

# Zagadnienia do egzaminu z Inżynierskich Metod Numerycznych - semestr zimowy 2024/2025

29 listopada 2024

## 1 Równania różniczkowe zwyczajne

1. Schemat jawny i niejawny Eulera
  - konstrukcja schematu jawnego i niejawnego Eulera
  - stabilność bezwzględna schematów Eulera
  - lokalna i globalna dokładność schematów Eulera
  - metody rozwiązywania równania niejawnego: metoda iteracji funkcjonalnej (Picarda) i metoda Newtona
2. Schemat trapezów, bezwzględna stabilność schematu trapezów.
3. Sprowadzanie równania różniczkowego  $n$ -tego rzędu do układu  $n$  równań 1-go rzędu (rola warunków początkowych).
4. Metody Rungego-Kutty
  - ogólna postać wzorów definiujących metodę (w wykładzie oznaczone przez  $u_n$ , na  $k_i$  oraz  $U_i$ ), definicja predyktora i korektora
  - tablica Butchera, jej własności (wartości współczynników  $b_i$ ,  $c_i$  i  $a_{i,j}$  dla jawnych i niejawnych schematy RK).
  - stabilność bezwzględna jawnych metod RK
5. Ekstrapolacja Richardsona
  - kiedy problem określamy jako sztywny? (można wyjaśnić przez przykład)
  - w jakim celu wyznaczamy błąd numeryczny w ekstrapolacji Richardsona?

## 2 Równania różniczkowe cząstkowe

1. Klasyfikacja równań różniczkowych cząstkowych (hiperboliczne, ...) i podanie ich przykładów (np. falowe, ...)
2. Równanie Poissona
  - dyskretyzacja równania
  - metoda bezpośrednia (algebraiczna) rozwiązywania równania Poissona
  - relaksacja lokalna i globalna
  - metoda zagęszczania siatki: na czym polega?
3. Równania mechaniki płynów
  - przepływ bezwirowy - jakie równania różniczkowe spełniają: funkcja strumienia ( $\psi$ ) i potencjał przepływu ( $\phi$ )?
  - jaki jest związek  $\psi$  i  $\phi$  ze składowymi prędkościami?

- jak interpretujemy linie stałych wartości  $\psi$ ?

#### 4. Równanie adwekcji

- dyskretyzacja równania: pochodna czasowa i przestrzenna, schematy upwind, downwind i z pochodną centralną
- twierdzenie Couranta-Friedrichsa-Levy'ego, liczba Couranta
- konstrukcja schematu Laxa-Fridrichsa
- konstrukcja schematu Laxa-Wendroffa
- schemat leap-frog
- schemat niejawny Eulera, schemat Cranka-Nicolson
- definicje spójności, zbieżności i stabilności schematu różnicowego
- zasada maksimum a stabilność schematu różnicowego
- analiza von Neumanna danego schematu adwekcji

#### 5. Równanie dyfuzji i adwekcji-dyfuzji

- konstrukcja schematów: jawnego i niejawnego Eulera, metoda Cranka-Nicolson
- zastosowanie zasady maksimum do schematów adwekcji-dyfuzji
- analiza von Neumanna schematów (ogólnie) i ich stabilność

#### 6. Równanie falowe dla struny

- liniowość równania a zasada superpozycji
- metoda separacji zmiennych i metoda strzałów poszukiwania modów własnych drgań
- położeniowy i prędkościowy schemat Verleta - ich konstrukcja i różnice między nimi dokładności

### 3 Przykładowe pytania

- Dla równania różniczkowego  $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y(t) = g(y) + at$ .
  - Sprowadź to równanie do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.
  - Napisz schemat różnicowy Eulera (jawny lub niejawny) dla tego układu.
- Dane jest równanie różniczkowe  $\frac{du}{dt} = \lambda u(t)$ . Wyprowadź wzór opisujący współczynnik wzmocnienia dla schematu Eulera jawnego, Eulera niejawnego lub schematu trapezów. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz obszar bezwzględnej stabilności danej metody.
- Dla podanej tablicy Butchera metody Rungego-Kutty określ typ metody RK (jawna/niejawna).
- Dla poniższego *niejawnego* schematu RK oblicz współczynnik wzmocnienia dla równania  $\frac{du}{dt} = \lambda u(t)$ :

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1),$$

$$U_1 = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1)$$

Lub alternatywna wersja: dla podanej tablicy Butchera

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}, \text{ obliczyć współczynnik wzmocnienia dla równania } \frac{du}{dt} = \lambda u(t).$$

- Dla podanej tablicy Butchera

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \text{ skonstruuj schemat różnicowy do obliczenia } y(t_n) \text{ (w chwili } n) \text{ dla równania różniczkowego}$$

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot y(t) \tag{1}$$

- Do rozwiązania równania różniczkowego  $\frac{du}{dt} = \lambda u(t)$  z  $\lambda = -10$  zaproponuj schemat różnicowy, który jest bezwzględnie stabilny dla dowolnego kroku czasowego.

7. Stosujemy ekstrapolację Richardsona do kontroli kroku czasowego z tolerancją  $TOL$ . Wykonaliśmy obliczenia dla  $2\Delta t$  i oszacowaliśmy błąd metody  $E$ . Przy jakich względnych wartościach  $E$  i  $TOL$  krok czasowy zostanie zwiększony/zmniejszony?
8. W schemacie relaksacji lokalnej równania Poissona  $\nabla^2 V(x, y) = -\rho/\varepsilon$  w **2D** podaj współczynniki  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

$$\tilde{V}_{i,j} = (1 - \omega)V_{i,j} + \omega(a_1 V_{i+1,j} + a_2 V_{i-1,j} + a_3 V_{i,j+1} + a_4 V_{i,j-1} + a_5 \rho_{i,j}/\varepsilon)$$

9. Dane jest równanie Poissona w 1D z warunkami brzegowymi:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\rho(x), \quad V(0) = 10, \quad \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

Na siatce złożonej z 4 węzłów zdyskretyzuj to równanie i zapisz w postaci macierzowej  $A\vec{V} = \vec{b}$  z uwzględnieniem warunków brzegowych.

10. Rozważmy przepływ cieczy nielepkiej i nieściśliwej ciec o stałej prędkości w kierunku  $y$ :  $\vec{v} = (u, v) = (0, v)$ . Jeśli równanie  $\nabla^2 \phi(x, y) = 0$  definiuje potencjał dla takiego przepływu, to jaką postać ma funkcja  $\phi$ ? Jaka jest funkcja strumienia  $\psi(x, y)$ ?
11. W równaniu adwekcji w 1D  $\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$  dokonaj dyskretyzacji pochodnej przestrzennej i czasowej tak, by skonstruować schemat upwind i downwind.
12. W otrzymanych schematach upwind i downwind określ, w jakich warunkach są stabilne bezwzględnie (a) przy pomocy analizy von Neumanna (b) przy pomocy zasady maksimum.
13. Skonstruuj schemat Laxa-Friedrichsa dla równania adwekcji 1D i przy pomocy analizy von Neumanna oblicz współczynnik wzmocnienia modu  $k$ .
14. Skonstruuj położeniowy i prędkościowy schemat Verleta dla równania falowego w 1D.