

Model Blacka - Scholesa

1 Ćwiczenia

Zadanie 1. Niech $X = \int_a^b |W(t)|dW(t)$, $0 \leq a < b$, i $Y = \int_0^T (W(t) - t)dW(t)$. Obliczyć $Var(X)$ i $Var(Y)$.

Zadanie 2. Niech $X = \int_a^b f(t)[\sin(W(t)) + \cos(W(t))]dW(t)$, $f \in L^2([a, b])$, $0 \leq a < b$. Obliczyć $Var(X)$.

Zadanie 3. Czy proces

$$X_t = \int_0^t e^{t-s}dW_s, \quad (1)$$

jest martyngałem? Odpowiedź uzasadnij. Oblicz $Cov(X_t, X_s)$ dla $t, s \geq 0$.

2 Ćwiczenia

Zadanie 4. Niech $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ będzie funkcją ciągłą o skończonym wahanu ($V_a^b(h, 1) < +\infty$). Udowodnij, że wtedy

$$\int_a^b h(t)dW_t = h(t)W_t \Big|_a^b - \int_a^b W_t dh(t). \quad (2)$$

Zadanie 5. Korzystając z definicji całki Itô pokazać, że

$$\int_0^T t dW(t) = TW(T) - \int_0^T W(t)dt. \quad (3)$$

Wsk. $c(b-a) = (db-ca) - b(d-c)$.

Zadanie 6. Korzystając z definicji całki Itô pokazać, że

$$\int_0^T W^2(t)dW(t) = \frac{1}{3}W^3(T) - \int_0^T W(t)dt. \quad (4)$$

Wsk. $a^2(b-a) = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - a(b-a)^2 - \frac{1}{3}(b-a)^3$.

Zadanie 7. Niech $t_i^n = \frac{iT}{n}$, obliczyć lub pkazać że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 = T \text{ w } L^2(\Omega). \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = ? \text{ w } L^2(\Omega). \quad (6)$$

Zadanie 8. Korzystając z definicji całki Itô pokazać, że

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T. \quad (7)$$

Zadanie 9. Udowodnij, że całka stochastyczna z procesu $f \in \mathcal{M}_{[0,T]}^2$ nie zależy od wyboru ciągu procesów prostych $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aproksymującego f .

3 Ćwiczenia

Zadanie 10. Niech $X = \int_0^3 W_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^2 dW(t)$ obliczyć $Var(X)$. Czy wyrażenia $\int_0^1 W_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^2 dW(t)$ i $\int_a^b W_{t^2} dW(t)$ mają sens, jeżeli tak to dla jakich parametrów.

Zadanie 11. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $\int_0^t W_s \cos(t-s)ds, t \geq 0$.

Zadanie 12. Niech $k \in C^1([0, +\infty))$ będzie funkcją taką, że $k(0) = 0$. Udowodnij, że zmienna losowa $\int_0^t k'(t-s)W_s ds$ ma rozkład normalny o średniej zero i wariancji równej $\int_0^t (k(u))^2 du$, dla każdego ustalonego $t \geq 0$.

Zadanie 13. Wyznaczyć te wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ dla których

$$\int_0^1 \varepsilon^{-\lambda} e^{-W_t^2/(2\varepsilon)} dW_t \rightarrow 0, \text{ w } L^2(\Omega), \quad (8)$$

gdy $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Zadanie 14. Niech $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Udowodnić, że dla $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}\left(e^{\int_0^t g(s)dW_s}\right) = e^{\frac{1}{2} \int_0^t (g(s))^2 ds}. \quad (9)$$

Zadanie 15. Udowodnij, że dla każdego $t \in [0, T]$

$$\int_0^t \frac{W(s)}{\varepsilon} \mathbf{1}_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(W(s)) dW(s) \rightarrow 0, \quad (10)$$

w $L^2(\Omega)$, gdy $\varepsilon \rightarrow 0$.

4 Ćwiczenia

Zadanie 16. Niech $W_1(t)$ i $W_2(t)$ będą dwoma niezależnymi procesami Wienera oraz niech $\Delta_n = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ będzie podziałem $[a, b]$. Pokaż, że

$$\sum_{i=1}^n (W_1(t_i) - W_1(t_{i-1}))(W_2(t_i) - W_2(t_{i-1})) \rightarrow 0, \quad (11)$$

w $L^2(\Omega)$ jeśli $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$.

Zadanie 17. Niech $f : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją dwóch zmiennych. Zakładamy ponadto, że istnieje stała $L > 0$ taka, że dla wszystkich $t, s_1, s_2 \in [0, T]$

$$|f(s_1, t) - f(s_2, t)| \leq L|s_1 - s_2|. \quad (12)$$

Udowodnić, że proces $\psi(s) = \int_0^T f(s, t) dW_t$, $t \in [0, T]$, ma ciągłą modyfikację

* oraz, że

$$\int_0^T \int_0^T f(s, t) ds dW_t = \int_0^T \int_0^T f(s, t) dW_t ds. \quad (13)$$

Zadanie 18. Niech $f, g \in \mathcal{M}_{[0, T]}^2$ i $f = g - d\mathbb{P} \times dt$ p.w. Pokaż, że

$$\int_0^T f(t) dW_t = \int_0^T g(t) dW_t \quad d\mathbb{P} - p.n. \quad (14)$$

Zadanie 19. Załóżmy, że $f, g \in \mathcal{M}_{[a, b]}^2$, $0 \leq a < b$, oraz, że dla pewnych stałych C, D zachodzi równość

$$C + \int_a^b f(t) dW_t = D + \int_a^b g(t) dW_t. \quad (15)$$

Udowodnić, że wtedy $C = D$ oraz $f = g - d\mathbb{P} \times dt$ p.w.

Zadanie 20. Niech $f \in \mathcal{M}_{[a, b]}^2$, $0 \leq a < b$, oraz niech A będzie zdarzeniem \mathcal{F}_a -mierzalnym. Korzystając z izometrii Itô pokazać, że

$$\mathbf{1}_A \int_a^b f(t) dW_t = \int_a^b \mathbf{1}_A f(t) dW_t. \quad (16)$$

5 Ćwiczenia

Zadanie 21. Zachowanie się cen S_t na giełdzie jest modelowane procesem $S_t = \exp(\mu t + \sigma W_t)$, gdzie μ oraz $\sigma \neq 0$ są ustalonymi parametrami.

- Dla $x > 0$ wyznacz $\mathbb{P}(S_t \leq x)$.
- Znajdź medianę S_t oraz $\mathbb{E}(S_t)$.
- Znajdź taki warunek na μ oraz σ , aby proces S_t był martyngałem względem filtracji naturalnej procesu Wienera W . Następnie, przy tym warunku, uzasadnij czy opłacalna jest długoterminowa inwestycja na giełdzie tego typu.

Zadanie 22. Niech $(W_t)_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera i niech $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ będzie jego filtracją naturalną. Niech

$$S_t = S_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t}, \quad (17)$$

gdzie $S_0, \sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ i niech $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ będzie filtracją naturalną procesu $(S_t)_{t \geq 0}$. Udowodnij, że $\mathcal{F}_t^S = \mathcal{F}_t^W$ dla każdego $t \geq 0$.

Zadanie 23. Pokaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d((W(t))^n) = \frac{n(n-1)}{2} (W(t))^{n-2} dt + n(W(t))^{n-1} dW(t). \quad (18)$$

Uzasadnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ proces $((W(t))^n)_{t \in [0, T]}$ należy do $\mathcal{M}_{[0, T]}^2$.

Zadanie 24. Niech $X_t = e^t \cos(W_t)$, $Y_t = e^t \sin(W_t)$, $Z_t = e^{2t}$. Pokaż, że wektor kolumnowy $V_t = [X_t, Y_t, Z_t]$ spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$dV_t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V_t dW_t + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} V_t dt, \quad (19)$$

z warunkiem początkowym $V_0 = [1, 0, 1]$.

Zadanie 25. Rozważmy proces $X_t = [X_t^1, X_t^2]$ (wektor kolumnowy), gdzie

$$\begin{aligned} X_t^1 &= a \cos(W_t), \\ X_t^2 &= b \sin(W_t), \end{aligned}$$

gdzie $a, b > 0$ oraz W jest jednowymiarowym procesem Wienera. Korzystając z formuły Itô pokaż, że proces X spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe

$$dX_t = -\frac{1}{2} X_t dt + \begin{bmatrix} 0 & -a/b \\ b/a & 0 \end{bmatrix} X_t dW_t, \quad (20)$$

z warunkiem początkowym $X_0 = [a, 0]$.

Zadanie 26. Rozważmy proces Itô

$$dX(t) = a_X(t)X(t)dt + b_X(t)X(t)dW(t). \quad (21)$$

Pokaż, że każdy z poniższych procesów jest procesem Itô i znajdź jego formę:

$$(a) Y(t) = \frac{1}{X(t)}, \quad (b) Z(t) = \ln(X(t)).$$

Zadanie 27. Niech

$$dX = a_X X dt + b_X X dW, \quad (22)$$

$$dY = a_Y Y dt + b_Y Y dW. \quad (23)$$

Pokaż, że każdy z poniższych procesów jest procesem Itô i znajdź jego postać:

$$(a) Z = XY, \quad (b) Z = Y/X.$$

Zadanie 28. (i) Niech $T > 0$ i niech dla funkcji $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje stała $K > 0$ taka, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|. \quad (24)$$

Udowodnij, że funkcja $\varphi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem $\varphi(t) = \mathbb{E}(g(W(t)))$ jest ciągła na $[0, T]$.

(ii) Korzystając z formuły Itô oblicz $\mathbb{E}(\sin(\sigma W_t))$ oraz $\mathbb{E}(\cos(\sigma W_t))$ dla $t > 0$ oraz $\sigma \neq 0$.

Zadanie 29. Niech W_1, W_2 będą niezależnymi procesami Wienera. Rozważmy procesy Itô postaci:

$$dX_1 = a_1 dt + \sigma_{11} dW_1 + \sigma_{12} dW_2, \quad (25)$$

$$dX_2 = a_2 dt + \sigma_{21} dW_1 + \sigma_{22} dW_2. \quad (26)$$

Korzystając z wielowymiarowej formuły Itô znajdź różniczkę stochastyczną dZ procesu $Z(t) = F(X_1(t), X_2(t))$ dla

$$(a) F(x_1, x_2) = x_1 x_2, \quad (b) F(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0.$$

Zadanie 30. Rozwiąż Stochastyczne Równanie Różniczkowe korzystając z formuły Itô dla podanej funkcji.

1. $dX(t) = \frac{X(t)}{t+1} dt + \frac{-1}{t+1} dW(t)$, $X(0) = 0$. *Podpowiedź:* $F(t, x) = \frac{x}{t+1}$

2. $dX(t) = X^3(t)dt + X^2(t)dW(t)$, $X(0) = 1$. *Podpowiedź:* $F(t, x) = \frac{1}{1-x}$.

Czy rozwiązanie istnieje w dowolnym przedziale czasowym

3. $dX(t) = (a - bX(t))dt + c dW(t)$, $X(0) = x_0$, $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$. *Podpowiedź:* $F(t, x) = e^{bt}x$.

4. $dX(t) = \frac{1}{2}b(X(t))b'(X(t))dt + b(X(t))dW(t)$. *Podpowiedź:* $F(t, x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{b(s)} ds$, gdzie b jest funkcją różniczkowalną.

Zastosuj podaną metodę dla funkcji $b(x) = x^3$.

6 Cwiczenia

Zadanie 31. Niech $b_X, b_Y \in \mathcal{P}_{[0, T]}^2$ i niech $X(t) = \int_0^t b_X(s) dW(s)$, $Y(t) = \int_0^t b_Y(s) dW(s)$, $t \in [0, T]$.

Udowodnij, że

$$[X, Y](t) = \int_0^t b_X(s) b_Y(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (27)$$

Zadanie 32. Niech $(X(t))_{t \geq 0}$ i $(Y(t))_{t \geq 0}$ będą dwoma martyngalami względem pewnej filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, całkwalnymi z kwadratem i o ciągłych trajektoriach. Udowodnij, że proces

$$X(t)Y(t) - [X, Y](t), \quad t \geq 0, \quad (28)$$

też jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Zadanie 33. Korzystając z twierdzenia Levy'ego udowodnij, że proces

$$M_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s) dW_s, \quad t \geq 0, \quad (29)$$

jest procesem Wienera względem filtracji naturalnej procesu $\{W_t\}_{t \geq 0}$.

Zadanie 34. Niech $W_t = [W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)}]$ będzie trójwymiarowym procesem Wienera oraz niech

$$Y_t = \int_0^t \cos(W_s^{(3)}) dW_s^{(1)} + \int_0^t \sin(W_s^{(3)}) dW_s^{(2)}, \quad t \in [0, T]. \quad (30)$$

Czy $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera względem filtracji naturalnej procesu $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$?

Zadanie 35. Niech W_1, W_2 będą niezależnymi procesami Wienera. Udowodnij, że proces $X(t) = aW_1(t) + bW_2(t)$, $t \geq 0$, jest jednowymiarowym procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2 + b^2 = 1$.

Zadanie 36. Niech $f \in \mathcal{M}_{[0, T]}^2$, $M(t) = \int_0^t f(s) dW(s)$. Udowodnij, że $M^2(t) - \int_0^t f^2(s) ds$ jest martyngałem.

Zadanie 37. Niech $b \in \mathcal{L}_{[0, T]}^2$, $M(t) = \exp(-\frac{1}{2} \int_0^t b^2(s) ds - \int_0^t b(s) dW(s))$. Udowodnij, że $M(t)$ jest martyngałem.

7 Ćwiczenia - Twierdzenie Girsanowa

Zadanie 38. Niech $\{W(t)\}_{t \in [0, 2]}$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Korzystając z twierdzenia Girsanowa udowodnić, że proces $Y(t) = W(t) + t - t^3$ jest procesem Wienera na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ z miarą probabilistyczną \mathbb{Q} określoną następująco

$$\mathbb{Q}(A) = e^{-109/5} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\mathbf{1}_A \exp \left\{ 11 \cdot W(2) - 6 \int_0^2 s W(s) ds \right\} \right), \quad A \in \mathcal{F}. \quad (31)$$

Zadanie 39. Korzystając z twierdzenia Girsanowa obliczyć $\mathbb{E}(W_t^3 e^{W_1 - \frac{1}{2}})$ oraz $\mathbb{E}(W_t^4 e^{W_1})$ dla $t \in (0, 1]$.

Zadanie 40. Niech $\{W(t)\}_{t \in [0,1]}$ będzie jednowymiarowym procesem Wienera na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Korzystając z twierdzenia Girsanowa znajdź gęstość rozkładu $W(2/3)$ względem miary probabilistycznej $d\mathbb{Q} = e^{W(1) - \frac{1}{2}} d\mathbb{P}$.

Zadanie 41. Korzystając z twierdzenia Girsanowa rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} dX_1(t) = X_2(t)dt + dW(t), \\ dX_2(t) = (X_1(t) - 1)dt, \end{cases} \quad (32)$$

gdzie $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera.

8 Ćwiczenia

Zadanie 42. Rozważmy następującą strategię: $x(t) = V(0)/S(0)$ dla $t \in [0, t_1)$, $x(t) = 2x(0)$ dla $t \in [t_1, t_2)$ i $x(t_2) = 0$, gdzie $V(0)$, $S(0)$ są znane, $0 < t_1 < t_2$ – ustalone. Wyznaczyć proces y tak aby strategia $(x(t), y(t))$ była samofinansująca. W modelu Blacka–Scholesa z danymi μ , σ , r jakie jest prawdopodobieństwo, że $y(t_2) < 0$?

Zadanie 43. Obliczyć $\mathbb{E}(\tilde{S}(t) | \mathcal{F}_u^W)$, dla $0 \leq u < t$, gdzie $\tilde{S}(t) = e^{-rt}S(t)$, $S(t) = S(0)\exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))$ oraz $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W(u) | 0 \leq u \leq t)$, $t \in [0, T]$.

Zadanie 44. Znajdź równania, które spełniają funkcje

$$t \rightarrow \mathbb{E}(S(t)), \quad (33)$$

$$t \rightarrow \text{Var}(S(t)), \quad (34)$$

gdzie proces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ spełnia równanie

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (35)$$

$$S(0) = S_0 > 0. \quad (36)$$

Zadanie 45. Rozważmy alternatywny model, w którym ceny akcji opisuje proces Ornsteina–Uhlenbecka $\{S_1(t)\}_{t \geq 0}$ spełniający równanie

$$dS_1(t) = \mu_1 S_1(t)dt + \sigma_1 dW(t). \quad (37)$$

- (i) Korzystając z formuły Itô rozwiąż równanie (37).
- (ii) Znajdź równanie jakie spełnia proces $\{S_1^2(t)\}_{t \geq 0}$.
- (iii) Znajdź prawdopodobieństwo zdarzenia, że w pewnym momencie $t_1 > 0$ cena akcji będzie ujemna, tzn.: obliczyć $\mathbb{P}(S_1(t_1) < 0)$.

Zadanie 46. Niech X i Y będą dwoma procesami Itô postaci

$$\begin{aligned}dX(t) &= a_X(t)dt + b_X(t)dW_t, \\dY(t) &= a_Y(t)dt + b_Y(t)dW_t, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

gdzie $\{W_t\}_{t \geq 0}$ jest jednowymiarowym procesem Wienera. Stosując formułę Itô do $(X(t) - Y(t))^2$, udowodnij, że jeżeli $X = Y$, to wtedy $a_X = a_Y$ oraz $b_X = b_Y$.

Zadanie 47. Rozważmy model rynku, w którym ceny akcji i bonu mają dynamikę:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \quad (38)$$

$$dB_t = r B_t dt, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (39)$$

Pokaż, że cena w momencie t opcji europejskiej, o momencie wygaśnięcia T i wypłacie $h(S_T)$, wynosi $f(t, S_t)$ gdzie $f = f(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego cząstkowego:

$$f_t(t, x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t, x) - r x f_x(t, x) + r f(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (40)$$

$$f(T, x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

Zadanie 48. Rozważmy model rynku, w którym ceny akcji i bonu mają dynamikę:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad (42)$$

$$dB_t = r(t, S_t)B_t dt, \quad (43)$$

gdzie współczynniki $\mu, \sigma, r : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są takie, że powyższe stochastyczne równanie różniczkowe ma dokładnie jedno rozwiązanie. Pokaż, że cena w momencie t opcji europejskiej, o momencie wygaśnięcia T i wypłacie $h(S_T)$, wynosi $f(t, S_t)$ gdzie $f = f(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego cząstkowego:

$$f_t(t, x) = -\frac{1}{2}\sigma^2(t, x)f_{xx}(t, x) - r(t, x)x f_x(t, x) + r(t, x)f(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad (44)$$

$$f(T, x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (45)$$

Zadanie 49. (i) Znajdź rozwiązania równania (40) z Zadania 47 postaci

$$f(t, x) = \phi(x), \quad f(t, x) = \psi(t). \quad (46)$$

Z jakimi warunkami końcowymi $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ możesz rozwiązać równanie (40), jeśli rozwiązania szukasz w postaci $f(t, x) = \phi(x) + \psi(t)$?

(ii) Znajdź rozwiązania równania (40) z Zadania 47 postaci $f(t, x) = \psi(t)\phi(x)$. Z jakimi warunkami końcowymi $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ możesz teraz rozwiązać równanie (40)?

Zadanie 50. Z jakim warunkiem końcowym $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja $f(t, x) = x - Ke^{-r(T-t)}$, $K \in \mathbb{R}$, spełnia równanie (40)? Korzystając z wyznaczonego h udowodnij formułę Put–Call Parity

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in [0, T], \quad (47)$$

dla europejskiej opcji *put* $P_t = (K - S_t)^+$ i *call* $C_t = (S_t - K)^+$ o terminach wygaśnięcia T .

Zadanie 51. Rozważmy model, w którym akcja wypłaca dywidendę w stałym tempie, które jest proporcjonalne do ceny akcji. Tzn. jeśli mamy a_t jednostek akcji w przedziale czasu $t \in [\alpha, \beta]$, wówczas całkowita kwota z tytułu dywidendy wynosi

$$r_D \int_{\alpha}^{\beta} a_t S_t dt, \quad (48)$$

gdzie stała r_D jest nazywana stopą dywidendy (*dividend yield*). Model (38) należy wówczas zmodyfikować następująco:

$$dS_t = (\mu - r_D)S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (49)$$

Pokaż, że cena w momencie t opcji europejskiej, o momencie wygaśnięcia T i wypłacie $h(S_T)$, wynosi $f(t, S_t)$ gdzie $f = f(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego cząstkowego:

$$\begin{aligned} f_t(t, x) &= -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t, x) - (r - r_D)x f_x(t, x) + r f(t, x), \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ f(T, x) &= h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zadanie 52. Rozważmy model rynku, w którym ceny akcji i bonu spełniają równania

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \sigma \in \mathbb{R}_+, \quad (50)$$

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad (51)$$

gdzie krótka stopa procentowa $r = r_t$ jest nie losową funkcją ciągłą. Rozważmy opcję, która w momencie T wypłaca S_T^n , $n \in \mathbb{N}$. Przyjmując, że cena opcji w momencie $t \in [0, T]$ wynosi $h(t, T)S_t^n$, dla pewnej funkcji $h(t, T)$ różniczkowalnej w sposób ciągły ze względu na t , znajdź równanie różniczkowe jakie spełnia funkcja $h(t, T)$ ze względu na zmienną t i rozwiąż je.