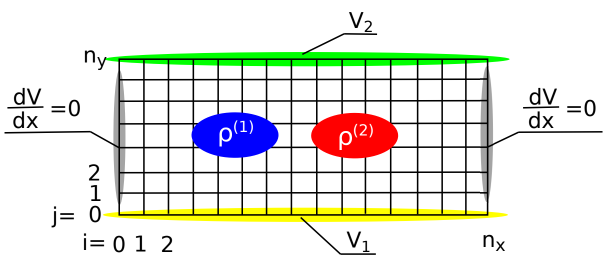
# Projekt 4: Równanie Poissona - relaksacja globalna i lokalna.

Tomasz Chwiej

29 sierpnia 2018

## 1 Wstęp




Rysunek 1: Geometria obszaru i siatki obliczeniowej, w którym rozwiązywane jest równanie Poissona. Dla $j = 0$ oraz $j = n_y$ nałożone są WB Dirichleta, natomiast dla $i = 0$ oraz $i = n_x$ WB są typu von Neumanna. W środku obszaru umieszczone są dwie gęstości ładunku $\rho^{(1)}$ i $\rho^{(2)}$.

Na zajęciach wyznaczymy rozkład potencjału w obszarze pokazanym na rys.1 metodą relaksacji globalnej i lokalnej oraz sprawdzimy ich wydajność.

### 1.1 Dyskretyzacja

Punktem wyjścia jest równananie Poissona w 2D

$$\varepsilon \nabla^2 V = \varepsilon \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -\rho \tag{1}$$

Aby zdyskretyzować równanie wprowadzamy siatkę węzłów i określamy wielkości na siatce (zakładamy że w całym obszarze $\varepsilon = const$)

$$x \quad \rightarrow \quad x_i = \Delta x \cdot i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n_x \tag{2}$$

$$y \quad \rightarrow \quad y_j = \Delta y \cdot j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n_y \tag{3}$$

$$V(x, y) \quad \rightarrow \quad V(x_i, y_j) = V_{i,j} \tag{4}$$

$$\rho(x, y) \quad \rightarrow \quad \rho(x_i, y_j) = \rho_{i,j} \tag{5}$$

Zakładamy

$$\Delta x = \Delta y = \Delta \tag{6}$$

i dyskretyzujemy rów. Poissona stosując trójpunktowy symetryczny iloraz różnicowy dla każdego węzła siatki $\left(\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{(\Delta x)^2}\right)$

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta^2} = -\frac{\rho_{i,j}}{\varepsilon} \tag{7}$$

Równanie (7) przekształcamy tak aby element $V_{i,j}$ uzależnić od pozostałych

$$V_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{\Delta^2}{\varepsilon}\rho_{i,j}\right) \tag{8}$$

### 1.2 Relaksacja globalna

W relaksacji globalnej operacje wykonujemy na dwóch tablicach potencjału: starej $V^s$ (elementy $V^s_{i,j}$) i nowej $V^n$ (elementy $V^n_{i,j}$). Jedna iteracja w metodzie relaksacji globalnej składa się z 3 etapów. Najpierw wyznaczamy wszystkie elementy (poza brzegowymi) w nowej tablicy

$$V^n_{i,j} = \frac{1}{4}\left(V^s_{i+1,j} + V^s_{i-1,j} + V^s_{i,j+1} + V^s_{i,j-1} + \frac{\Delta^2}{\varepsilon}\rho_{i,j}\right), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n_x - 1 \\ j = 1, 2, \ldots, n_y - 1 \end{array} \tag{9}$$

następnie w $V^n$ uwzględniamy WB Neumanna (WB Dirichleta uwzględniane są automatycznie)

$$V^n_{0,j} = V^n_{1,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_y - 1 \tag{10}$$

$$V^n_{n_x,j} = V^n_{n_x-1,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_y - 1 \tag{11}$$

i na końcu mieszamy ze sobą oba rozwiązania

$$V^s = (1 - \omega_G) \cdot V^s + \omega_G \cdot V^n, \quad \omega_G \in (0, 1] \tag{12}$$

po czym wykonujemy kolejne iteracje według powyższego opisu.

### 1.3 Relaksacja lokalna

W relaksacji lokalnej operujemy na jednej tablicy $V$, a postępowanie w jednej iteracji jest dwuetapowe. W pierwszym kroku modyfikujemy elementy

$$V_{i,j} = (1 - \omega_L) \cdot V_{i,j} + \frac{\omega_L}{4}\left(V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1} + \frac{\Delta^2}{\varepsilon}\rho_{i,j}\right), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n_x - 1 \\ j = 1, 2, \ldots, n_y - 1 \end{array} \tag{13}$$

dla warunku $\omega_L \in (0, 2)$,
a następnie uwzględniamy WB von Neumanna

$$V_{0,j} = V_{1,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_y - 1 \tag{14}$$

$$V_{n_x,j} = V_{n_x-1,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n_y - 1 \tag{15}$$

### 1.4 Warunek stopu

Dla równania Poissona definiujemy całkę funkcjonalną

$$S = \iint dx\, dy \left(\frac{1}{2}\vec{E}^2 - \rho \cdot V\right) \tag{16}$$

której wartość osiąga minimum dla potencjału V będącego dokładnym rozwiązaniem tego równania. W wersji zdyskretyzowanej całkowanie zastępujemy sumowaniem po węzłach

$$S = \sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} \Delta^2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta} \right)^2 - \rho_{i,j} \cdot V_{i,j} \right] \tag{17}$$

W relaksacji globalnej i lokalnej, zmiany potencjału w każdej iteracji będą zmieniać wartość S do chwili gdy rozkład przestrzenny potencjału ustabilizuje się (inaczej: zmiany będą niewielkie). Dlatego jako warunek stopu przyjmiemy spełnienie warunku

$$\left| \frac{S_{it} - S_{it-1}}{S_{it-1}} \right| < TOL \tag{18}$$

gdzie: $it$ - numer iteracji, $TOL$ - mała liczba.

# 2 Zadania do wykonania

1. Przyjmujemy następujące wartości parametrów: $\varepsilon = 1$, $\Delta = 0.1$, $n_x = 150$, $n_y = 100$, $V_1 = 10$ (WB na dole), $V_2 = 0$ (WB na górze), $x_{max} = \Delta \cdot n_x$ , $y_{max} = \Delta \cdot n_y$. Gęstość definiujemy następująco

$$\rho^{(1)}(x,y) = (+1) \cdot exp\left[ -\frac{(x - 0.35 \cdot x_{max})^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - 0.5 \cdot y_{max})^2}{\sigma_y^2} \right] \tag{19}$$

$$\rho^{(2)}(x,y) = (-1) \cdot exp\left[ -\frac{(x - 0.65 \cdot x_{max})^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y - 0.5 \cdot y_{max})^2}{\sigma_y^2} \right] \tag{20}$$

   oraz $\sigma_x = 0.1 \cdot x_{max}$, $\sigma_y = 0.1 \cdot y_{max}$ .

2. Rozwiązać równanie Poissona metodą relaksacji globalnej dla $\omega_G = 0.6, 1.0$. W obu przypadkach na starcie przyjąć $V = 0$ w całym obszarze (poza górnym i dolnym brzegiem). Jako warunek stopu wykorzystać równania (17) i (18) z parametrem $TOL = 10^{-8}$. N jedym rysunku umieścić wykresy zmian całki funkcjonalnej $S = S(it)$ dla obu przypadków. (30 pkt) Narysować mapę zrelaksowanego potencjału $V(x,y)$ oraz błędu rozwiązania $\delta = \nabla^2 V(x,y) + \rho(x,y)/\varepsilon$. (30 pkt)

3. Rozwiązać równanie Poissona metodą relaksacji lokalnej dla $\omega_L = 1.0, 1.4, 1.8, 1.9$. W każdym przypadku na starcie przyjąć $V = 0$ w całym obszarze (poza górnym i dolnym brzegiem). Jako warunek stopu wykorzystać równania (17) i (18) z parametrem $TOL = 10^{-8}$. Na jednym rysunku umieścić wykresy zmian całki funkcjonalnej $S = S(it)$ dla wszystkich rozważanych przypadków. (40 pkt)