Model Blacka - Scholesa

1 Ćwiczenia

Zadanie 1. Niech $X = \int_a^b |W(t)|dW(t)$, $0 \le a < b$, i $Y = \int\limits_0^T (W(t)-t)dW(t)$. Obliczyć $Var(X)$ i $Var(Y)$.

Zadanie 2. Niech $X = \int_a^b f(t)[\sin(W(t)) + \cos(W(t))]dW(t),\ f \in L^2([a,b]),\ 0 \le a < b$. Obliczyć $Var(X)$.

Zadanie 3. Czy proces

$$X_t = \int\limits_0^t e^{t-s} dW_s, \tag{1}$$

jest martyngałem? Odpowiedź uzasadnij. Oblicz $Cov(X_t, X_s)$ dla $t, s \ge 0$.

2 Ćwiczenia

Zadanie 4. Niech $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $0 \le a < b$ będzie funkcją ciągłą o skończonym wahaniu ($V_a^b(h,1) < +\infty$). Udowodnij, że wtedy

$$\int\limits_a^b h(t)dW_t = h(t)W_t\Big|_a^b - \int\limits_a^b W_t dh(t). \tag{2}$$

Zadanie 5. Korzystając z definicji całki Itô pokazać, że

$$\int\limits_0^T t dW(t) = TW(T) - \int\limits_0^T W(t)dt. \tag{3}$$

Wsk. $c(b-a) = (db - ca) - b(d-c)$.

Zadanie 6. Korzystając z definicji całki Itô pokazać, że

$$\int\limits_0^T W^2(t)dW(t) = \frac{1}{3}W^3(T) - \int\limits_0^T W(t)dt. \tag{4}$$

Wsk. $a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$.

Zadanie 7. Niech $t_i^n = \frac{iT}{n}$, obliczyć lub pkażać że

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \big(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\big)^2 = T \text{ w } L^2(\Omega). \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_i^n)\big(W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\big) =? \text{ w } L^2(\Omega). \tag{6}$$

Zadanie 8. Korzystając z definicji całki Itô pokazać, że

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T. \tag{7}$$

Zadanie 9. Udowodnij, że całka stochastyczna z procesu $f \in \mathcal{M}^2_{[0,T]}$ nie zależy od wyboru ciągu procesów prostych $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aproksymującego f.

3 Ćwiczenia

Zadanie 10. Niech $X = \int_0^3 W^2_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor} dW(t)$ obliczyć $Var(X)$. Czy wyrażenia $\int_0^1 W^2_{\lceil \frac{t}{2} \rceil} dW(t)$ i $\int_a^b W_{t^2} dW(t)$ mają sens, jeżeli tka to dla jakich parametrów.

Zadanie 11. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $\int_0^t W_s \cos(t-s)ds$, $t \geq 0$.

Zadanie 12. Niech $k \in C^1([0,+\infty))$ będzie funkcją taką, że $k(0) = 0$. Udowodnij, że zmienna losowa $\int_0^t k'(t-s)W_s ds$ ma rozkład normalny o średniej zero i wariancji równej $\int_0^t (k(u))^2 du$, dla każdego ustalonego $t \geq 0$.

Zadanie 13. Wyznaczyć te wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ dla których

$$\int_0^1 \varepsilon^{-\lambda} e^{-W_t^2/(2\varepsilon)} dW_t \to 0, \text{ w } L^2(\Omega), \tag{8}$$

gdy $\varepsilon \to 0^+$.

Zadanie 14. Niech $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnić, że dla $t \in [0,T]$

$$\mathbb{E}\left(e^{\int_0^t g(s)dW_s}\right) = e^{\frac{1}{2}\int_0^t (g(s))^2 ds}. \tag{9}$$

Zadanie 15. Udowodnij, że dla każdego $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \frac{W(s)}{\epsilon} \mathbf{1}_{(-\epsilon,\epsilon)}(W(s))dW(s) \to 0, \tag{10}$$

w $L^2(\Omega)$, gdy $\epsilon \to 0$.

4 Ćwiczenia

Zadanie 16. Niech $W_1(t)$ i $W_2(t)$ będą dwoma niezależnymi procesami Wienera oraz niech $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ będzie podziałem $[a,b]$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^n (W_1(t_i) - W_1(t_{i-1}))(W_2(t_i) - W_2(t_{i-1})) \to 0, \tag{11}$$

w $L^2(\Omega)$ jeśli $||\Delta_n|| = \max_{1\leq i\leq n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Zadanie 17. Niech $f : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją dwóch zmiennych. Zakładamy ponadto, że istnieje stała $L > 0$ taka, że dla wszystkich $t, s_1, s_2 \in [0,T]$

$$|f(s_1,t) - f(s_2,t)| \leq L|s_1 - s_2|. \tag{12}$$

Udowodnić, że proces $\psi(s) = \int\limits_0^T f(s,t)dW_t,\ t \in [0,T]$, ma ciągłą modyfikację oraz, że

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^T f(s,t)dsdW_t = \int\limits_0^T \int\limits_0^T f(s,t)dW_t ds. \tag{13}$$

Zadanie 18. Niech $f, g \in \mathcal{M}^2_{[0,T]}$ i $f = g - d\mathbb{P} \times dt$ p.w. Pokaż, że

$$\int\limits_0^T f(t)dW_t = \int\limits_0^T g(t)dW_t \quad d\mathbb{P} - p.n. \tag{14}$$

Zadanie 19. Załóżmy, że $f, g \in \mathcal{M}^2_{[a,b]}$, $0 \leq a < b$, oraz, że dla pewnych stałych C, D zachodzi równość

$$C + \int\limits_a^b f(t)dW_t = D + \int\limits_a^b g(t)dW_t. \tag{15}$$

Udowodnić, że wtedy $C = D$ oraz $f = g - d\mathbb{P} \times dt$ p.w.

Zadanie 20. Niech $f \in \mathcal{M}^2_{[a,b]}$, $0 \leq a < b$, oraz niech A będzie zdarzeniem $\mathcal{F}_a$–mierzalnym. Korzystając z izometrii Itô pokazać, że

$$\mathbf{1}_A \int\limits_a^b f(t)dW_t = \int\limits_a^b \mathbf{1}_A f(t)dW_t. \tag{16}$$

5 Ćwiczenia

Zadanie 21. Zachowanie się cen S_t na giełdzie jest modelowane procesem $S_t = \exp(\mu t + \sigma W_t)$, gdzie μ oraz $\sigma \neq 0$ są ustalonymi parametrami.

(a) Dla $x > 0$ wyznacz $\mathbb{P}(S_t \leq x)$.

(b) Znajdź medianę S_t oraz $\mathbb{E}(S_t)$.

(c) Znajdź taki warunek na μ oraz σ, aby proces S_t był martyngałem względem filtracji naturalnej procesu Wienera W. Następnie, przy tym warunku, uzasadnij czy opłacalna jest długoterminowa inwestycja na giełdzie tego typu.

Zadanie 22. Niech $(W_t)_{t\geq 0}$ będzie procesem Wienera i niech $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ będzie jego filtracją naturalną. Niech

$$S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t}, \tag{17}$$

gdzie $S_0, \sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ i niech $(\mathcal{F}_t^S)_{t\geq 0}$ będzie filtracją naturalną procesu $(S_t)_{t\geq 0}$. Udowodnij, że $\mathcal{F}_t^S = \mathcal{F}_t^W$ dla każdego $t \geq 0$.

Zadanie 23. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d((W(t))^n) = \frac{n(n-1)}{2}(W(t))^{n-2}dt + n(W(t))^{n-1}dW(t). \tag{18}$$

Uzasadnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces $((W(t))^n)_{t\in[0,T]}$ należy do $\mathcal{M}^2_{[0,T]}$.

Zadanie 24. Niech $X_t = e^t \cos(W_t)$, $Y_t = e^t \sin(W_t)$, $Z_t = e^{2t}$. Pokaż, że wektor kolumnowy $V_t = [X_t, Y_t, Z_t]$ spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$dV_t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V_t dW_t + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} V_t dt, \tag{19}$$

z warunkiem początkowym $V_0 = [1, 0, 1]$.

Zadanie 25. Rozważmy proces $X_t = [X_t^1, X_t^2]$ (wektor kolumnowy), gdzie

$$X_t^1 = a\cos(W_t),$$
$$X_t^2 = b\sin(W_t),$$

gdzie $a, b > 0$ oraz W jest jednowymiarowym procesem Wienera. Korzystając z formuły Itô pokaż, że proces X spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \begin{bmatrix} 0 & -a/b \\ b/a & 0 \end{bmatrix} X_t dW_t, \tag{20}$$

z warunkiem początkowym $X_0 = [a, 0]$.

Zadanie 26. Rozważmy proces Itô

$$dX(t) = a_X(t)X(t)dt + b_X(t)X(t)dW(t). \tag{21}$$

Pokaż, że każdy z poniższych procesów jest procesem Itô i znajdź jego formę:

$$(a)\ Y(t) = \frac{1}{X(t)}, \quad (b)\ Z(t) = \ln(X(t)).$$

Zadanie 27. Niech

$$dX = a_X X dt + b_X X dW, \tag{22}$$

$$dY = a_Y Y dt + b_Y Y dW. \tag{23}$$

Pokaż, że każdy z poniższych procesów jest procesem Itô i znajdź jego postać:

$$(a)\ Z = XY, \quad (b)\ Z = Y/X.$$

Zadanie 28. (i) Niech $T > 0$ i niech dla funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ istnieje stała $K > 0$ taka, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|. \tag{24}$$

Udowodnij, że funkcja $\varphi : [0, T] \to \mathbb{R}$ określona wzorem $\varphi(t) = \mathbb{E}(g(W(t)))$ jest ciągła na $[0, T]$.

(ii) Korzystając z formuły Itô oblicz $\mathbb{E}(\sin(\sigma W_t))$ oraz $\mathbb{E}(\cos(\sigma W_t))$ dla $t > 0$ oraz $\sigma \neq 0$.

Zadanie 29. Niech W_1, W_2 będą niezależnymi procesami Wienera. Rozważmy procesy Itô postaci:

$$dX_1 = a_1 dt + \sigma_{11} dW_1 + \sigma_{12} dW_2, \tag{25}$$

$$dX_2 = a_2 dt + \sigma_{21} dW_1 + \sigma_{22} dW_2. \tag{26}$$

Korzystając z wielowymiarowej formuły Itô znajdź różniczkę stochastyczną dZ procesu $Z(t) = F(X_1(t), X_2(t))$ dla

$$(a)\ F(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad (b)\ F(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.$$

Zadanie 30. Rozwiąż Stochastyczne Równanie Różniczkowe korzystając z formuły Itô dla podanej funkcji.

1. $dX(t) = \frac{X(t)}{t+1} dt + \frac{-1}{t+1} dW(t)$, $X(0) = 0$. *Podpowiedź:* $F(t, x) = \frac{x}{t+1}$
2. $dX(t) = X^3(t)dt + X^2(t)dW(t)$, $X(0) = 1$. *Podpowiedź:* $F(t, x) = \frac{1}{1-x}$.
   Czy rozwiązanie istnieje w dowolnym przedziale czasowym
3. $dX(t) = (a - bX(t))dt + c\ dW(t)$, $X(0) = x_0$, $a, b, c \in \mathbb{R}_+, x_) \in \mathbb{R}$.*Podpowiedź:* $F(t, x) = e^{bt}x$.
4. $dX(t) = \frac{1}{2} b(X(t))b'(X(t))dt + b(X(t))dW(t)$. *Podpowiedź:* $F(t, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{b(s)} ds$, *gdzie* b *jest funkcją różniczkowalną.*
   Zastosuj podaną metodę dla funkcji $b(x) = x^3$.

6 Cwiczenia

Zadanie 31. Niech $b_X, b_Y \in \mathcal{P}^2_{[0,T]}$ i niech $X(t) = \int\limits_0^t b_X(s) dW(s)$, $Y(t) = \int\limits_0^t b_Y(s) dW(s)$, $t \in [0, T]$.

Udowodnij, że

$$[X, Y](t) = \int\limits_0^t b_X(s) b_Y(s) ds, \ t \in [0, T]. \tag{27}$$

Zadanie 32. Niech $(X(t))_{t\geq 0}$ i $(Y(t))_{t\geq 0}$ będą dwoma martyngałami względem pewnej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, całkowalnymi z kwadratem i o ciągłych trajektoriach. Udowodnij, że proces

$$X(t)Y(t) - [X, Y](t),\ t \geq 0, \tag{28}$$

też jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Zadanie 33. Korzystając z twierdzenia Levy'ego udowodnij, że proces

$$M_t = \int\limits_0^t sgn(W_s)dW_s,\ t \geq 0, \tag{29}$$

jest procesem Wienera względem filtracji naturalnej procesu $\{W_t\}_{t\geq 0}$.

Zadanie 34. Niech $W_t = [W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)}]$ będzie trójwymiarowym procesem Wienera oraz niech

$$Y_t = \int\limits_0^t \cos(W_s^{(3)})dW_s^{(1)} + \int\limits_0^t \sin(W_s^{(3)})dW_s^{(2)},\ t \in [0, T]. \tag{30}$$

Czy $\{Y_t\}_{t\in[0,T]}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera względem filtracji naturalnej procesu $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$?

Zadanie 35. Niech W_1, W_2 będą niezależnymi procesami Wienera. Udowodnij, że proces $X(t) = aW_1(t) + bW_2(t)$, $t \geq 0$, jest jednowymiarowym procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = 1$.

Zadanie 36. Niech $f \in \mathcal{M}^2_{[0,T]}$, $M(t) = \int_0^t f(s)dW(s)$. Udowodnij, że $M^2(t) - \int_0^t f^2(s)ds$ jest martyngałem.

Zadanie 37. Niech $b \in \mathcal{L}^2_{[0,T]}$, $M(t) = \exp(-\frac{1}{2}\int_0^t b^2(s)ds - \int_0^t b(s)dW(s))$. Udowodnij, że $M(t)$ jest martyngałem.

7 Ćwiczenia - Twierdzenie Girsanova

Zadanie 38. Niech $\{W(t)\}_{t\in[0,2]}$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Korzystając z twierdzenia Girsanova udowodnić, że proces $Y(t) = W(t)+t-t^3$ jest procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ z miarą probabilistyczną $\mathbb{Q}$ określoną następująco

$$\mathbb{Q}(A) = e^{-109/5} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big(\mathbf{1}_A \exp\Big\{11 \cdot W(2) - 6\int\limits_0^2 sW(s)ds\Big\}\Big),\ A \in \mathcal{F}. \tag{31}$$

Zadanie 39. Korzystając z twierdzenia Girsanova obliczyć $\mathbb{E}(W_t^3 e^{W_1 - \frac{1}{2}})$ oraz $\mathbb{E}(W_t^4 e^{W_1})$ dla $t \in (0, 1]$.

Zadanie 40. Niech $\{W(t)\}_{t\in[0,1]}$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Korzystając z twierdzenia Girsanova znajdź gęstość rozkładu $W(2/3)$ względem miary probabilitycznej $d\mathbb{Q} = e^{W(1)-\frac{1}{2}}d\mathbb{P}$.

Zadanie 41. Korzystając z twierdzenia Girsanova rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} dX_1(t) = X_2(t)dt + dW(t), \\ dX_2(t) = (X_1(t) - 1)dt, \end{cases} \tag{32}$$

gdzie $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera.

8 Ćwiczenia

Zadanie 42. Rozważmy następującą strategię: $x(t) = V(0)/S(0)$ dla $t \in [0, t_1)$, $x(t) = 2x(0)$ dla $t \in [t_1, t_2)$ i $x(t_2) = 0$, gdzie $V(0)$, $S(0)$ są znane, $0 < t_1 < t_2$–ustalone. Wyznaczyć proces y tak aby strategia $(x(t), y(t))$ była samofinansująca. W modelu Blacka–Scholesa z danymi μ, σ, r jakie jest prawdopodobieństwo, że $y(t_2) < 0$?

Zadanie 43. Obliczyć $\mathbb{E}(\tilde{S}(t)|\mathcal{F}_u^W)$, dla $0 \leq u < t$, gdzie $\tilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$,
$S(t) = S(0)exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma)t + \sigma W(t))$ oraz $\mathcal{F}_u^W = \sigma(W(u)|0 \leq u \leq t)$, $t \in [0, T]$.

Zadanie 44. Znajdź równania, które spełniają funkcje

$$t \to \mathbb{E}(S(t)), \tag{33}$$

$$t \to Var(S(t)), \tag{34}$$

gdzie proces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ spełnia równanie

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \tag{35}$$

$$S(0) = S_0 > 0. \tag{36}$$

Zadanie 45. Rozważmy alternatywny model, w którym ceny akcji opisuje proces Ornsteina–Uhlenbecka $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ spełniający równanie

$$dS_1(t) = \mu_1 S_1(t)dt + \sigma_1 dW(t). \tag{37}$$

(i) Korzystając z formuły Itô rozwiąż równanie (37).

(ii) Znajdź równanie jakie spełnia proces $\{S_1^2(t)\}_{t\geq 0}$.

(iii) Znajdź prawdopodobieństwo zdarzenia, że w pewnym momencie $t_1 > 0$ cena akcji będzie ujemna, tzn.: obliczyć $\mathbb{P}(S_1(t_1) < 0)$.

Zadanie 46. Niech X i Y będą dwoma procesami Itô postaci

$$dX(t) = a_X(t)dt + b_X(t)dW_t,$$
$$dY(t) = a_Y(t)dt + b_Y(t)dW_t, \quad t \geq 0,$$

gdzie $\{W_t\}_{t\geq 0}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera. Stosując formułę Itô do $(X(t) - Y(t))^2$, udowodnij, że jeżeli $X = Y$, to wtedy $a_X = a_Y$ oraz $b_X = b_Y$.

Zadanie 47. Rozważmy model rynku, w którym ceny akcji i bonu mają dynamikę:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,\ \ \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \tag{38}$$
$$dB_t = rB_t dt,\ \ r \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

Pokaż, że cena w momencie t opcji europejskiej, o momencie wygaśnięcia T i wypłacie $h(S_T)$, wynosi $f(t, S_t)$ gdzie $f = f(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego cząstkowego:

$$f_t(t, x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t, x) - rxf_x(t, x) + rf(t, x),\ \ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \tag{40}$$
$$f(T, x) = h(x),\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{41}$$

Zadanie 48. Rozważmy model rynku, w którym ceny akcji i bonu mają dynamikę:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \tag{42}$$
$$dB_t = r(t, S_t)B_t dt, \tag{43}$$

gdzie współczyniki $\mu, \sigma, r : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są takie, że powyższe stochastyczne równanie różniczkowe ma dokładnie jedno rozwiązanie. Pokaż, że cena w momencie t opcji europejskiej, o momencie wygaśnięcia T i wypłacie $h(S_T)$, wynosi $f(t, S_t)$ gdzie $f = f(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego cząstkowego:

$$f_t(t, x) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t, x) f_{xx}(t, x) - r(t, x)xf_x(t, x) + r(t, x)f(t, x),\ \ (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \tag{44}$$
$$f(T, x) = h(x),\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

Zadanie 49. (i) Znajdź rozwiązania równania (40) z Zadania 47 postaci

$$f(t, x) = \phi(x), \quad f(t, x) = \psi(t). \tag{46}$$

Z jakimi warunkami końcowymi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ możesz rozwiązać równanie (40), jeśli rozwiązania szukasz w postaci $f(t, x) = \phi(x) + \psi(t)$?

(ii) Znajdź rozwiązania równania (40) z Zadania 47 postaci $f(t, x) = \psi(t)\phi(x)$. Z jakimi warunkami końcowymi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ możesz teraz rozwiązać równanie (40)?

Zadanie 50. Z jakim warunkiem końcowym $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $f(t,x) = x - Ke^{-r(T-t)}$, $K \in \mathbb{R}$, spełnia równanie (40)? Korzystając z wyznaczonego h udowodnij formułę Put–Call Parity

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)},\ t \in [0,T], \tag{47}$$

dla europejskiej opcji *put* $P_t = (K - S_t)^+$ i *call* $C_t = (S_t - K)^+$ o terminach wygaśnięcia T.

Zadanie 51. Rozważmy model, w którym akcja wypłaca dywidendę w stałym tempie, które jest proporcjonalne do ceny akcji. Tzn. jeśli mamy a_t jednostek akcji w przedziale czasu $t \in [\alpha, \beta]$, wówczas całkowita kwota z tytułu dywidendy wynosi

$$r_D \int_{\alpha}^{\beta} a_t S_t dt, \tag{48}$$

gdzie stała r_D jest nazywana stopą dywidendy (*dividend yield*). Model (38) należy wówczas zmodyfikować następująco:

$$dS_t = (\mu - r_D)S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{49}$$

Pokaż, że cena w momencie t opcji europejskiej, o momencie wygaśnięcia T i wypłacie $h(S_T)$, wynosi $f(t, S_t)$ gdzie $f = f(t,x) \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego cząstkowego:

$$\begin{aligned} &f_t(t,x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t,x) - (r - r_D)x f_x(t,x) + rf(t,x),\ (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}, \\ &f(T,x) = h(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zadanie 52. Rozważmy model rynku, w którym ceny akcji i bonu spełniają równania

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t,\ \sigma \in \mathbb{R}_+, \tag{50}$$

$$dB_t = r_t B_t dt, \tag{51}$$

gdzie krótka stopa procentowa $r = r_t$ jest nie losową funkcją ciągłą. Rozważmy opcję, która w momencie T wypłaca S_T^n, $n \in \mathbb{N}$. Przyjmując, że cena opcji w momencie $t \in [0,T]$ wynosi $h(t,T)S_t^n$, dla pewnej funkcji $h(t,T)$ różniczkowalnej w sposób ciągły ze względu na t, znajdź równanie różniczkowe jakie spełnia funkcja $h(t,T)$ ze względu na zmienną t i rozwiąż je.