy wytworzone przez algorytmy są mniejsze.

Zadanie 1.10

Niech $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Czy z punktu widzenia błędów w *fl* lepiej jest policzyć sumę tych liczb w kolejności od najmniejszej do największej czy odwrotnie?

1.1 Zadania powtórkowe z wł. Darboux, tw. Rolle'a, tw. o wartości średniej i rozwinięcia Taylora

Zadanie 1.11

Ile składników wielomianu we wzorze Taylora jest potrzebnych, aby obliczyć $\ln 2$ z dokładnością rzędu 10^{-8}.

Zadanie 1.12

Zakładając, że $|x| < 1/2$ i stosując wzór Taylora znaleźć oszacowanie z góry dla

$$|\cos(x) - (1 - x^2/2)|.$$

Zadanie 1.13

Ile składników trzeba uwzględnić w szeregu

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}, \tag{2}$$

aby otrzymać wartość liczby e z błędem nie większym od 10^{-20}?

Zadanie 1.14

Korzystając ze wzoru Taylora udowodnić, że

$$\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^x > 1 + x. \tag{3}$$

Zadanie 1.15

Udowodnić, że jeśli $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ to dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x). \tag{4}$$

Zadanie 1.16

Wykazać, że jeśli $f \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{R})$ i istnieją punkty $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ takie, że $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$ to istnieje $\xi \in (x_0, x_n)$ taki, że $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Zadanie 1.17

Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją ciągłą. Wykazać, że istnieje $x_0 \in [0,1]$ taki, że $f(x_0) = x_0$.

Zadanie 1.18

Niech $f \in C([0,2])$ będzie funkcją spełniającą warunek $f(0) = f(2)$. Wykazać, że istnieją $x_1, x_2 \in [0,2]$ takie, że $x_2 - x_1 = 1$ i $f(x_2) = f(x_1)$.

Zadanie 1.19

Udowodnić, że jeśli $f \in C((a,b))$, $a < b$, oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są dowolnymi punktami z (a,b), to istnieje $x_0 \in (a,b)$ taki, że

$$f(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{5}$$

Zadanie 1.20

Niech $f \in C([a,b]) \cap C^1((a,b))$ spełnia warunek

$$(f(b))^2 - (f(a))^2 = b^2 - a^2. \tag{6}$$

Wykazać, że w przedziale (a,b) istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania

$$f'(x)f(x) = x. \tag{7}$$

Zadanie 1.21

Załóżmy dla funkcji $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, że istnieje $M \geq 0$ takie, że dla wszystkich $x \in (a,b)$

$$|f''(x)| \leq M. \tag{8}$$

Udowodnić, że funkcja f jest jednostajnie ciągła na (a,b).

2 Uwarunkowanie, numeryczna poprawność

Zadanie 2.1

Dla $a, b, c \in \mathbb{R}$ wyznaczyć wskaźnik uwarunkowania dla zadań:

(a) $w = a + b$,

(b) $w = a - b$,

(c) $w = a \cdot b$,

(d) $w = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$,

(e) $w = ab + c$

Zadanie 2.2

W celu obliczenia $\phi(a, b) = a^2 - b^2$ stosujemy dwa algorytmy:

(a) $A_1(a, b) = a \cdot a - b \cdot b$,

(b) $A_2(a, b) = (a - b) * (a + b)$.

Pokazać, że oba algorytmy są numerycznie poprawne, ale drugi z nich wywołuje mniejszy błąd względny wyniku w przypadku, gdy $rd(a) = a$ i $rd(b) = b$.

Zadanie 2.3

Rozważmy układ równań $\begin{cases} a^2x - aby = 1 & a, b \in \mathbb{R} \\ bx + ay = -1 & a \neq 0 \end{cases}$ Zaproponuj algorytm numerycznie poprawny.

Zadanie 2.4

Wartości funkcji f w punkcie x obliczono algorytmem numerycznie poprawnym

$$fl(f(x)) = f(x(1 + \delta))(1 + \varepsilon), \ |\varepsilon| \leq K_1 2^{-t}, \ |\delta| \leq K_2 2^{-t}.$$

$f \in \mathcal{C}^1$. Oszacuj błąd względny uzyskanej wartości.

Zadanie 2.5. Referat

$a_0, \ldots a_n, s \in \mathbb{R}$. Do obliczenia wartosci

$$\begin{aligned} w &= a_0 + a_1 s + \ldots a_n s^n & (9) \\ &= a_0 + s(a_1 + s(a_2 + \ldots + s(a_{n-1} + s a_n) \ldots)) & (10) \end{aligned}$$

możemy zastosować algorytm Hornera

```
w_n = a_n
for i from n-1 down to 0
do
    w_i = w_{i+1} * s + a_i
```

wówczas $w_0 = w$. Wykazać ze algorytm ten jest numerycznie poprawny. Wskazać liczbę działań niezbędnych do wykonania w celu obliczenia w w tym algorytmie.

3 Interpolacja wielomianowa

Zadanie 3.1

Niech $x_0 < x_1 < \dots x_n$ oraz niech

$$\varphi_i(x) = \Pi_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n.$$

Wykaż, że wielomiany $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ są liniowo niezależne.

Zadanie 3.2

Wyznacz wielomian interpolacyjny w postaci Lagrange'a i Newtona dla danych:

(a) $(2, 11)$, $(0, 7)$, $(3, 28)$,

(b) $(0, 1)$, $(2, -1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 2)$.

Zadanie 3.3

Niech $f(x) = \ln(x)$, $x > 0$. Wyznaczyć wielomian interpolacyjny w postaci Newtona dla węzłów $(x_i, f(x_i))_{i=0}^3$ gdzie $x_i = 100 + i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Następnie za pomocą wielomianu interpolacyjnego obliczyć $f(100.5)$ i oszacować błąd tego przybliżenia, tj. $|f(100.5) - w(100.5)|$.

Zadanie 3.4

Wyznacz wielomian interpolacyjny Hermite'a interpolujący funkcję $f(x) = x^2 + 1$ dla węzłów $x_0 = 0$, $m_0 = 1$, $x_1 = 1$, $m_1 = 1$, $x_2 = 2$, $m_2 = 2$.

Zadanie 3.5

Wielomian $f \in \Pi_n$ interpolujemy wielomianem Lagrange'a w opartym na węzłach $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Pokazać, że $f \equiv w$.

Zadanie 3.6

Niech $f \in C^1(\mathbb{R})$ i załóżmy, że istnieją stałe $D, L > 0$ takie, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| \leq D, \quad |f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|. \tag{11}$$

Pochodną $f'(x)$, w ustalonym punkcie x, przybliżamy obliczając w fl następujący iloraz różnicowy

$$A(f, x, h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

przy ustalonym $h > 0$. Oszacować błąd bezwzględny

$$|f'(x) - fl(A(f, x, h))| \tag{12}$$

i na jego podstawie przedyskutować optymalny dobór h.

Zadanie 3.7

Niech $f : [0, \pi] \ni x \to \cos(x)$. Dane niech też będą węzły $x_0 = 0$, $m_0 = 2$, $x_1 = \alpha \in [0, \pi]$, $m_1 = 1$. Niech $H_2 = H_2(x, \alpha)$ będzie wielomianem Hermite'a opartym na tych węzłach. Dobrać α tak aby oszacowanie reszty $\sup\limits_{x \in [0,\pi]} |f(x) - H_2(x, \alpha)|$ było jak najmniejsze.

Zadanie 3.8

Niech $l_i = \prod\limits_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ dla $x_0 < x_1 < ... < x_n$, $c_i = l_i(0)$, $i = 0, 1, ..., n$. Udowodnić, że

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j = 1, 2, \dots n, \\ (-1)^n x_0 \cdot \ldots \cdot x_n, & j = n+1. \end{cases}$$

(b) $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$.

Zadanie 3.9

Dla pewnej funkcji ciągłej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dane niech będą węzły $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{n}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$. Funkcję f interpolujemy łamaną l_1 opartą na tych węzłach. Pokazać, że

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - l_1(x)| \leq \begin{cases} 2\max_{x\in[a,b]} |f'(x)| \cdot \max_i |x_{i+1} - x_i|, & \text{gdy } f \in C^{(1)}([a,b]), \\ \frac{1}{8}\max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \cdot \max_i |x_{i+1} - x_i|^2, & \text{gdy } f \in C^{(2)}([a,b]). \end{cases} \quad (13)$$

Zadanie 3.10

Funkcję $f(x) = \cos(x)$ na przedziale $x \in [0, \pi/2]$ interpolujemy wielomianem Hermite'a $w = w(x)$ opartym na informacji $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $i = 0, 1$, $0 \leq x_0 < x_1 \leq \pi/2$.

(a) Pokazać, że dla $x \in [0, \pi/2]$ mamy $f(x) \geq w(x)$.

(b) Przyjmując za $x_0 = 0$, $x_1 = \pi/2$ wyznaczyć wielomian inteprolacyjny Hermite'a dla f oparty na tych węzłach. Podać błąd interpolacji.

4 Interpolacja funkcjami sklejanymi i trygonometryczna

Zadanie 4.1

Wyznacz kubiczną funkcję sklejaną S spełniającą warunki:

$$S(0) = 1, S(1) = 0, S(2) = 2, S''(0) = S''(2) = 0.$$

Zadanie 4.2

Sprawdzić czy poniższy wzór określa funkcję sklejaną stopnia drugiego:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ -\frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{3}{2}, & x \in [1, 2], \\ \frac{3}{2}, & x > 2. \end{cases} \tag{14}$$

Zadanie 4.3

Czy istnieją parametry rzeczywiste a, b, c, d oraz e dla których funkcja określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3, & x \leq 1, \\ c(x-1)^2, & x \in (1, 3], \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3, & x > 3. \end{cases} \tag{15}$$

jest nietrywialną funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

Zadanie 4.4

Czy istnieją parametry rzeczywiste a, b dla których funkcja określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + a(x-1)^2, & x \leq 2, \\ (x-2)^3 - (x-3)^2, & x \in (2, 3], \\ (x-3)^3 + b(x-2)^2, & x > 3. \end{cases} \tag{16}$$

jest funkcją sklejaną stopnia trzeciego?

Zadanie 4.5

Pokazać, że dla $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ funkcja

$$t_4(x) = \prod_{k=1}^{4} \sin \frac{x - x_k}{2}, \tag{17}$$

jest wielomianem trygonometrycznym postaci

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{2} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big), \tag{18}$$

z rzeczywistymi współczynnikami a_k, b_k.

Zadanie 4.6

Pokazać, że dla $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n} \in \mathbb{R}$ funkcja

$$t_{2n}(x) = \prod_{k=1}^{2n} \sin \frac{x - x_k}{2}, \tag{19}$$

jest wielomianem trygonometrycznym postaci

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big), \tag{20}$$

z rzeczywistymi współczynnikami a_k, b_k.

Zadanie 4.7

Wyznacz trygonometryczny wielomian interpolacyjny interpolujący funkcję

$$[0, 2\pi) \ni x \to cos^2 x - |sin 2x| \in \mathbb{R}$$

w punktach $x_k = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$.

Zadanie 4.8

Wielomian trygonometryczny

$$t_2(x) = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}e^{ix} + \frac{5}{4}e^{2ix}$$

interpoluje funkcję $f(x) = (\sqrt{3}|sinx| - 2)^2$ w punktach $x_0 = 0, x_1 = 2\pi/3, x_2 = 4\pi/3$. Wykorzystując tę informację wyznacz wielomian trygonometryczny t_3 interpolujący funkcję f również w punkcie $x_3 = \pi$

Zadanie 4.9

Funkcję $f : [0, 2\pi) \to \mathcal{C}$ spełniającą warunek

$$\forall x \in (0, 2\pi) : f(2\pi - x) = f(x)$$

nazwiemy funkcją parzystą; funkcję $f : [0, 2\pi) \to \mathcal{C}$ spełniającą warunek

$$\forall x \in (0, 2\pi) : f(2\pi - x) = -f(x)$$

nazwiemy funkcją nieparzystą. Jakiej postaci są wielomiany trygonometryczne stopnia n będące funkcjami parzystymi (nieparzystymi)?

Zadanie 4.10

Niech $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. Niech t_n będzie wielomianem trygonometrycznym interpolującym funkcje parzystą (w sensie definicji z poprzedniego zadania) w węzłach $x_0, x_1, \dots x_n$. Czy wielomian trygonometryczny t_n jest również funkcja parzystą?

Zadanie 4.11

Uzasadnij, że trygonometryczny wielomian interpolacyjny

$$t_{2n}(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$$

interpolujący funkcję f w węzłach $0 \leq x0 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$ można wyrazić w postaci

$$t_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\psi_k(x),$$

gdzie, dla $k = 0, \ldots, 2n$,

$$\psi_k(x) = \prod_{j \neq i} \frac{\sin \frac{x - x_j}{2}}{\sin \frac{x_i - x_j}{2}}.$$

5 Aproksymacja

Zadanie 5.1

Rozważmy przestrzeń liniową $X = \mathbb{R}^2$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Niech $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$. Znaleźć element optymalny w F dla $f = (2, 0)$, gdy w X przyjmujemy normę:

(i) $||(x, y)|| = \max\{|x|, |y|\}$,

(ii) $||(x, y)|| = |x| + |y|$,

(iii) $||(x, y)|| = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2}$.

W każdym przypadku wyznaczyć błąd aproksymacji.

Zadanie 5.2

Rozważmy przestrzeń unormowaną $(X, ||\cdot||)$ i podprzestrzeń skończenie wymiarową $V \subset X$. Dla $u \in X \setminus V$ rozważmy zbiór

$$P_V(f) = \{h^* \in V \mid ||h - h^*|| = \varepsilon_V(f)\}, \tag{21}$$

gdzie $\varepsilon_V(f) = \inf_{h \in V} ||f - h||$. Pokazać, że zbiór $P_V(f)$ jest wypukły.

Zadanie 5.3

Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ z normą $\|(x, y)\| = |x| + |y|$. Niech $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$. Znaleźć element optymalny w V dla $f = (2, 0)$. Wyznaczyć błąd aproksymacji.

Zadanie 5.4

Rozważmy przestrzeń unitarną $(X, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ nad ciałem $\mathbb{R}$ i pewną skończenie wymiarową podprzestrzeń $V \subset X$. Niech h_i^* będzie elementem optymalnym w V dla $f_i \in X \setminus V$, $i = 1, 2$. Czy $\alpha_1 h_1^* + \alpha_2 h_2^*$ jest elementem optymalnym w V dla $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$?

Zadanie 5.5

Niech $X = \Pi_2$, $V = \Pi_1$, $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, $f, g \in X$. Dla $f(x) = 2x^2 + 2$ znaleźć element optymalny w V.

Zadanie 5.6

Niech $X = \Pi_2$, $V = \Pi_1$, $\langle f, g\rangle = \int\limits_{0}^{1} f(x)g(x)x dx$, $f, g \in X$. Dla $f(x) = x^2$ znaleźć element optymalny w V.

Zadanie 5.7

Rozważmy przestrzeń Hilberta $X = L^2([0, \pi/2])$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx$ oraz $V = \Pi_2$. Dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ znaleźć w V element optymalny w aproksymacji średniokwadratowej.

Zadanie 5.8

Wyznacz te wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$, dla których bryła powstała przez obrót wykresu funkcji $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ na przedziale $[-1, 1]$ wokół osi Ox ma najmniejszą objętość. Wyznacz tę objętość.

Zadanie 5.9

Znajdź element optymalny w sensie aproksymacji średniokwadratowej (tj. w sensie normy określonej przez naturalny iloczyn skalarny przestrzeni X) dla elementu f w podprzestrzeni V przestrzeni X; podaj błąd aproksymacji:

- $X = L_2([0, 1]),\ V = \pi_1,\ f(x) = 2x^2 + 2$
- $X = L_2([-1, 1], \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}),\ V = \pi_2,\ f(x) = (x + 1)^3$
- $X = L_2([-1, 1], \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}),\ V = \pi_n,\ f \in \Pi_{n+1}$
- $X = L_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}),\ V = \pi_1,\ f(x) = x^2$

Zadanie 5.10

Znajdź element optymalny w sensie aproksymacji jednostajnej (tj. w sensie supremum) dla elementu u w podprzestrzeni V przestrzeni X; podaj błąd aproksymacji i alternans:

- $X = \mathcal{C}_{[-1,1]},\ V = \pi_m,\ f(x) = x^{m+1}$
- $X = \mathcal{C}_{[-1,1]},\ V = \pi_{m-1},\ f(x) = x^{m+1}$
- $X = \mathcal{C}_{[1,e]},\ V = \pi_0,\ f(x) = \ln x$
- $X = \mathcal{C}_{[1,e]},\ V = \pi_1,\ f(x) = \ln x$
- $X = \mathcal{C}_{[0,2]},\ V = \pi_2,\ f(x) = 4x^3 - 11x^2 + 10x$
- $X = \mathcal{C}_{[-1,1]},\ V = \pi_1,\ f(x) = \exp|x|$

Zadanie 5.11

Wyznaczyć ekstrema i miejsca zerowe wielomianów Czybyszewa I rodzaju.

Zadanie 5.12

Korzystając z reguły trójczłonowej dla wielomianów Czebyszewa I rodzaju pokazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [-1, 1]$ mamy

$$T_n(x) = (-1)^n T_n(-x). \tag{22}$$

Zadanie 5.13

Sprawdzić ortogonalność wielomianów Czybyszewa z funkcją wagową $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Zadanie 5.14

Niech T_n oznacza n–ty wielomian Czebyszewa I rodzaju, $n \geq 1$. Uzasadnić, że dla wielomianu stopnia $n+1$ postaci

$$w(x) = x^{n+1} - T_n(x), \tag{23}$$

wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej w $X = C([-1,1])$ jest wielomian dany wzorem

$$h(x) = x^{n+1} + \frac{1}{2^n} T_{n-1}(x) - \left(1 + \frac{x}{2^{n-1}}\right) T_n(x). \tag{24}$$

Zadanie 5.15

Niech $X = C([-a,a])$, $a > 0$, $V = \Pi_n$. Pokazać, że wtedy

(a) $f \in X$ – parzysta $\Longrightarrow$ element optymalny $h^* \in V$ – parzysty

(b) $f \in X$ – nieparzysta $\Longrightarrow$ element optymalny $h^* \in V$ – nieparzysty

6 Kwadratury

Zadanie 6.1

Znajdź rząd i wyrażenie na błąd dla kwadratury interpolacyjnej przybliżającej całkę

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

i opartej na informacji $f(a), f(\frac{a+b}{2}), f'(\frac{a+b}{2}), f"(\frac{a+b}{2}), f(b)$.

Zadanie 6.2

Całkę

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

, $f \in C([0,1])$, przybliżamy kwadraturą $S(f) = A_0 f(0) + A_1 f(1)$. Wyznaczyć współczynniki A_0, A_1 tak aby ta kwadratura była dokładna dla wszystkich funkcji postaci $f(x) = ae^x + b\cos(\pi x/2)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6.3

Całkę $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$, $f \in C([0,1])$, przybliżamy kwadraturą $S(f) = A_0 f(0) + A_1 f(1)$. Wyznaczyć współczynniki A_0, A_1 tak aby ta kwadratura była dokładna dla wszystkich funkcji postaci $f(x) = ae^x + b\cos(\pi x/2)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6.4

Całkę $I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)dx$, $f \in C([0,2\pi])$, przybliżamy kwadraturą $S(f) = A_0 f(0) + A_1 f(\pi)$. Wyznaczyć współczynniki A_0, A_1 tak aby ta kwadratura była dokładna dla wszystkich funkcji postaci $f(x) = a + b\cos x$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pokaż, że dla wyznaczonych współczyników A_0, A_1 kwadratura jest również dokładna dla funkcji postaci

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(a_k \cos((2k+1)x) + b_k \sin(kx) \Big).$$

Zadanie 6.5

Całkę $I(f) = \int_0^2 xf(x)dx$, $f \in C([0,2])$, przybliżamy kwadraturą $S(f) = Af(0) + Bf(1) + Cf(2)$. Wyznaczyć współczynniki A, B, C tak aby rząd kwadratury S był jak największy. Podać ten rząd.

Zadanie 6.6

Pokazać, że kwadratura interpolacyjna oparta na N–węzłach jednokrotnych jest rzędu co najmniej N.

Zadanie 6.7

Całkę $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx$, $f \in C^1([a,b])$, przybliżamy kwadraturą Q opartą na informacji $f(a), f'\left(\frac{3a+b}{4}\right), f(b)$.
Wyznaczyć współczynniki kwadratury Q tak aby jej rząd był jak największy. Podać ten rząd.

Zadanie 6.8

Całkę $I(f) = \int\limits_a^b f(x)dx$, $f \in C^3([a,b])$, przybliżamy kwadraturą interpolacyjną Q opartą na informacji $N(f) = [f(a), f'(a), f(x_0)]$ dla pewnego $x_0 \in (a,b)$. Wyznaczyć taką wartość x_0, aby kwadratura Q miała maksymalny rząd. Wyznaczyć ten rząd.

Zadanie 6.9. *Zadanie Kuratowskiego* **- błąd asymptotyczny dla złożonej kwadratury prostokątów**

Niech $f \in C^1([a,b])$, $a < b$, i niech

$$\Delta_n = \int\limits_a^b f(x)dx - Q_n^P(f), \tag{25}$$

gdzie

$$Q_n^P(f) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k), \tag{26}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, $h = (b-a)/n$, $t_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \Delta_n = \frac{b-a}{2}(f(b) - f(a)). \tag{27}$$

Czy istnieją funkcje dla których zbieżność kwadratury jest szybsza niż n^{-1}?
(*1) Zaproponować zmodyfikowaną złożoną kwadraturę prostokątów $\tilde{Q}_n^P$ taką, że

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \left(\int\limits_a^b f(x)dx - \tilde{Q}_n^P(f)\right) = 0. \tag{28}$$

(*2) Zaimplementować złożoną kwadraturę prostokątów i przeprowadzić testy empirycznego tempa zbieżności.

7 Równania nieliniowe

Zadanie 7.1

Zbadaj zbieżność zmodyfikowanej metody siecznych

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{k+1} = x_k - \frac{x_k}{f(x_k)-f(0)} f(x_k) \end{cases}$$

zastosowanej dla równania $x^3 - 2 = 0$

Zadanie 7.2

Wykaż, że metoda Newtona

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k \in \mathbb{N} \tag{29}$$

zastosowana do równania $x^7 - a = 0$ $(a > 0)$ jest zbieżna do jego rozwiązania niezależnie od sposobu wyboru przybliżenia początkowego x_0.

Zadanie 7.3

Wykaż globalną zbieżność metody Newtona (29) stosowanej do wypukłej, rosnącej funkcji $f \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}$ mającej zero jednokrotne.
Wskazówka: wykorzystując równość $e_{k+1} = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} e_k^2$ pokaż monotoniczność oraz ortogonalność ciągu $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

Zadanie 7.4

Zakładając zbieżność poniższych metod iteracyjnych stosowanych do równania $f(\alpha) = 0$, wyznacz ich wykładniki zbieżności:

- $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$, $k \in \mathbb{N}$, gdzie $f'(x_0) \neq 0$;
- $x_{k+1} = x_k - r\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, $k \in \mathbb{N}$, gdzie r-krotność α jako zera funkcji f

Zadanie 7.5

Wykaż zbieżność lokalną metody iteracyjnej

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f^2(x_k) f''(x_k)}{2(f'(x_k))^2}$$

stosowanej do równania $f(\alpha) = 0$ (przyjmij dostateczną regularność funkcji f); wyznacz wykładnik zbieżności tej metody.

Zadanie 7.6

Wykaż twierdzenie o lokalnej zbieżności metody

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)}$$

gdzie $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x_k)}$, stosowanej do równania $f(\alpha) = 0, (f'(\alpha) \neq 0)$. Przyjmij dostateczną regularność funkcji f (jaka to regularność?).

8 Równania liniowe

Zadanie 8.1

Wykorzystując algorytm eliminacji Gaussa w dwóch wariantach:

- z wyborem elementu głównego w kolumnie
- bez wyboru elementu głównego

wyznacz dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jej rozkłady LU oraz P LU.

Zadanie 8.2

Do układu równań liniowych $Ax = b$ o macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{pmatrix}$$

gdzie $a \geq 1$, zastosowano metodę eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego w kolumnie.

- Wyznacz wskaźnik wzrostu elementu głównego, tj.

$$\gamma = \frac{\underset{i,j,k}{max}|a_{ij}^{(k)}|}{\underset{i,j}{max}|a_{ij}|},$$

  gdzie $A^(k) = [a_{ij}^{(k)}|]$ to macierz powstała z macierzy A w k–tym kroku zastosowanej metody.

- Wyznacz macierze trójkątne $L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wynikające z zastosowanej metody i dające rozkład $A = LU$.

Zadanie 8.3

Znajdź obraz wektora $(0, \ldots, 0, 1)^T$ przy elementarnym przekształceniu Householdera przeprowadzającym wektor$(1, \ldots, 0, 0)^T$ na kierunek wektora $(1, \ldots, 1, 1)^T$

Zadanie 8.4

Niech

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Wykorzystując algorytm Householdera wyznacz rozkład QR macierzy A, gdzie $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ jest macierzą ortogonalną, a $R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ jest macierz uogólnioną trójkątną górną, tj. $r_{ij} = 0$ dla $i > j$.
- Wykorzystując algorytm Grama–Schmidta wyznacz rozkład QR macierzy A, gdzie $Q \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ jest macierzą ortogonalną (tj. $Q^T Q = I_2$), a $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ jest macierz trójkątną górną.