Zagadnienia do egzaminu z Inżynierskich Metod Numerycznych - semestr zimowy 2023/2024

27 listopada 2023

1 Równania różniczkowe zwyczajne

1. Schemat jawny i niejawny Eulera
   - konstrukcja schematu jawnego i niejawnego Eulera
   - stabilność bezwzględna schematów Eulera
   - lokalna i globalna dokładność schematów Eulera
   - metody rozwiązywania równania niejawnego: metoda iteracji funkcjonalnej (Picarda) i metoda Newtona
2. Schemat trapezów, bezwzględna stabilność schematu trapezów.
3. Sprowadzanie równania różniczkowego n-tego rzędu do układu n równań 1-go rzędu (rola warunków początkowych).
4. Metody Rungego-Kutty
   - ogólna postać wzorów definiujących metodę (w wykładzie oznaczone przez u_n, na k_i oraz U_i), definicja predyktora i korektora
   - tablica Butchera, jej własności (wartości współczynników b_i, c_i i $a_{i,j}$ dla jawnych i niejawnych schematy RK).
   - stabilność bezwzględna jawnych metod RK
5. Ekstrapolacja Richardsona
   - kiedy problem określamy jako sztywny? (można wyjaśnić przez przykład)
   - w jakim celu wyznaczamy błąd numeryczny w ekstrapolacji Richardsona?

2 Równania różniczkowe cząstkowe

1. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych (hiperboliczne, ...) i podanie ich przykładów (np. falowe, ...)
2. Równanie Poissona
   - dyskretyzacja równania
   - metoda bezpośrednia (algebraiczna) rozwiązywania równania Poissona
   - relaksacja lokalna i globalna
   - metoda zagęszczania siatki: na czym polega?
3. Równania mechaniki płynów
   - przepływ bezwirowy - jakie równania różniczkowe spełniają: funkcja strumienia (ψ) i potencjał przepływu (ϕ)?
   - jaki jest związek ψ i ϕ ze składowymi prędkości?

- jak interpretujemy linie stałych wartości ψ?

4. Równanie adwekcji
   - dyskretyzacja równania: pochodna czasowa i przestrzenna, schematy upwind, downwind i z pochodną centralną
   - twierdzenie Couranta-Friedrichsa-Levy'ego, liczba Couranta
   - konstrukcja schematu Laxa-Fridrichsa
   - konstrukcja schematu Laxa-Wendroffa
   - schemat leap-frog
   - schemat niejawny Eulera, schemat Cranka-Nicolson
   - definicje spójności, zbieżności i stabilności schematu różnicowego
   - zasada maksimum a stabilność schematu różnicowego
   - analiza von Neumanna danego schematu adwekcji
5. Równanie dyfuzji i adwekcji-dyfuzji
   - konstrukcja schematów: jawnego i niejawnego Eulera, metoda Cranka-Nicolson
   - zastosowanie zasady maksimum do schematów adwekcji-dyfuzji
   - analiza von Neumanna schematów (ogólnie) i ich stabilbość
6. Równanie falowe dla struny
   - liniowość równania a zasada superpozycji
   - metoda separacji zmiennych i metoda strzałów poszukiwania modów własnych drgań
   - położeniowy i prędkościowy schemat Verleta - ich konstrukcja i różnice między nimi dokłaności

3 Przykładowe pytania

1. Dla równania różniczkowego $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y(t) = g(y) + at$.
   a) Sprowadź to równanie do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.
   b) Napisz schemat różnicowy Eulera (jawny lub niejawny) dla tego układu.
2. Dane jest równanie różniczkowe $\frac{du}{dt} = \lambda u(t)$. Wyprowadź wzór opisujący współczynnik wzmocnienia dla schematu Eulera jawnego, Eulera niejawnego lub schematu trapezów. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz obszar bezwzględnej stabilności danej metody.
3. Dla podanej tablicy Butchera metody Rungego-Kutty określ typ metody RK (jawna/niejawna).
4. Dla poniższego *niejawnego* schematu RK oblicz współczynnik wzmocnienia dla równania $\frac{du}{dt} = \lambda u(t)$:

$$\begin{aligned} u_n = &\quad u_{n-1} + \Delta t f(t_{n-1} + \tfrac{\Delta t}{2}, U_1), \\ U_1 = &\quad u_{n-1} + \tfrac{\Delta t}{2} f(t_{n-1} + \tfrac{\Delta t}{2}, U_1) \end{aligned}$$

   Lub alternatywna wersja: dla podanej tablicy Butchera
   $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$, obliczyć współczynnik wzmocnienia dla równania $\frac{du}{dt} = \lambda u(t)$.
5. Dla podanej tablicy Butchera
   $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$ skonstruuj schemat różnicowy do obliczenia $y(t_n)$ (w chwili n) dla równania różniczkowego

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot y(t) \tag{1}$$

6. Do rozwiązania równania różniczkowego $\frac{du}{dt} = \lambda u(t)$ z $\lambda = -10$ zaproponuj schemat różnicowy, który jest bezwzględnie stabilny dla dowolnego kroku czasowego.

7. Stosujemy ekstrapolację Richardsona do kontroli kroku czasowego z tolerancją TOL. Wykonaliśmy obliczenia dla $2\Delta t$ i oszacowaliśmy błąd metody E. Przy jakich względnych wartościach E i TOL krok czasowy zostanie zwiększony/zmniejszony?

8. W schemacie relaksacji lokalnej równania Poissona $\nabla^2 V(x,y) = -\rho/\varepsilon$ **w 2D** podaj współczynniki $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$

$$V_{i,j} = (1-\omega)V_{i,j} + \omega(a_1 V_{i+1,j} + a_2 V_{i-1,j} + a_3 V_{i,j+1} + a_4 V_{i,j-1} + a_5 \rho_{i,j}/\varepsilon)$$

9. Dane jest równanie Poissona w 1D z warunkami brzegowymi:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\rho(x), \quad V(0) = 10, \quad \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

Na siatce złożonej z 4 węzłów zdyskretyzuj to równanie i zapisz w postaci macierzowej $A\vec{V} = \vec{b}$ z uwzględnieniem warunków brzegowych.

10. Rozważmy przepływ cieczy nielepkiej i nieściśliwej ciecz o stałej prędkości w kierunku y: $\vec{v} = (u,v) = (0,v)$. Jeśli równanie $\nabla^2\phi(x,y) = 0$ definiuje potencjał dla takiego przepływu, to jaką postać ma funkcja ϕ? Jaka jest funkcja strumienia $\psi(x,y)$?

11. W równaniu adwekcji w 1D $\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$ dokonaj dyskretyzacji pochodnej przestrzennej i czasowej tak, by skonstruować schemat upwind i downwind.

12. W otrzymanych schematach upwind i downwind określ, w jakich warunkach są stabilne bezwględnie (a) przy pomocy analizy von Neumanna (b) przy pomocy zasady maksimum.

13. Skonstruuj schemat Laxa-Friedrichsa dla równania adwekcji 1D i przy pomocy analizy von Neumanna oblicz współczynnik wzmocnienia modu k.

14. Skonstruuj położeniowy i prędkościowy schemat Verleta dla równania falowego w 1D.