Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica
w Krakowie
Wydział Matematyki Stosowanej

ANALIZA MATEMATYCZNA II

Andrzej Kałuża

February 28, 2024

0 Całka oznaczona - zastosowania

1. Pole figury płaskiej

(a) Niech Γ oznacza krzywą o prametryzacji $(x(t), y(t)),\ t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \in \mathcal{C}^1_{[t_1,t_2]}$ oraz $x'(t)y(t) \neq 0$ dla $t \in [t_1, t_2]$ (tj. x jest funkcją monotoniczną, a y ma stały znak). Wówczas pole P figury ograniczonej krzywą Γ, osią O_x oraz prostymi $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)| dt$$

(b) Niech Γ oznacza krzywą o prametryzacji $r = f(\theta)$, gdzie $f \geq 0$, gdzie $f \in \mathcal{C}_{[\alpha,\beta]}$ $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Wówczas pole P obszaru ograniczonego łukiem f oraz promieniami wodzącymi o amplitudach α, β wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(\theta)\big) d\theta$$

Zadanie 0.1. Oblicz pola figur ograniczonych podanymi krzywymi $a, b > 0$

(a) $y = x^2 - 6x + 7,\ y = 3 - x$

(b) $x(t) = a\cos(t),\ y(t) = b\sin(t);\ t \in [0, 2\pi]$

(c) $x(t) = a(2\cos(t) - \cos(2t)),\ y(t) = b(2\sin(t) - \sin(2t));\ t \in [0, 2\pi]$

(d) $r(\theta) = a\cos^2(\theta);\ \theta \in [0, \pi]$

(e) $r(\theta) = a(1 + \cos(\theta));\ \theta \in [0, 2\pi]$

2. Długość krzywej

(a) Niech Γ oznacza krzywą bez punktów wielokrotnych o prametryzacji $(x(t), y(t)),\ t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x, y \in \mathcal{C}^1_{[t_1,t_2]}$. Wówczas długośc łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2} dt$$

(b) Niech Γ oznacza krzywą bez punktów wielokrotnych o prametryzacji $r = f(\theta)$, $f \in \mathcal{C}_{[\alpha,\beta]}$. Wówczas długośc łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f(t))^2 + (f'(t))^2} d\theta$$

Zadanie 0.2. Oblicz długośc podanych krzywych

(a) $f(x) = \sqrt{x};\ x \in [0, 1]$

(b) $x(t) = a\cos^3(t),\ y(t) = b\sin^3(t);\ t \in [0, 2\pi]$

(c) $r(\theta) = a(1 + \cos(\theta));\ \theta \in [0, \pi]$

3. Objętość bryły obrotowej

Niech Γ oznacza krzywą o prametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x, y \in \mathcal{C}^1_{[t_1,t_2]}$ oraz $x'(t)y(t) \neq 0$ i $y(t) \neq 0$ dla $t \in [t_1, t_2]$ (tj. x jest funkcją monotoniczną, a y stałego znaku). Wówczas objętość bryły obrotowej powstałej prze obrót Γ dookoła osi O_x w przedziale $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt$$

4. Pole powierzchni bryły obrotowej

Niech Γ oznacza krzywą o prametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x, y \in \mathcal{C}^1_{[t_1,t_2]}$ oraz $x'(t)y(t) \neq 0$ i $y(t) \geq 0$ dla $t \in [t_1, t_2]$ (tj. x jest funkcją monotoniczną, a y dodatnia). Wówczas pole powierzchi bryły obrotowej powstałej prze obrót Γ dookoła osi O_x w przedziale $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2}dt$$

Zadanie 0.3. Wyzanacz objętosc oraz pole powierzchni (całkowitej) podanych figur:

(a) kuli o promieniu R

(b) walca o wysokości h i promieniu R

(c) stożka o wysokości h i promieniu R

(d) stożka ściętego o promieniach podstaw r i R i wysokości h

Zadanie 0.4. Oblicz pola powierzchni i (objętości) powstałych prze obrót dookoła osi O_x krzywych o równaniu:

(a) $y^2 = 4ax,\ 0 \leq x \leq 3a$;

(b) $x^2 + (y - b)^2 = a^2 (a < b)$

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

(d) $x(t) = a(2\cos(t) - \cos(2t)),\ y(t) = a(2\sin(t) - \sin(2t));\ t \in [0, \pi]$

(e) $x(t) = a(2\cos(t) + t\sin(t)),\ y(t) = a(\sin(t) - t\cos(t));\ t \in [0, \pi]$

1 Granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1.1. Pokaż, że funkcja $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ jest metryką w $\mathcal{R}^2$

Zadanie 1.2. Oblicz granicę ciągu:

(a) $x_n = \left(\frac{n^2 cos(n!)}{n^3+2n}, (1 + \frac{1}{n})^{2n-3}, \sqrt{4n^2 + 3n - 2} - 2n\right)$

Zadanie 1.3. Wyznacz lub uzasadnij, że nie istnieją granice poniższych funkcji:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(xy)}{xy^2}$

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$

(f) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} (x^y + y)^{1/y}$

(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$

Zadanie 1.4. Zbadaj ciagłość w całej dziedzinie funkcji:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x \neq (0,0) \\ 0, & x = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & x \neq (0,0) \\ 0, & x = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{sin(x^2+y^2)}{e^{x^2+y^2}-1}, & x \neq (0,0) \\ 0, & x = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin|x+y|}{|x|+|y|}, & x \neq (0,0) \\ 0, & x = (0,0) \end{cases}$

Zadanie 1.5. Oblicz granice iterowane oraz granicę funkcji. Co możemy powiedzięc na temat granicy funkcji majac granicę iterowane?

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}$

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) \frac{xy}{x^2+y^2}$

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin(\frac{1}{y})$

2 Podstawowe zadania z rachunku różniczkowego funkcji wielu ziennych, różniczkowaniu złożenia i różniczkowaniu funkcji odwrotnej)

2.1 Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Zadanie 2.1. Pokaż że funkcja f ma w punkcie $(0,0)$ pochodne kieurnkowe w dowolnym kierunku, ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & x \neq (0,0) \\ 0, & x = (0,0) \end{cases}$

Zadanie 2.2. Pokaż że funkcja f ma w punkcie $(0,0)$ pochodne cząstkowe, ale nie jest nawet ciągła w tym punkcie.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

Zadanie 2.3. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x \neq (0,0) \\ 0, & x = (0,0) \end{cases}$

Zadanie 2.4. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach oraz kierunkach:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, (x_0, y_0) = (1,-1), \vec{v} = (-3,-4);$

(b) $f(x,y) = x \ln y + y \ln x, (x_0, y_0) = (1,1), \vec{v} = (1,0);$

(c) $f(x,y) = |x-y|, (x_0, y_0) = (1,1), \vec{v} = (3,4);$

(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2xxy + 1, (x_0, y_0) = (1,2), \vec{v} = (3,-1);$

(e) $f(x,y) = 2|x| + |y|, (x_0, y_0) = (0,0), \vec{v} = (1,1);$

(f) $f(x,y,z) = ln(x^2+y^2+z^2), (x_0, y_0, z_0) = (-2,1,2), \vec{v} = (1,2,2)$

Zadanie 2.5. Oblicz przybliżoną wartośc

(a) $\frac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{1.05}}}$

Zadanie 2.6. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

(a) $f(x,y) = arctg(y/x)$ w punkcie $(1,1)$

Zadanie 2.7. Wyznacz macierz Jacobiego i jakobian odwzorowania

$(r, \phi, \psi) \to (x(r, \phi, \psi), y(r, \phi, \psi), z(r, \phi, \psi))$, gdzie $x = r \sin\psi \cos\phi, y = r \sin\psi \sin\phi, z = r \cos\psi$.

Zadanie 2.8. Oblicz pochodną $z'(t)$ funkcji złożonej

(a) $z = e^{x-2y}$ gdzie $x = \sin t, y = t^3$

(b) $z = \frac{y}{x}$ gdzie $x = e^t, y = 1 - e^{2t}$

Zadanie 2.9. Oblicz pochodne cząstkowe z'_u, z'_v funkcji złożonej

(a) $z = x^2y - xy^2$ gdzie $x = u + v, y = u - v$

(b) $z = \frac{x^2}{y}$ gdzie $x = u^2 - 3v, y = \sqrt{uv}$

Zadanie 2.10. Rozwiąż równanie różniczkowe cząstkowe

(a) $yz'_x - xz'_y = 0$, gdzie $z = z(x, y)$, przyjmując nowe zmienne $u = x, v = x^2 + y^2$.

Zadanie 2.11. Sprawdź, czy funkcja $f(x, y)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w $\mathbb{R}^2$. Jeśli tak, to oblicz różniczkę zupełną 2–go rzędu $\partial^2 f$.

(a) $f(x, y) = e^{x+y}$

Zadanie 2.12. Dana jest funkcja $f(x, y)$. Sprawdź, czy pochodne mieszane tej funkcji w punkcie $(0, 0)$ są sobie równe.

(a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & x \neq (0,0) \\ 0, & x = (0,0) \end{cases}$

2.2 Ekstrema lokalne, warunkowe, globalne

Zadanie 2.13. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$;

(b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;

(c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(d) $f(x, y) = x^3 - y^3 + 1$;

(e) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$;

(f) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$

(g) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$,

(h) $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$;

(i) $f(x, y, z) = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.

(j) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4x + 2z^2$.

Zadanie 2.14. Wyznacz, korzystając z metody Lagrange'a, ekstrema warunkowe podanych funkcji przy zadanych warunkach:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2$ przy warunku $2x^2 + y^2 = 4$;

(b) $f(x, y) = x + y$ przy warunku $e^{x+y} - xy - 1 = 0$;

(c) $f(x,y) = y - \ln x$ przy warunku $x^2 + (y-2)^2 - 2 = 0$

(d) $f(x,y) = x + 2y$ przy warunku $x^2 + y^2 = 5$;

(e) $f(x,y) = x + y$ przy warunku $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$,

(f) $f(x,y,z) = xyz$ przy warunku $x + y + z = 1$;

(g) $f(x,y,z) = x + y + 2z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

(h) $f(x,y,z) = x + y + z$ przy warunku $xyz = 1$.

Zadanie 2.15. Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji f na podanym obszarze:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $|x| + |y| \leq 2$;

(b) $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ w trójącie ograniczonym osiami O_x, O_y oraz prostą $x + y = 2\pi$;

(c) $f(x,y) = xy$. $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

(d) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$ w trójkącie domkniętym o wierzchołkach $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$;

(e) $f(x,y,z) = x + y + z$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

Zadanie 2.16

Liczbę dodatnią a przedstaw w postaci sumy takich trzech składników dodatnich, aby ich iloczyn był największy.

Zadanie 2.17

Na powierzchni sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ znajdź punkt dla którego suma kwadratów odległości od punktów $P_i(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, n$, jest najmniejsza.

2.3 Funkcje uwikłane

Zadanie 2.18

Pokaż, że równanie $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ określa funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w otoczeniu punktu $(1,0)$. Oblicz $y'(1)$. Wyznacz wzór funkcji $y(x)$.

Zadanie 2.19

Oblicz pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg \frac{y}{x}$.

Zadanie 2.20. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem:

(a) $x^4 + y^2 - 4xy = 0$,

(b) $xy^2 - x^2 y = 2a^3$, gdzie a jest parametrem.

Zadanie 2.21

Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$ danej równaniem $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ w punkcie $(1, -2), (z = 1)$.

Zadanie 2.22

Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$ danej równaniem
$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$.

3 Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych, całka iterowana, twierdzenie o zamianie zmiennych

Zadanie 3.1. Oblicz całki:

(a) D jest ograniczony krzywymi $y = \frac{1}{x}$, $y = x, x = 2$

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy;$$

(b)

$$\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln{(1 + x^2 + y^2)} dy, ?$$

(c) D jest ograniczony krzywa $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy;$$

(d)

$$\int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz$$

(e) V jest ograniczony $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2,\ z \geq 0,$

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dv$$

Zadanie 3.2. Znaleźć środek ciężkości jednorodnej figury ograniczonej krzywymi:

(a) $y = lnx, y = 0, x = e.$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$

Zadanie 3.3

Znaleźć moment bezwładności jednorodnego:

(a) kwadratu o boku a względem wierzchołka;

(b) sześcianu o boku a względem wierzchołka;

(c) sześcianu o boku a względem osi O_x;

Zadanie 3.4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

(a) $x^2+y^2+z^2=2az, x^2+y^2=z^2(z^2 \geq x^2+y^2)$

(b) $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^2=(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2})$

(c) $x^2+y^2-2y=0, z=x^2+y^2, z=0;$

Zadanie 3.5. Oblicz masę

(a) półkuli wydrążonej o promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym $R>r$, jeżeli gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od środka kuli.

(b) kuli o promieniu R, której gęstość masy w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od ustalonej średnicy.

(c) bryły ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2+z^2=8, z=\sqrt{x^2+y^2}$ (dla $z>0$), jeżeli jej objętościowa gęstość masy wyraża się wzorem $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.

(d) powierzchni $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $(z \leq 1)$ jeśli $\rho(x,y,z)=z$.

Zadanie 3.6. Oblicz pole

(a) płata powierzchniowego wyciętego walcem $x^2+y^2=a^2$ ze sfery $x^2+y^2+z^2=r^2, 0<a<r$.

(b) płata wyciętego z powierzchni $z=1-x^2-y^2$ przez walec $x^2+y^2=1$.

4 Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

Zadanie 4.1. Oblicz (całka krzywoliniowa zorientowana)

(a) Niech AB bedzie łukiem paraboli $y^2 = x$ od $A(1,1)$ do $B(4,2)$.

$$\int_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy.$$

(b) Niech K bedzie pierwszym łukiem cykloidy w kierunku zgodnym ze wzrostem parametru t.

$$\int_K (2a - y)dx + xdy.$$

(c) Niech K bedzie zadana w postaci parametrycznej $x = R\cos t$,$y = R\sin t$,$z = at/2\pi$,$t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_K yzdx + 2xdy + xydz.$$

(d)

$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy.$$

Zadanie 4.2. Oblicz (całka krzywoliniowa nieskierowana)

(a) Niech K będzie odcinkiem o koncach $A(0,0,0)$ $B(a,b,c)$

$$\int_K (ax^2 + by^2 + cz^2)dl.$$

(b) Niech K będzie zdefinoowana w następujacy sposób $K : x = \ln(1 + t^2), y = 2arctgt - t + 3, t \in [0,1]$

$$\int_K ye^{-x}dl.$$

(c) Niech $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - x + 2 = 0, x \in [0,4]\}$

$$\int_K x - ydl.$$

(d) Niech K będzie krzywą powstałą w wyniku przecięcia się powieżchni $4z^2 = x^2+y^2$ oraz $x^2+y^2+5z^2 = 9$ (dla $z \geq 0$).

$$\int_K dl.$$

Zadanie 4.3. Oblicz (twierdzenie Greena)

(a) Niech K bedzie zorientowana dodatnio $K: x^2+y^2=ax$,

$$\int_K (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy.$$

(b) Niech K bedzie brzegiem obszaru $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,e], 0\leq y\leq \ln x\}$.

$$\int_K \sqrt{x^2+y^2}dx+y\big(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\big)dy$$

(c) Niech $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2, x^2\leq y\leq e^x\}$.

$$\int_D x^2+y^2dy$$

(d) Niech K bedzie krzywą $x(t)=\sin t,\ y(t)=\frac{2\arctan(\log_3(2\sin^2 t+1))}{\sin t+1}$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ zorientowaną od punktu $(0,0)$ do $(1,\frac{\pi}{4}$.

$$\int_K xydx+\big(\frac{1}{2}x^2+\cos y\big)dy$$

Zadanie 4.4. Oblicz (całka powierzchniowa zorientowana)

(a) Niech S będzie dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z=\sqrt{x^2-y^2},\ x^2+y^2\leq 1$

$$\iint_S ydydx-xdzdx+xydxdy.$$

(b) Niech S będzie dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z=x+y,\ x\leq 1,\ y>1,\ x+y<4$.

$$\iint_S \ln xdydx+\ln ydzdx+\ln zdxdy.$$

(c) Niech S będzie dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z=2\sqrt{x^2+4y^2},\ x^2+4y^2\leq 4$

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)^2dydz.$$

(d) Niech S będzie dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $x^2+y^2+z^2=9,\ z\geq\sqrt{5}$

$$\iint_S xy-x^2ydydx+y^2zdzdx-(z-x)ydxdy.$$

Zadanie 4.5. Oblicz (całka powierzchniowa niezorientowana)

(a) Niech S będzie zdefinoowana w następujacy sposób $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\iint_S (x^2 + y^2) dS.$$

(b) Niech S będzie częścią powieżchni $z = \frac{1}{2}y^2$ zawartą między powieżchniami $|x| + |y| = 2,\ z = 0,$

$$\iint_S x^2\sqrt{1+2z} dS.$$

(c) Niech S będzie czworościanem ograniczonym płaszczyznami $x + y + z = 1,\ 2x = 1,\ 2y = 1, 2z = 1,$

$$\iint_S z dS.$$

(d) Niech S będzie częścią powierzchni $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ zawartą w walcu $x^2 + y^2 = 5$

$$\iint_S \arctan(x^2 + y^2 + z^2 - 8) dS.$$

Zadanie 4.6. Oblicz (tw Stokesa, tw Gaussa-Ostrogradzkiego)

(a) Niech C będzie dodatnio zorientowanym brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

$$\oint_C xz^2 dx + zy^2 dy + yz^2 dz$$

(b) Niech S będzie wewnętrzną stroną powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

$$\iint_S xydydx + yzdzdx + xzdxdy.$$

(c) Niech C będzie ujemno zorientowaną krzywą powstałą w wyniku przeciecia walca $x^2 + y^2 = 4$ i płaszczyzny $x + y + z = 1$

$$\oint_C (x + y)dx + \sin(y + z)dy + \cos z dz$$

(d) Niech S będzie brzegiem czworościanu o wierzchołkach $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$ zorientowanym dotatnio

$$\iint_S (x + y + z)dxdz.$$

5 Szeregi liczbowe

Zadanie 5.1. Pokaż, że szereg jest zbieżny i oblicz jego sumę

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

Zadanie 5.2. Sprawdź czy następujące szeregi są zbieżne

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} ln(1+\frac{1}{n})$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!2^n}{n^{2n}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos^2(\frac{\pi n}{3})}{2^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(\frac{\pi n}{3})}{2^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n lnn}{n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nln^2n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+3n-2}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2e^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^n$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{2n+1})^{n^2} 2^n$

6 Ciągi funcyjne i Szeregi funkcyjne

Zadanie 6.1. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego:

(a) $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$ na $\mathbb{R}$

(b) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ na $[0,1]$

(c) $f_n(x) = \frac{nx}{n+n^\alpha x^2}$ na $[0,1]$, $\alpha \in \{2,4\}$

(d) $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ na $[0,1]$

(e) $f_n(x) = arctgnx$ na $\mathbb{R}$

(f) $f_n(x) = arctgnx$ na
$A_a = (-\infty, a] \cup [a, +\infty)$

Zadanie 6.2. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu funkcyjnego:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$ na $\mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ na $[a,\infty), a > 0$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ na $[0,1]$

Zadanie 6.3. Zbadaj obszar zbieżności i wyznacz sumę szeregu potęgowego:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}x^{2n}}{(n+1)4^n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}$???

Zadanie 6.4. Wyznacz sumę szeregu:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{3^n}$

7 Szeregi Taylora, Fouriera, Trygonometryczne

Zadanie 7.1. Rozwiń w szereg Taylora funkcję f(x) w otoczeniu punktu x_0:

(a) $f(x) = \ln x$ w $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$ w $x_0 = 0$

(c) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ w $x_0 = 0$

(d) $f(x) = e^{-x^2}$ w $x_0 = 0$

(e) $f(x) = e^x$ w $x_0 = 2$

(f) $f(x) = \sin^2 x$ w $x_0 = 0$

(g) $f(x) = e^x \sin x$ w $x_0 = 0$

Zadanie 7.2

(a) Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi, 0) \\ x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$

(b) narysuj wkres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

(c) kożystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$

Zadanie 7.3

(a) Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x^2$ dla $x \in [-\pi, \pi]$

(b) narysuj wkres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

(c) kożystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$

(d) kożystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$

Zadanie 7.4

(a) Rozwiń w szereg sinusów funkcję $f(x) = \frac{\pi}{4}$ dla $x \in (0, \pi)$

(b) narysuj wkres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$

(c) kożystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$