

Równanie falowe

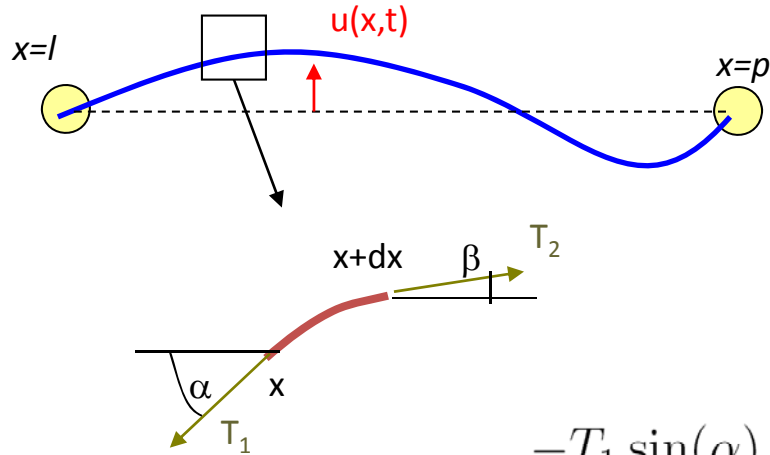
Równanie dyfuzji oraz dyfuzji-adwekcji – typowe paraboliczne

(opisuje dążenie do równowagi).

Dziś zajmiemy się typowym równaniem hiperbolicznym

(oscylacje: mechaniczne, elektryczne, elektro-magnetyczne)

równanie falowe (dla struny)



(II zasada Newtona $F=ma$)

$$-T_1 \sin(\alpha) + T_2 \sin(\beta) = \rho(x) dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

siła naciągu struny T (kierunek poziomy):

$$T = T_1 \cos(\alpha) = T_2 \cos(\beta)$$

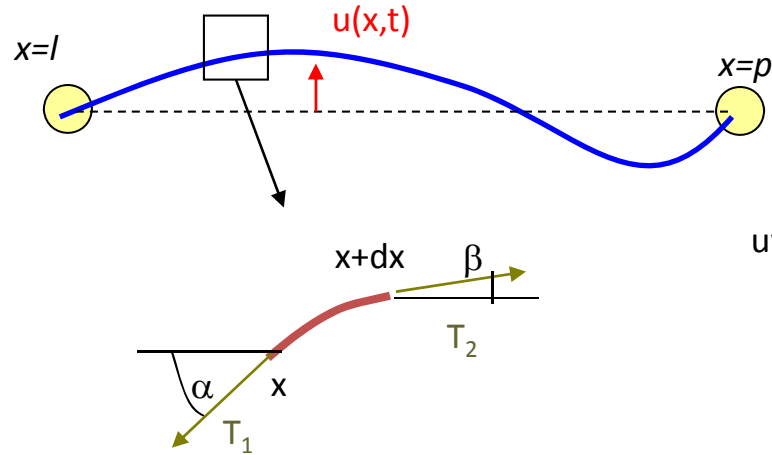
$$-\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\rho(x)}{T} dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Równanie dyfuzji oraz dyfuzji-adwekcji – typowe paraboliczne

(dążenie do równowagi).

Dziś zajmiemy się typowym równaniem hiperbolicznym
równanie falowe (dla struny)

(oscylacje)



uwaga:

$$\tan(\alpha) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$$

$$\tan(\beta) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx}$$



$$-\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\rho(x)}{T} dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{dx} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \right) = \frac{\rho(x)}{T} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

dx → 0

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$c(x) = \sqrt{\frac{T}{\rho(x)}}$$

(prędkość rozchodzenia się drgań)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c – stała: Ogólne rozwiązanie dla nieskończonego ośrodka (d’Alamberta)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0$$

$$u(x, t) = f(x \pm ct) \rightarrow$$

dowolna funkcja
drgania rozchodzące się bez zmiany kształtu
[brak dyspersji w równaniu falowym]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

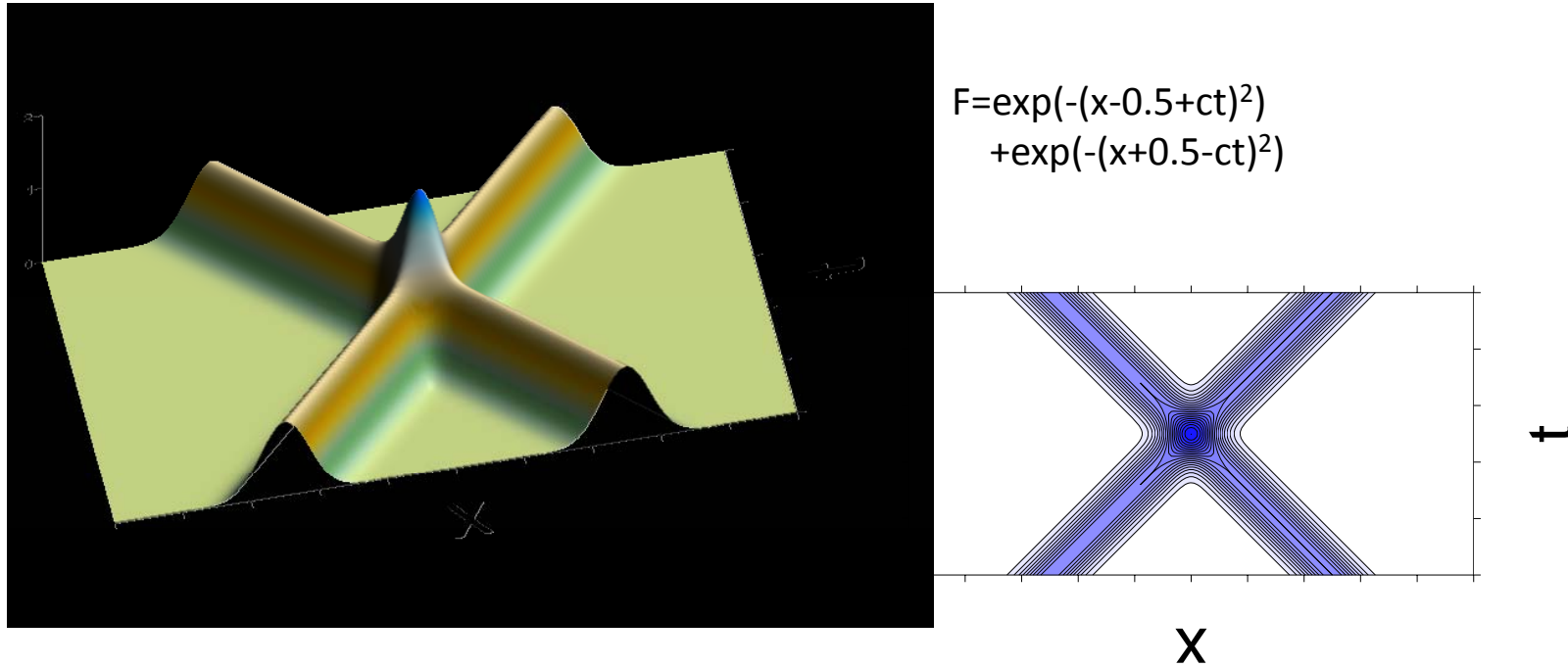
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Liniowość równania:

$$\frac{\partial^2 (u + v)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (u + v)}{\partial x^2}$$

zasada superpozycji

Liniowość równania i zasada superpozycji:



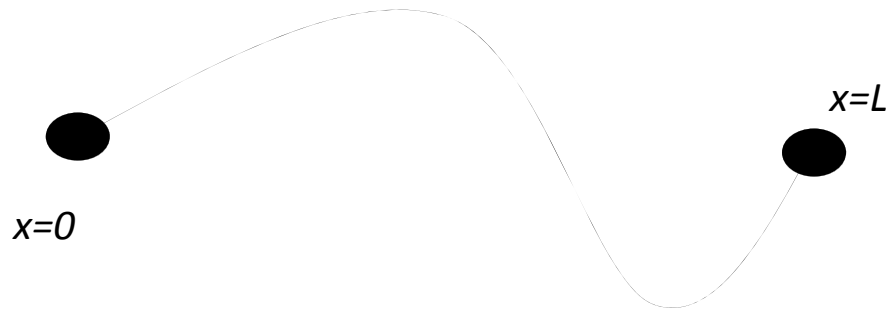
Sygnaly mijają się bez zmiany kształtu [(jedna fala przenika drugą.)]

ponieważ równanie liniowe: jeśli wskażemy bazę zupełną funkcji ze znaną ewolucją czasową = problem rozwiązany
baza: mody normalne (fale stojące) (drgania własne)

baza: mody normalne (fale stojące) (drżania własne)

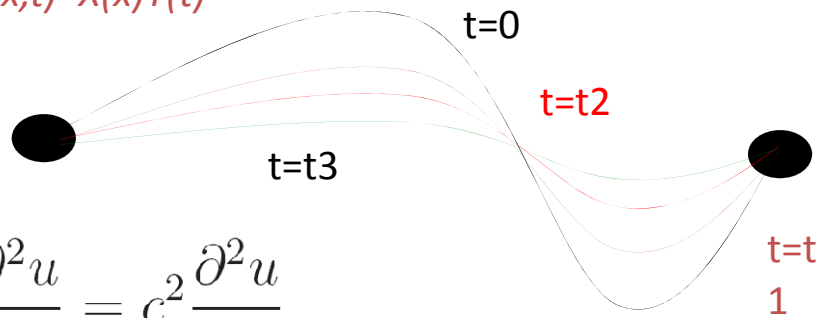
Dwupunktowe warunki brzegowe

$$u(0,t)=u(L,t)=0$$



Poszukajmy rozwiązań, w których tylko amplituda (a nie kształt fali) nie zależy od czasu:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$T(t) = \cos(\omega t + \phi) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

[gdy gęstość struny zmienna c może być funkcją położenia]

Równanie na część przestrzenną fal stojących (drania własne, drgania normalne)

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\frac{\omega_n^2}{c^2(x)} X_n(x) \quad \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

Dla c niezależnego od x :

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -k_n^2 X_n(x)$$

k -liczba falowa, wektor falowy

$k = 2\pi / \lambda$ tutaj λ długość fali

$k = \omega / c$

$$X_n(x) = \sin(k_n x)$$

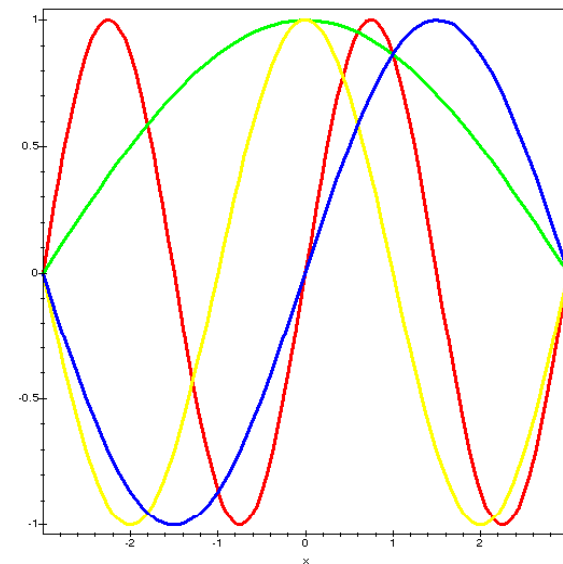
WB: spełnione, gdy $X(0) = X(L) = 0$

$$k_n = n\pi / L$$

$$L = \frac{n}{2} \lambda_n$$

Fale stojące:

Między warunkami brzegowymi całkowita liczba połówek długości fal..



0

L

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -k_n^2 X_n(x) \quad \text{warunki brzegowe: kwantyzacja } k \rightarrow \text{kwantyzacja } \omega$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

$$X_n(x) = \sin(k_n x), \quad T_n = \sin(\omega_n t), \quad \cos(\omega_n t)$$

$$k_n = n\pi / L$$

$$k = \omega / c \quad \rightarrow \quad \omega_n = ck_n$$

$$c = \sqrt{T / \rho}$$

T oznacza naciąg struny

przestrzenne drgania własne nie zależą od c ,
ale częstości tak.



Wiemy, że niższe tony
dają struny o większej grubości [ρ].

Wiemy również, że
im silniej struna naciągnięta tym
wyższy dźwięk.

Drgania własne dla zmiennej gęstości struny

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\frac{\omega_n^2}{c^2(x)} X_n(x)$$

W przypadku ogólnym [$c=c(x)$] przyda się rachunek numeryczny. Wyliczyć X_n oraz ω_n

$$c(x) = \sqrt{T_0/\rho(x)}$$

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\rho(x) \frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x)$$

$\rho(x)$



Dyskretyzujemy drugą pochodną, liczymy $X_n(x+dx)$

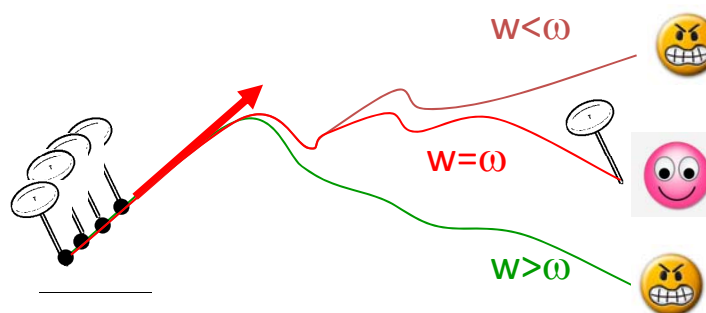
$$X_n(x + \Delta x) = -\Delta x^2 \rho(x) \frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x) - X_n(x - \Delta x) + 2X_n(x)$$

Równanie własne z warunkami brzegowymi: Metoda strzałów.

$$X_n(x + \Delta x) = -\Delta x^2 \rho(x) \frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x) - X_n(x - \Delta x) + 2X_n(x)$$

w – parametr równania

ω – dokładna wartość własna



w X_0 wstawić warunek brzegowy

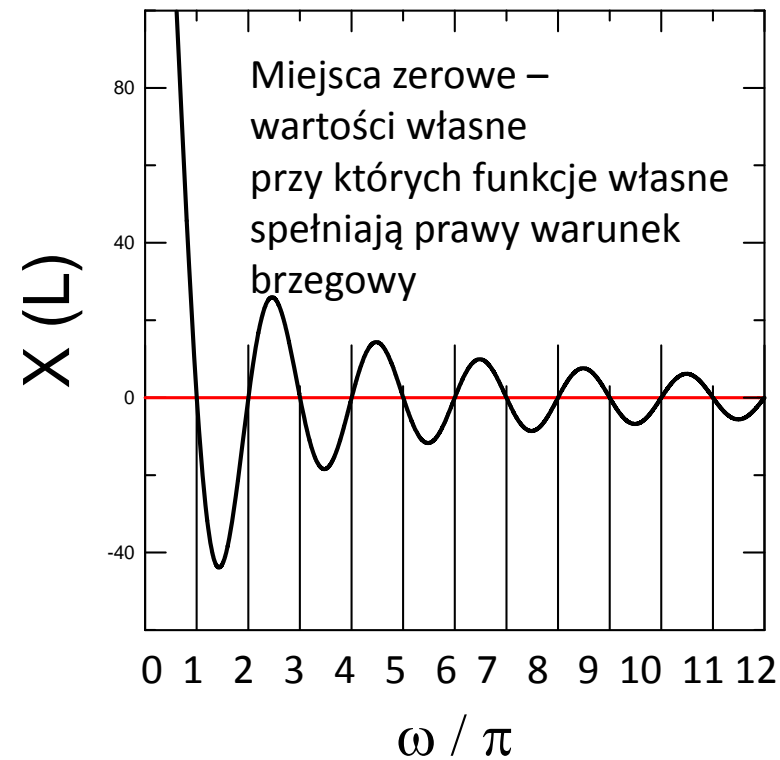
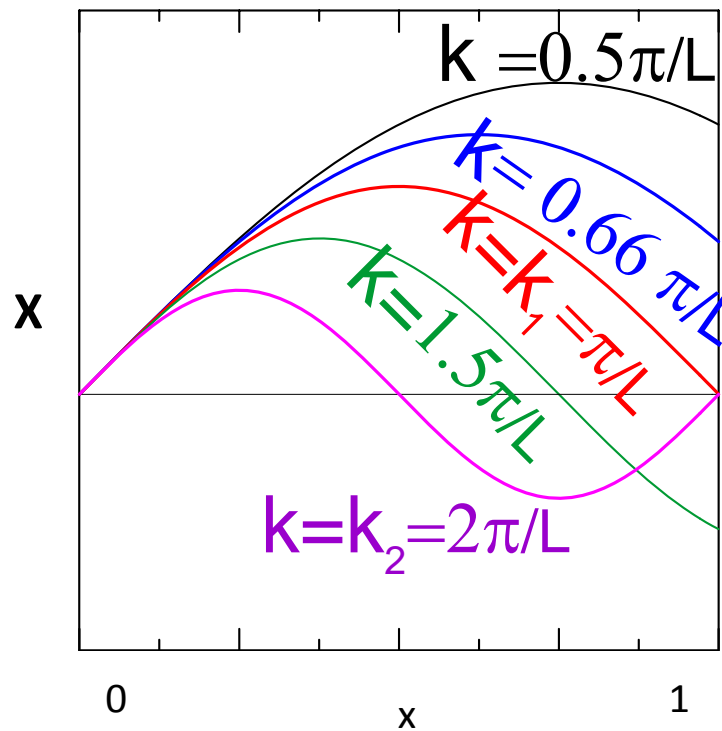
ale co wstawić za X_1 ?? (dla równania Poissona opisywanego dla metody Numerowa to był poważny problem)

dla drgań własnych wstawiamy cokolwiek
(równanie własne jest jednorodne rozwiązania określone
co do stałej multiplikatywnej)

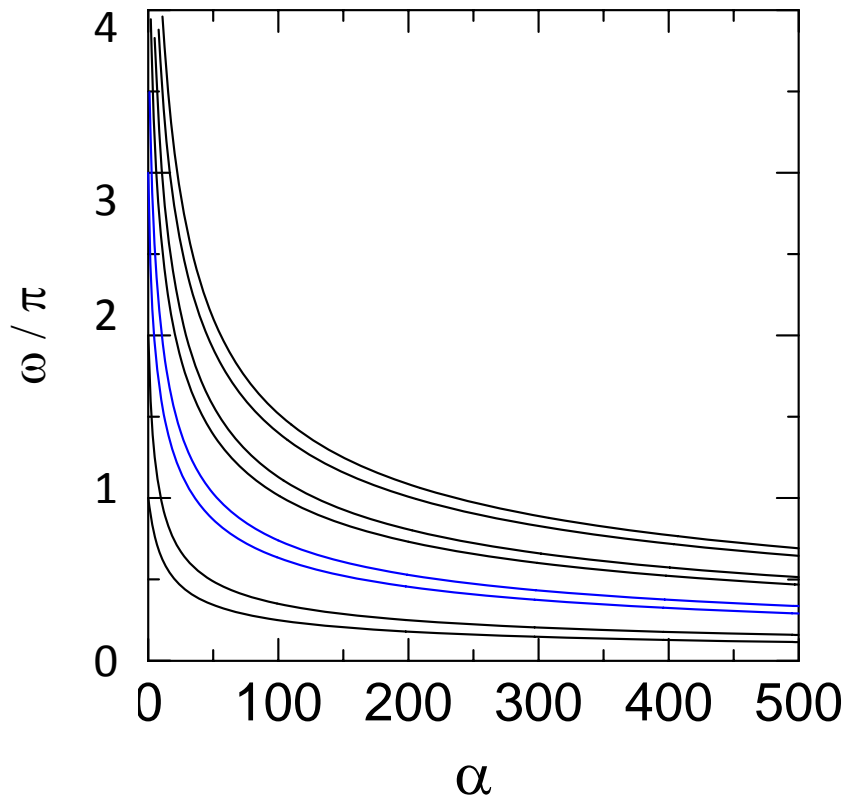
Test metody dla $\rho(x)=1$
 ($L=1, T_0=1$)

$$g(x) = \rho(x) \frac{\omega^2}{T_0}$$

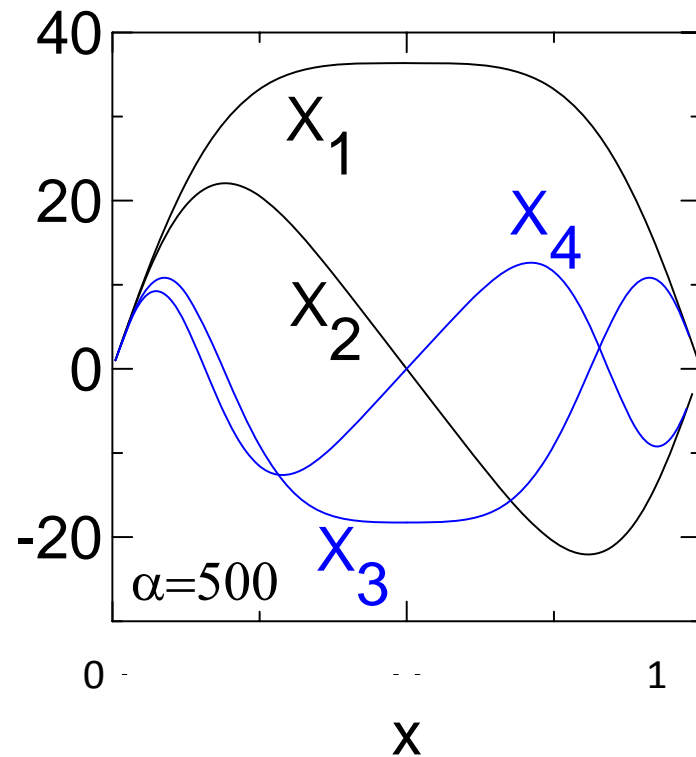
Analityczne: $k_n = n\pi/L$



Przykład: $\rho(x)=1+4\alpha(x-1/2)^2$ (struna cięższa przy mocowaniach)



$\alpha=0$ – częstotliwości własne równoodległe
 Częstotliwości własne maleją z α (cięższa struna)
 duże α – częstotliwości grupują się w pary



W każdej parze: funkcja parzysta i nieparzysta.
 Środek struny – prawie nieważki, na częstotliwości wpływ ma kształt funkcji przy brzegach – a tam zbliżony dla każdej funkcji z pary

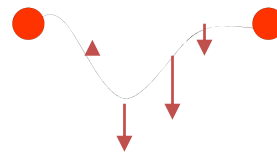
Drgania własne a ogólne rozwiązania równania falowego

Równanie ogólne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Warunki początkowe:

$u(x, t=0)$ oraz $v(x, t=0) = du/dt$



Zadać wychylenie
i prędkości

rozłożyć warunki początkowe na drgania własne
problem zależności czasowych jest rozwiązany

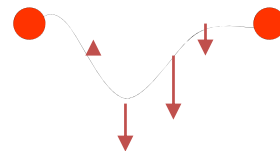
Drgania normalne a ogólne rozwiązania równania falowego

Równanie ogólne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Warunki początkowe:

$$u(x, t=0) \text{ oraz } v(x, t=0) = du/dt$$



Zadać wychylenie
i prędkości

rozłożyć warunki początkowe na drgania własne
problem zależności czasowych jest rozwiązany

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \omega_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

w chwili $t=0$, za kształt struny odpowiadają współczynniki c_n
a za prędkość – współczynniki s_n

Superpozycja drgań własnych:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

Warunki początkowe $u(x, t = 0) = g(x)$

$$\frac{du(x, t = 0)}{dt} = h(x)$$

Uwaga: dla równań dyfuzji i adwekcji warunków początkowy był tylko jeden czasowy rząd równania był = 1. Dla równania drugiego rzędu w czasie, wartość $u(x, t=0)$ nie wystarczy dla jednoznacznego określenia rozwiązania.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x)$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \omega_n \sin(k_n x)$$

$$\longrightarrow \int_0^L \sin(k_m x) dx \times$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx$$

$$s_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L h(x) \sin(k_n x) dx$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

dla drgań własnych jednorodnej struny:
Dyskretna sinusowa transformata Fouriera

rozkład na mody normalne

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \quad \text{na przedziale } (0,L)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx$$

Rozwinięcie w szereg Fouriera:

$g(x)$ = okresowa, odcinkowo ciągła z okresem T :

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x))$$

$$o_n = 2\frac{n\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(x) \cos(\omega_n x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(x) \sin(\omega_n x) dx$$

Rozkład na drgania normalne a szereg Fouriera:
drgania podległe warunkom brzegowym $g(0)=g(L)=0$.
dla naszego problemu L to długość struny i nie ma
interpretacji okresu (na strunie mieści się połowa długości fali).

Warunki Dirichleta zbieżności szeregu Fouriera

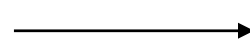
$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x))$$

Rozwinięcie Fouriera zbieżne w sensie jednorodnym

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1 \left| g(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x)) \right|^2 dx = 0$$

o ile $g(x)$ 1) całkowna w kwadracie

2) odcinkowo ciągła



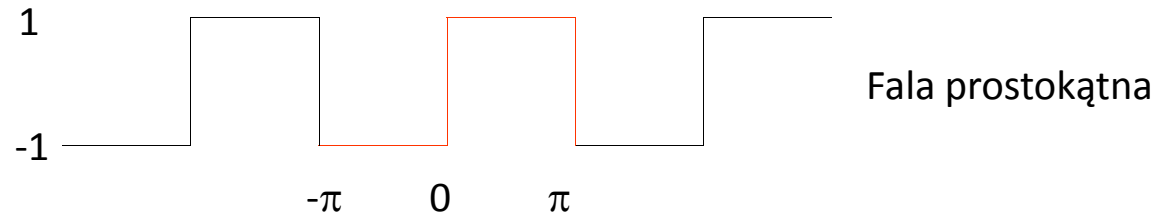
rozwinięcie Fouriera dąży do $g(x)$ „prawie wszędzie”
tzn. poza punktami dyskretnymi punktami
(rozwinięcie Fouriera jest wszędzie ciągłe!)

Twierdzenie Dirichleta: W punktach nieciągłości szereg Fouriera zbieżny

do $g(x) = [g(x-0) + g(x+0)] / 2$

tw. Dirichleta nie rozwiązuje wszystkich problemów

dla struny: pewien praktyczny problem z *kanciastymi* (nieróżniczkowalnymi) warunkami początkowymi.



$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x))$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(\omega_n x) dx = 0$$

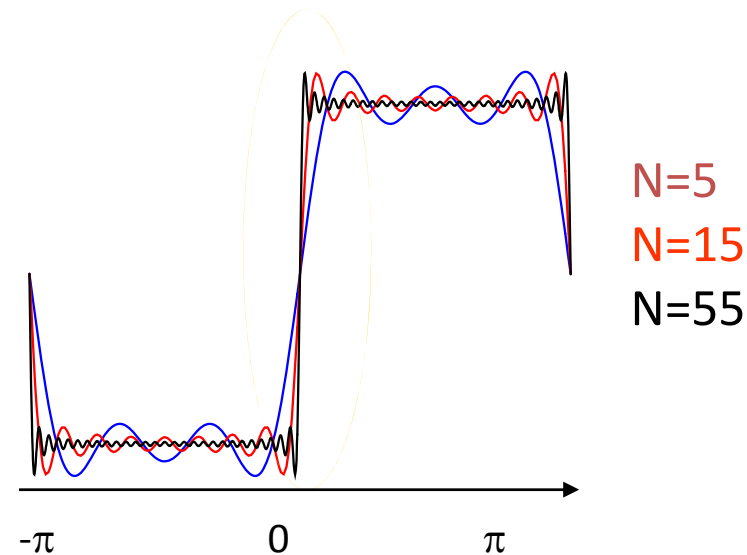
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\omega_n x) dx = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 0 & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right)$$

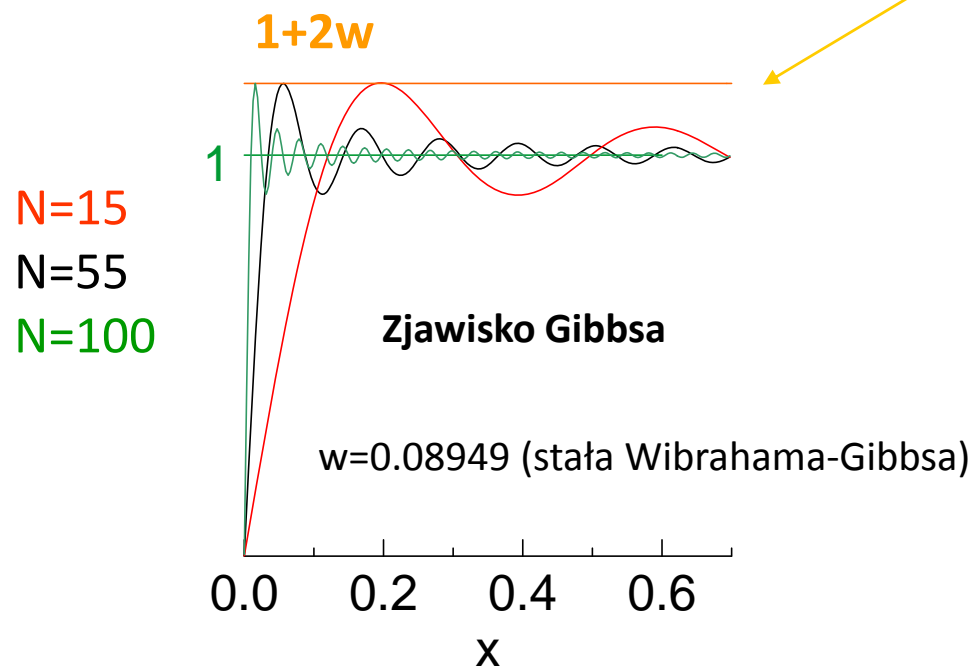
↑
W punkcie nieciągłości = $[g(0^-) + g(0^+)] / 2 = (-1 + 1) / 2 = 0$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

Nad nieciągłością wartość schodka
przestrzelona o około 18%



N=5
N=15
N=55



Na PC pracujemy ze skończonymi bazami:

Równania różniczkowego przez rozkład
warunku początkowego na drgania własne
nie rozwiążemy dokładnie, jeśli
ten jest nieciągły.

Na PC pracujemy ze skończonymi bazami...

Zbieżność szeregu Fouriera w sensie bezwzględny

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x))$$

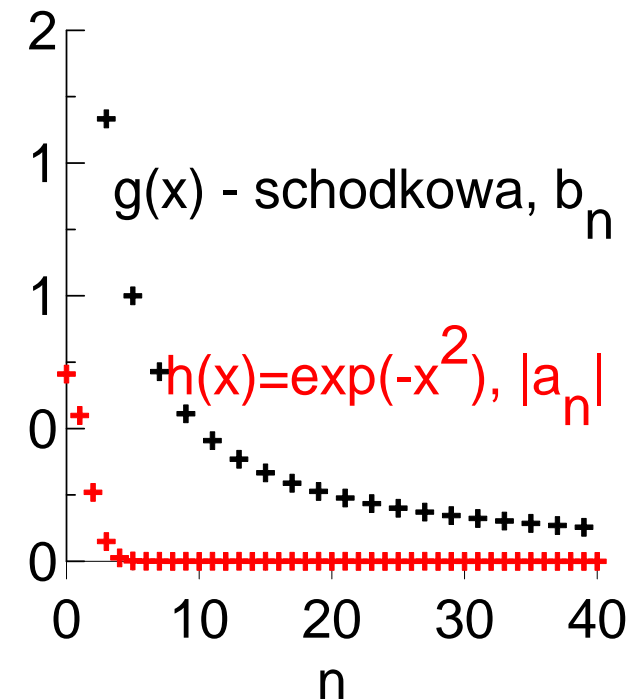
Szereg jest bezwzględnie zbieżny jeśli można go *obciąć* na pewnym wyrazie rozwinięcia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$$

Rozwinięcie fali prostokątnej nie jest bezwzględnie zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \infty \quad \text{Bo ogólny szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b} \text{ harmoniczny jest rozbieżny}$$

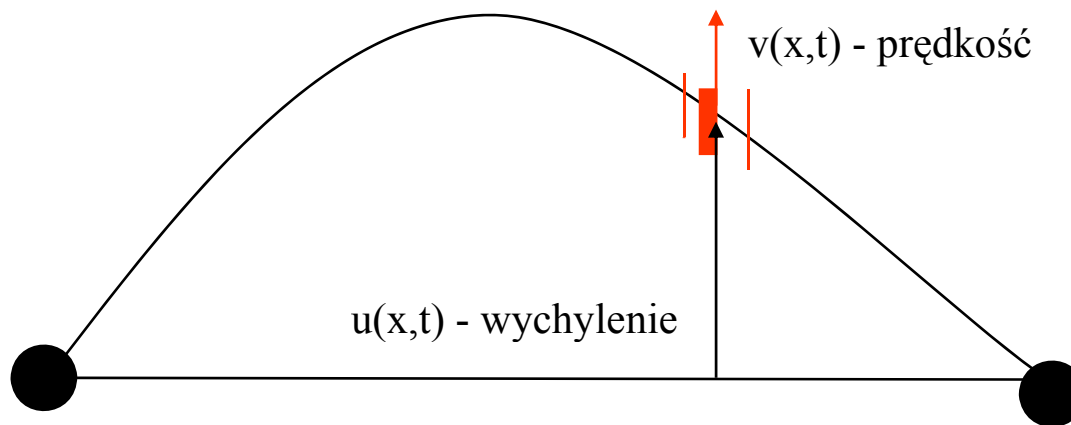
Wniosek: w skończonej bazie funkcji własnych możemy rozwiązywać tylko problemy z warunkiem początkowym, którego rozwinięcie w szereg Fouriera jest bezwzględnie zbieżne



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{równanie falowe ciąg dalszy}$$

metoda różnic skończonych, zamiast rozkładu na drgania własne (który może być wolnozbieżny)

Rozwiązanie numeryczne: dzielimy strunę na N fragmentów,
dla każdego z nich rozwiązujemy równania Newtona
(zabieg odwrotny do wyprowadzenia równania różniczkowego)



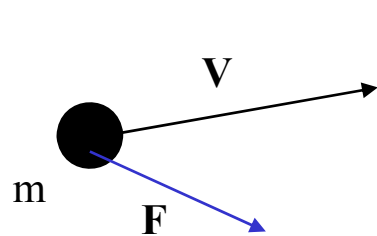
$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

z równania falowego:

$$a(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2}$$

Schemat Verleta (popularny dla symulacji dynamiki molekularnej)



$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Schemat Verleta
Phys. Rev. **159**, 98 (1967)

Pomysł: rozwinąć położenie \mathbf{r} w chwili $t+\Delta t$ i $t-\Delta t$ w szereg Taylora

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t - \Delta t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t) + \mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

**tylko o jeden rząd
mniej dokładny niż RK4**

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t) + \mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

Schemat Verleta

Jeśli chodzi nam tylko o tor ruchu: świetny schemat.

Nie używa *prędkości*, ale ta często potrzebna:

np do wyliczenia energii, ale również : sił (np. oporu, Lorentza)

jeśli siły niezależne od prędkości, a informacja o nich potrzebna jest do innych celów
można - wykonać krok do $t+\Delta t$, a potem

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \longleftarrow$$

rzęd błędu wyższy,
wciąż dokładnie dla ruchu
jednostajnie przyspieszonego
 a stałe między t a Δt

jeśli siły zależą od prędkości: nie wykonamy kroku do $t+\Delta t$, możemy co najwyżej:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

kiepsko: wynik dokładny tylko dla $a=0$

prędkościowa wersja schematu Verleta (dający prędkości jednocześnie z położeniami)

Położenia – poświęcamy jeden rząd dokładności:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Potrzebny przepis na prędkość w chwili $t + \Delta t$ z błędem $O(\Delta t^2)$:

Rozwinąć \mathbf{r} w Taylora względem punktu $t + \Delta t$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{V}(t + \Delta t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t + \Delta t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Dodać stronami:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t)) + O(\Delta t^2) \quad (\text{wzór potencjalnie niejawny})$$

Wzory podkreślone na czerwono – Verlet prędkościowy.

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t)) + O(\Delta t^2)$$

Verlet prędkościowy

$$\mathbf{V}(t + \Delta t/2) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}(t)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta t\mathbf{V}(t + \Delta t/2)$$



Inny (popularny) zapis wzorów w czerwonej ramce

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t + \Delta t/2) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}(t + \Delta t)$$

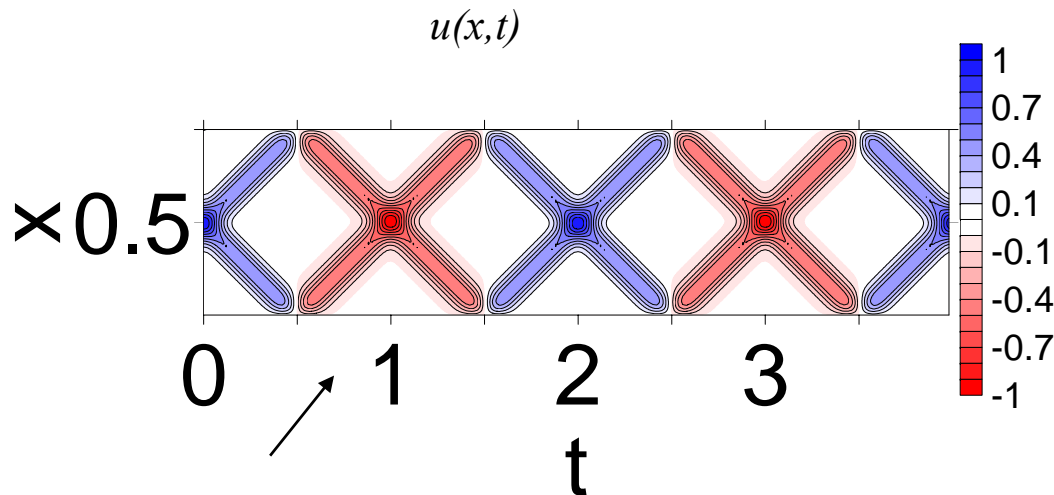
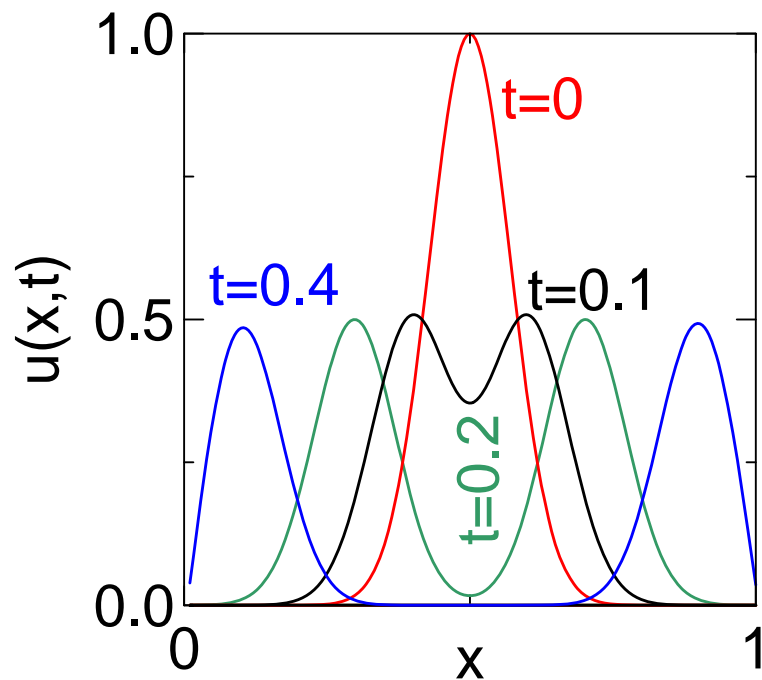
uwaga: jeśli siły (przyspieszenia) zależą od prędkości
ostatnie równanie jest niejawne

Rozwiązania numeryczne 1. (laboratorium)

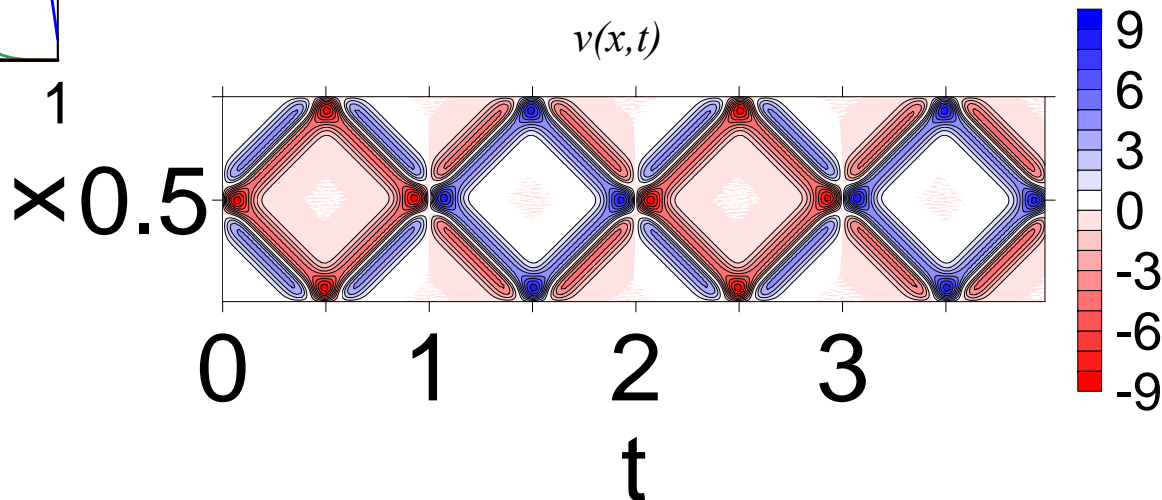
$L=1$

$u(x,t=0)=\exp[-100(x-0.5)^2]$

$v(x,t=0)=0$



Odbicie ze zmianą fazy (idzie górą , wraca dołem)

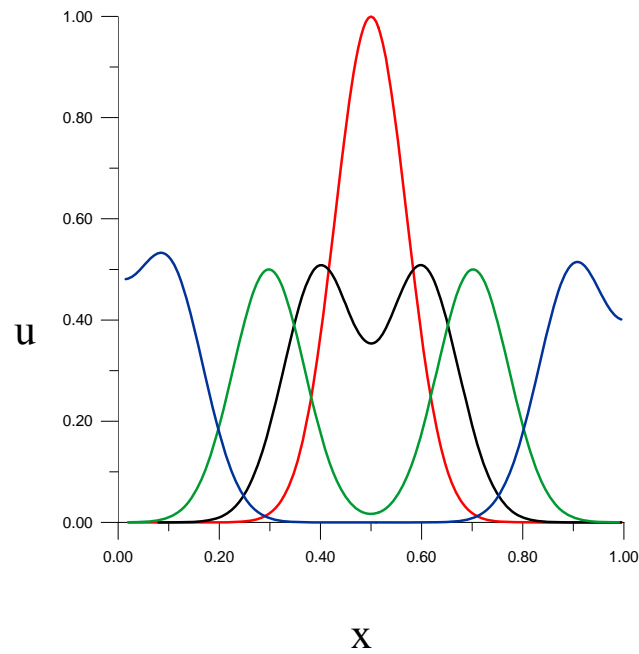
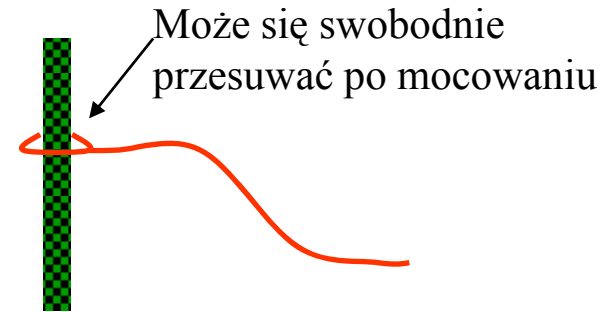


Rozwiązanie numeryczne 2.

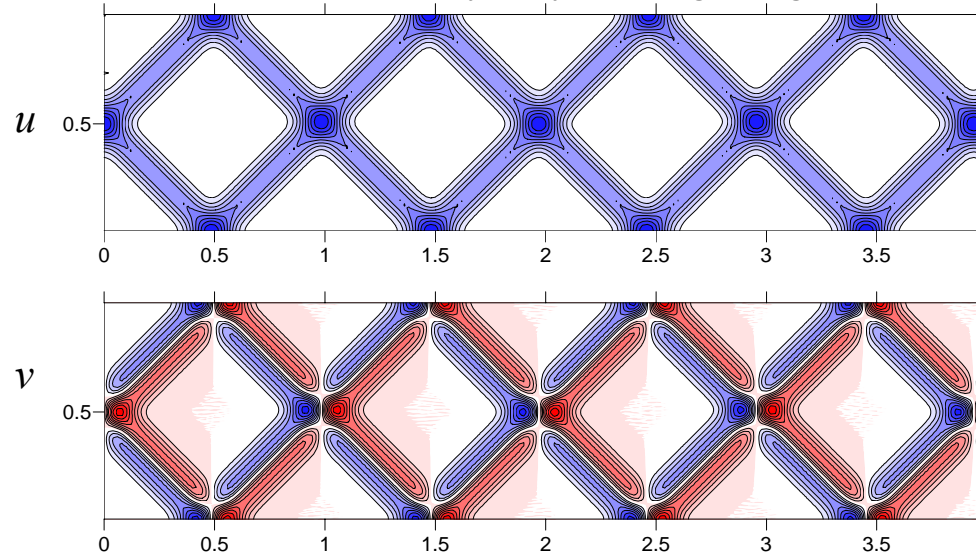
Swobodne warunki brzegowe:
na brzegach na strunę nie działa żadna siła pionowa:

Warunek brzegowy
Neumana (na pochodną)
zamiast Dirichleta
(na wartość funkcji)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x=0,t)} = 0$$



Odbicie bez zmiany fazy: idzie górą, górą wraca



energia drgania:

$$dE = \frac{1}{2}\rho(x)dxv^2(x, t) + \frac{1}{2}T_0dx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

kinetyczna

Potencjalna: odkształcenie struny

Dla $\rho(x)=\rho$

$$E = \frac{1}{2}\rho \int_0^L v^2(x, t)dx + \frac{1}{2}T_0 \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

Dla pojedynczego modu własnego

$$u(x, t) = \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

$$E = \frac{\omega_n^2}{2}\rho \cos^2(\omega_n t) \int_0^L \sin^2(k_n x)dx + \frac{k_n^2}{2}T_0 \sin^2(\omega_n t) \int_0^L \cos^2(k_n x)dx$$

$$E = \frac{\omega_n^2}{2}\rho \cos^2(\omega_n t) \frac{L}{2} + \frac{k_n^2}{2}T_0 \sin^2(\omega_n t) \frac{L}{2}$$

$\omega=kc$
$T_0=\rho c^2$

$$E = \frac{L}{4}(kc)^2 \rho (\cos^2(\omega_n t) + \sin^2(\omega_n t)) \leftarrow \text{Kinetyczna na potencjalną się zmienia, całkowita zachowana}$$

Analiza chwilowa drgania

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

Rozwiązując równanie falowe schematem Verleta można z zależności czasowych wydobyć częstości własne bez konieczności rozwiązywania równania własnego

Gdy drgania tłumione - częstość przestrzenna modów własnych nie ulega zmianie (zobaczmy), ale czasowa – tak.

Analiza chwilowa drgania na podstawie wychylenia zależności położeniowych = wychylenia $g(x)$ i prędkości $h(x)$ w *danej chwili*.

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx$$

$$s_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L h(x) \sin(k_n x) dx$$

Równanie fali tłumionej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{du}{dt} \quad \begin{array}{l} a > 0 = \text{stała tłumienia} \\ c \text{ niezależna od położenia} \end{array}$$

Opory związane z prędkością struny [np. powietrza]

Warunki brzegowe $u(x=0,t)=u(x=L,t)=0$

Warunki początkowe $u(x,t)$ oraz $v(x,t)$.

Mody normalne dla fali tłumionej:

Poszukajmy rozwiązania metodą separacji zmiennych $u(x,t)=X(x)T(t)$

$$XT'' = c^2 X''T - 2aT'X / : XT$$

$$\frac{T''}{T} + \frac{2aT'}{T} = \frac{c^2 X''}{X} = -\omega^2$$

część przestrzenna bez zmian!

$$X_n(x) = \sin(k_n x)$$

$$k_n = n\pi / L$$

$$k = \omega / c$$

Część przestrzenna:
$$\frac{T''}{T} + \frac{2aT'}{T} = -\omega_n^2 = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2$$

$$T'' + 2aT' + \omega_n^2 T = 0$$

wstawiamy $T = \exp(rt)$, równanie charakterystyczne: $\exp(rt) [r^2 + 2ar + \omega_n^2] = 0$,
szukamy rozwiązań na r

możliwe przypadki: 2 pierwiastki rzeczywiste, jeden podwójny, obydwa zespolone

Warunki początkowe: $T'(t = 0) = 0$ Struna spoczywa w chwili początkowej

$T(t = 0) = 1$ Rozwiązanie określone co
do stałej multiplikatywnej (równanie jednorodne)

$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : \exp(-at) \left[\cosh\left(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh\left(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t\right) \right] \\ \omega_n = a : \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : \exp(-at) \left[\cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t\right) \right] \end{cases}$$

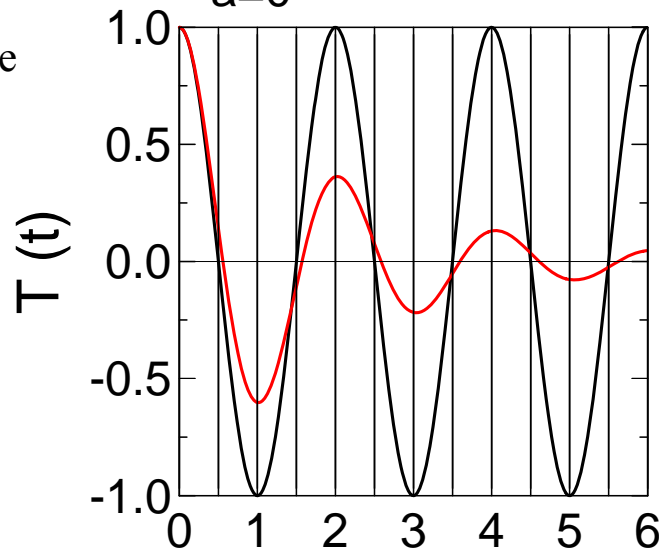
$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : \exp(-at) \left[\cosh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) \right] \\ \omega_n = a : \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : \exp(-at) \left[\cos(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) \right] \end{cases}$$

$$\omega_n = nc\pi/L$$

$$L=1, c=1, \omega_n = n\pi$$

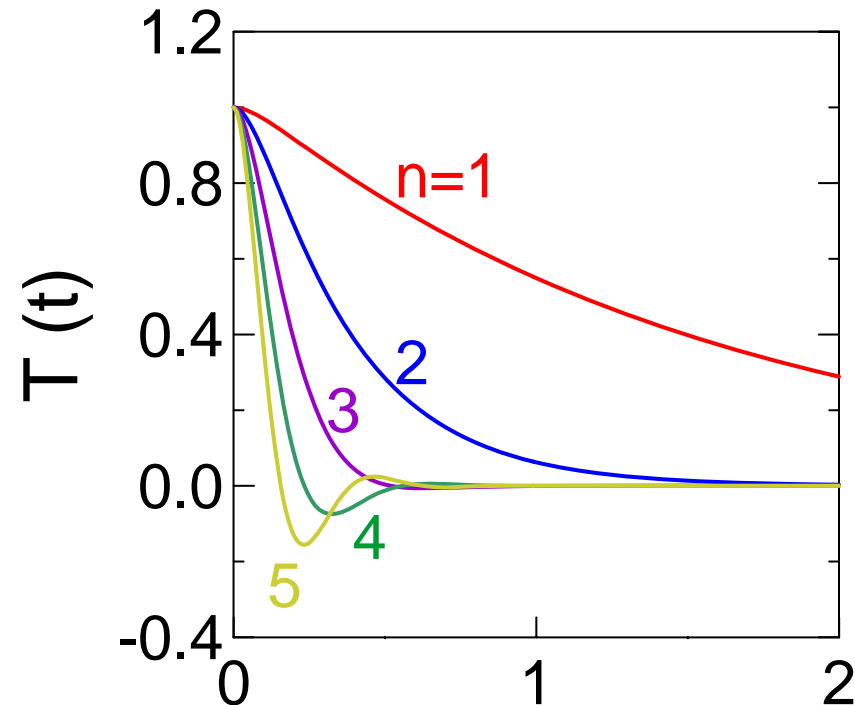
Słabe tłumienie $a < \omega_1$
 $a=0.5$
 $a=0$

Drganie
z ω_1



Poza zanikiem drgania
widzimy zmniejszenie częstotliwości

$a=8$, ω_1 i ω_2 = „przetłumione”
pozostałe „tłumione”



Najpierw zgasną wyższe tłumienia

Rozwiązanie równania fali tłumionej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{du}{dt}$$

rozwiązanie ogólne:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(t) \sin(k_n x)$$

Położeniowa analiza Fourierska

- rozkład na mody normalne w danej chwili : $c_n(t)$
= część przestrzenna nie zmienia się pod wpływem tłumienia.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) & \int_0^L u(x, t) \sin(k_n x) dx &= c_n \frac{L}{2} \cos(\omega_n t) \\ v(x, t) &= -\omega_n \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) & \int_0^L v(x, t) \sin(k_n x) dx &= -\omega_n c_n \frac{L}{2} \sin(\omega_n t) \end{aligned}$$

↑
w ogólności
zależne od czasu

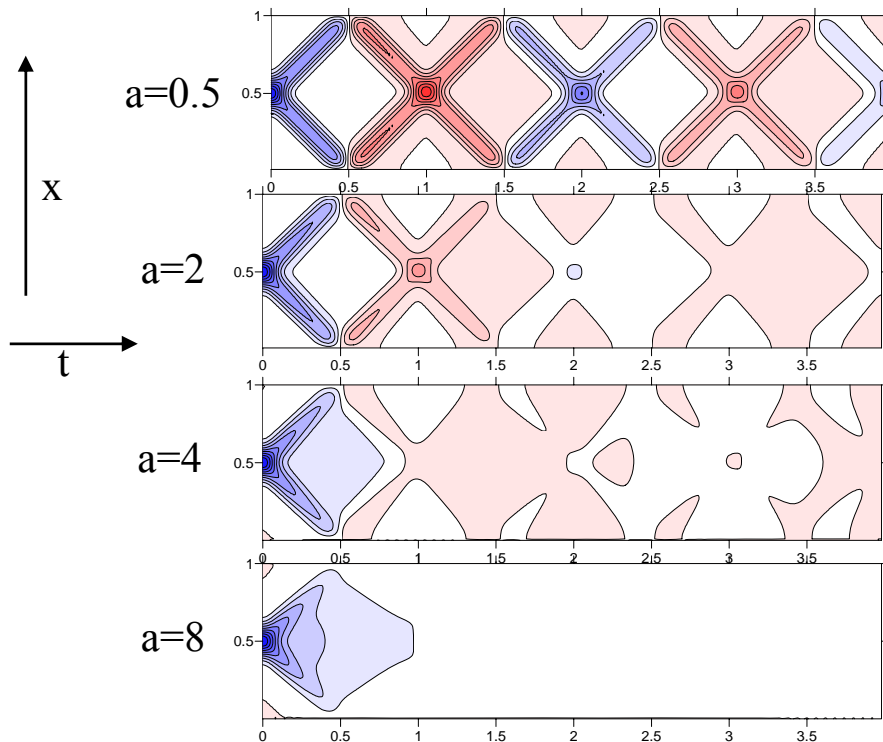
aby wydobyć c_n : drugie równanie
wydzielimy przez ω_n , podniesiemy
w kwadracie i dodamy

$$c_n^2 = \left(\frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin(k_n x) dx \right)^2 + \left(\frac{2}{L\omega_n} \int_0^L v(x, t) \sin(k_n x) dx \right)^2$$

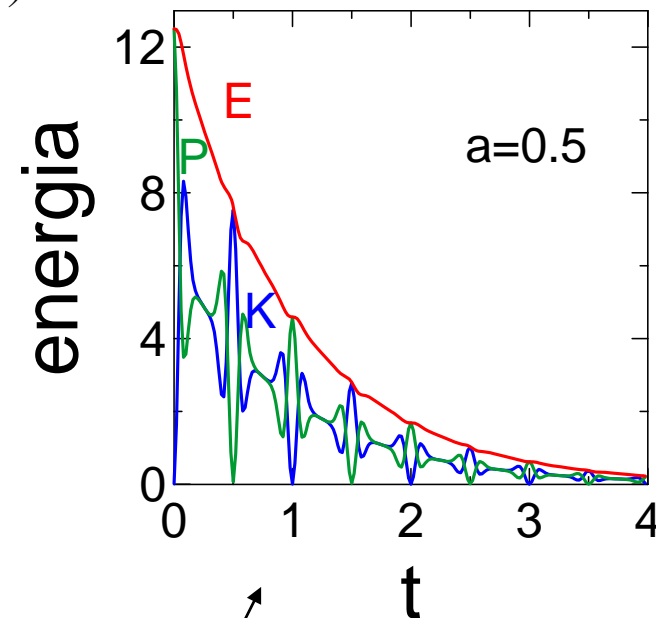
udział względny: $r_n^2 = \frac{c_n^2}{\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2}$

Przykład: $L=1$

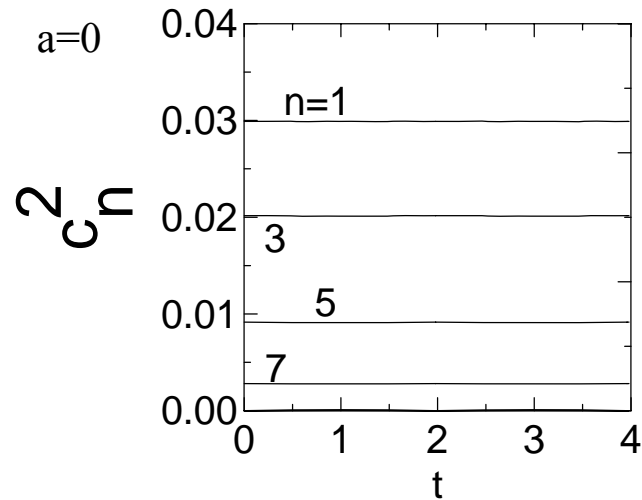
W chwili początkowej pakiet $f(x, t=0) = \exp(-100(x-0.5)^2)$



$E=K+P$ (kinetyczna+potencjalna)



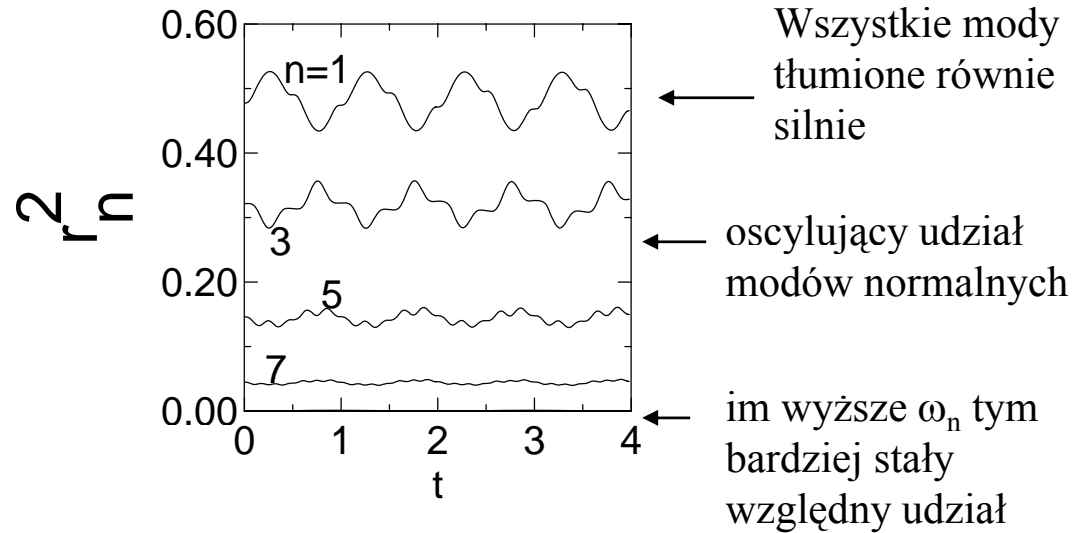
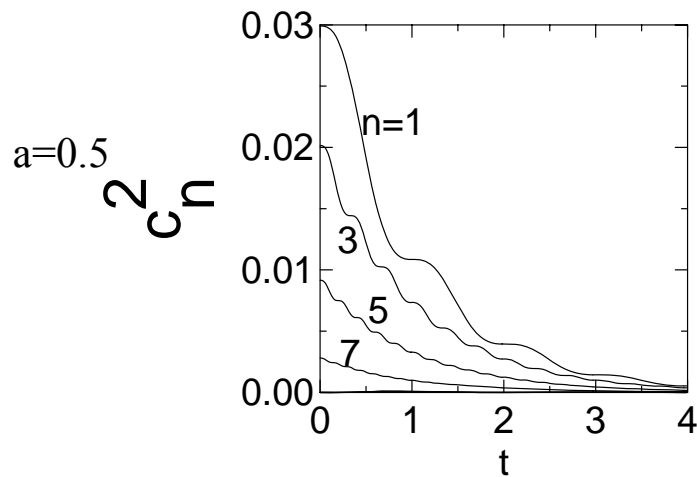
Spadek E najszybszy gdy K największe

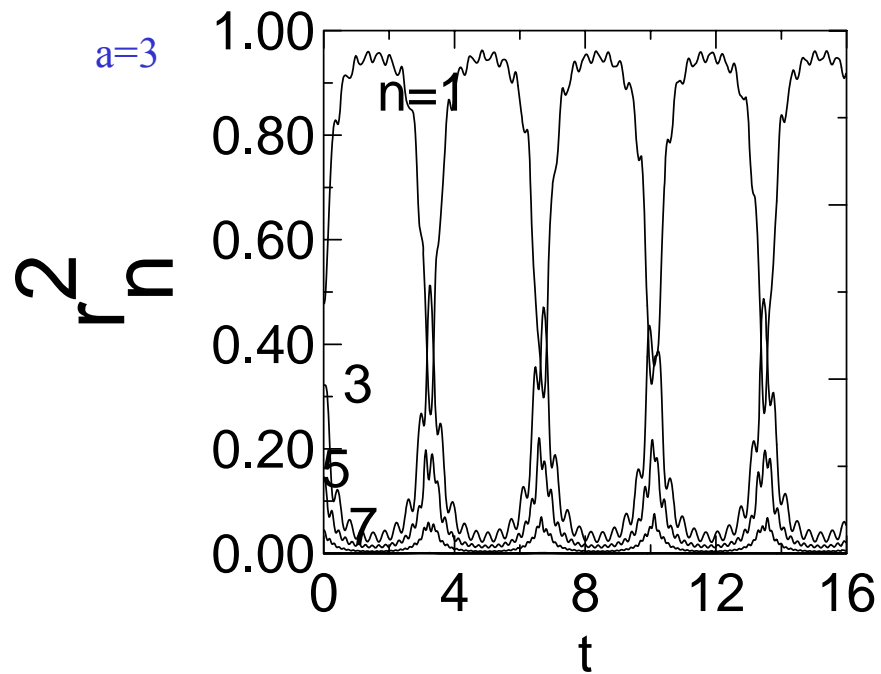
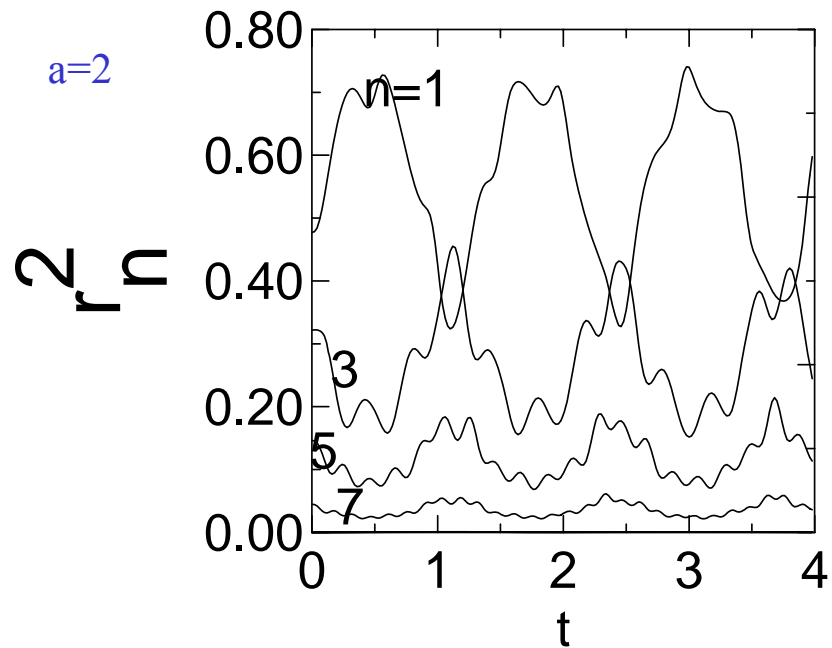


$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : \exp(-at) \left[\cosh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) \right] \\ \omega_n = a : \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : \exp(-at) \left[\cos(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) \right] \end{cases}$$

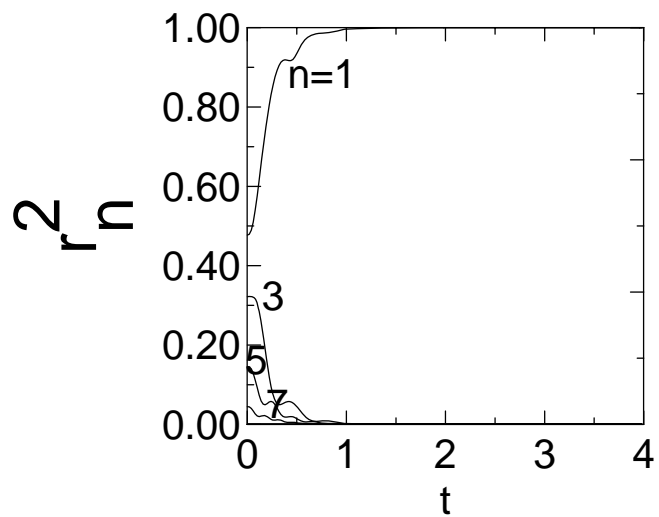
$$\omega_n = n\pi$$

Parzyste n nie wnoszą przyczynku (symetria)

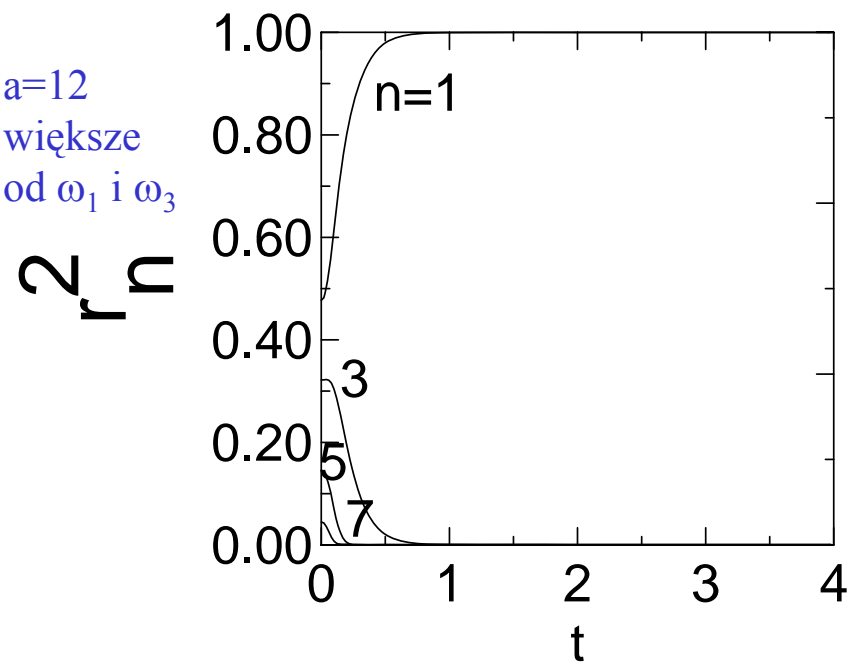




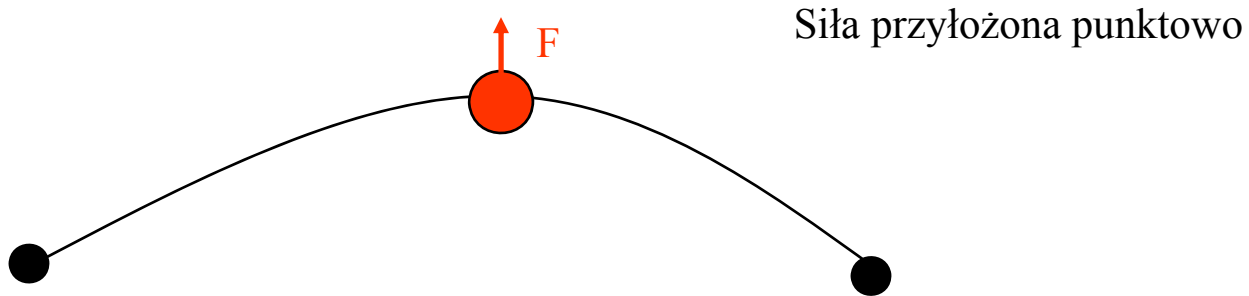
$a=4$, większe tylko od ω_1



$a=12$
większe
od ω_1 i ω_3



Laboratorium: R. hiperboliczne z niejednorodnością: Drgania tłumione z siłą wymuszającą



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial u}{\partial t} + a_F(x, t) \leftarrow \text{niejednorodność}$$

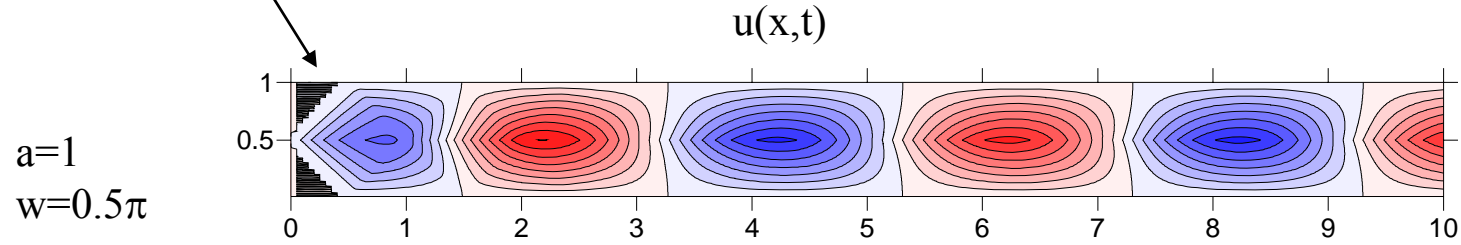
$$a_F(x, t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{dla } x = x_0 \\ 0 & \text{w pozostałych punktach} \end{cases}$$

↑
wymuszenie periodycznie zmienne

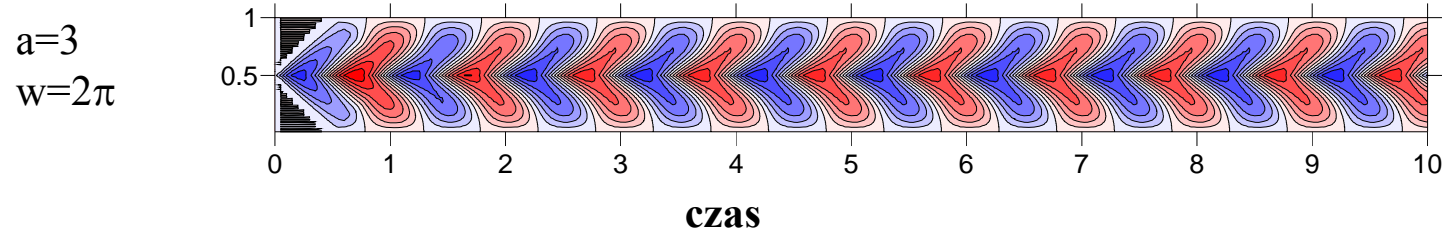
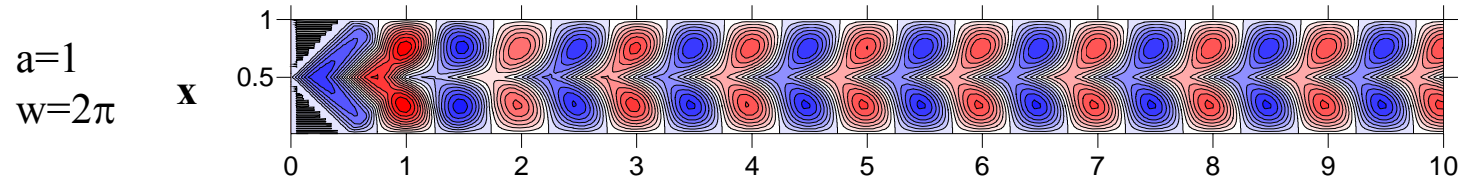
Dla $t=0$ struna spoczywa ($v(x,t)=0$) w położeniu równowagi ($u(x,t)=0$)

Prędkość dźwięku = 1

Siła przyłożona w środku struny $x_0=1/2$



pojawia się „stan ustalony” = drgania periodyczne.



W stanie ustalonym ruch jest periodyczny z okresem siły wymuszającej (*mode locking*).

Stan ustalony a energia struny

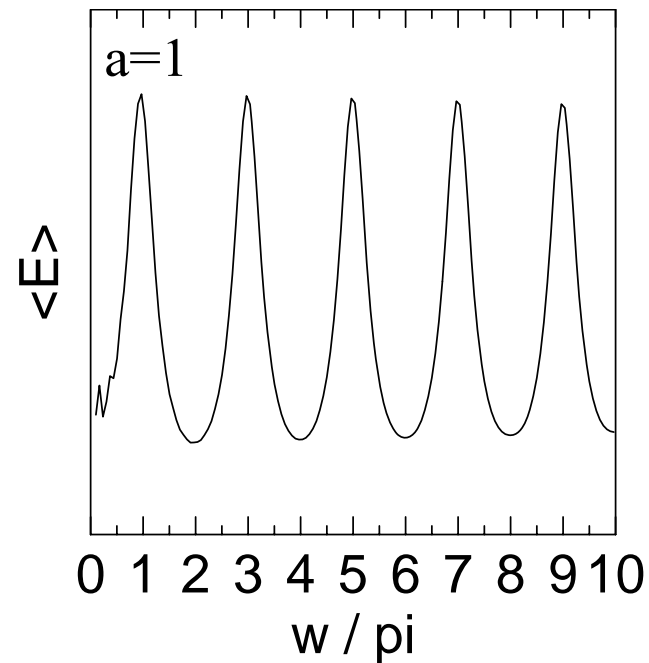
Siła przyłożona w środku struny $x_0=1/2$

Brakuje w_{2n} ??
Dlaczego?

Średnia energia w stanie ustalonym:

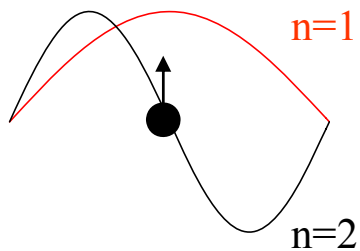
$$\langle E \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt,$$

Rezonans



Stan ustalony a energia struny

Siła przyłożona w środku struny $x_0=1/2$



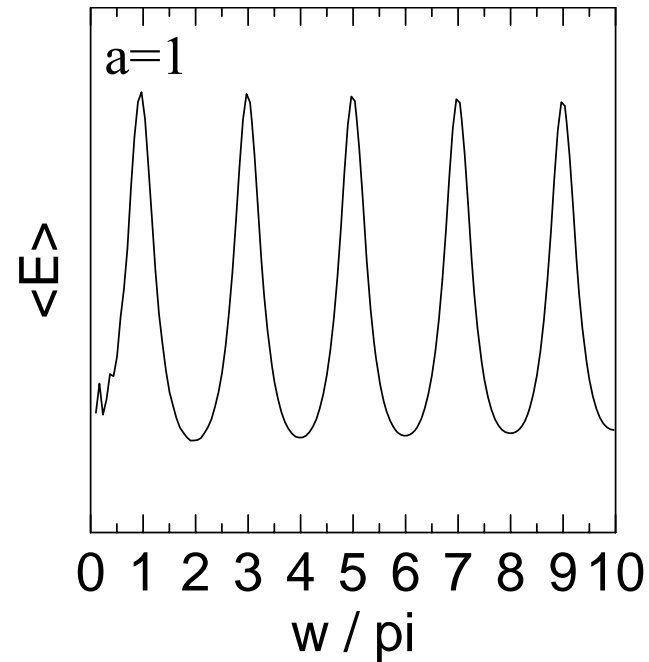
Brakuje w_{2n} ??

W środku
studni = węzeł
dla parzystych n

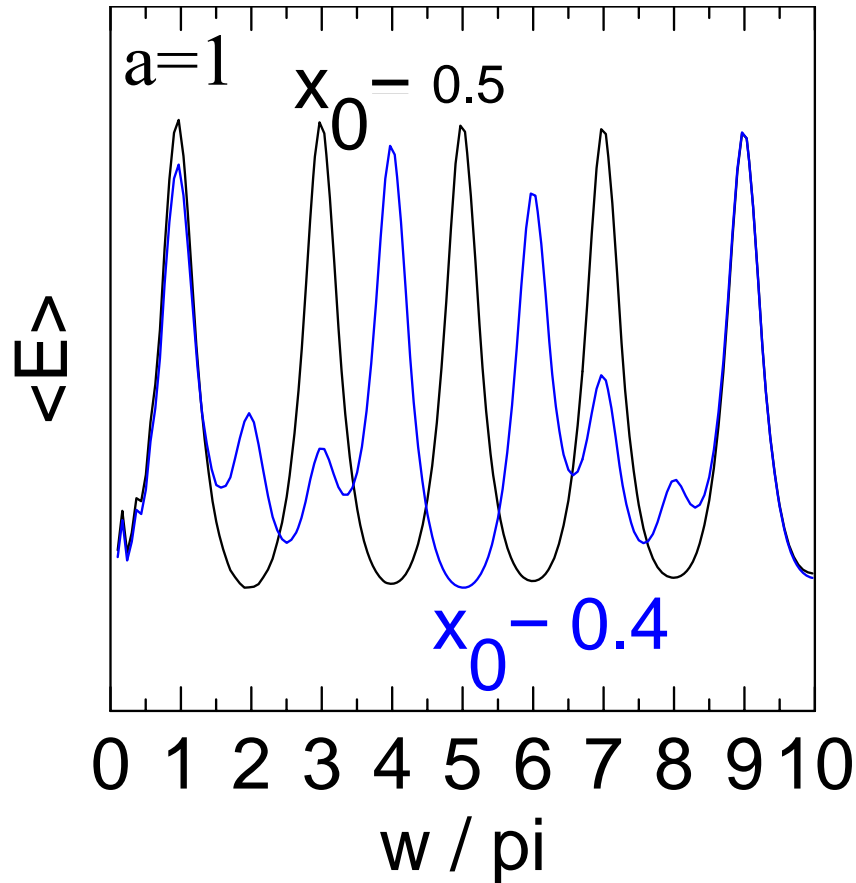
Średnia energia w stanie ustalonym:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt,$$

Rezonans



mody z parzystym n wzbudzone gdy punkt przyłożenia przesunąć ze środka



Krzywa rezonansowa w przybliżeniu opisana przez sumę funkcji Lorentza

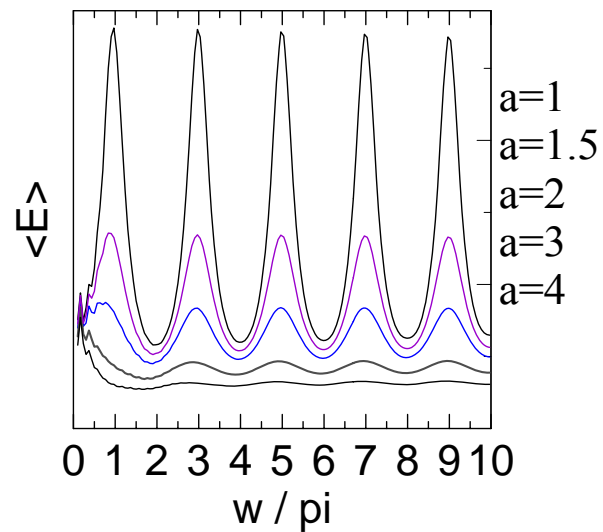
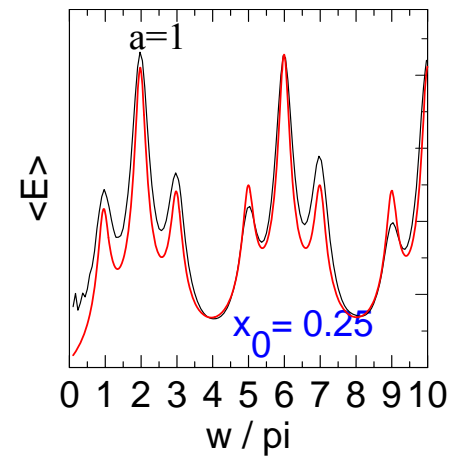
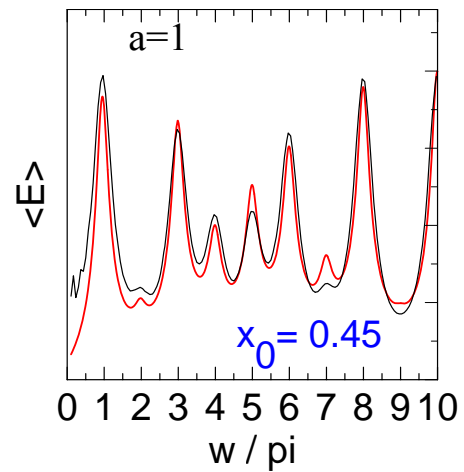
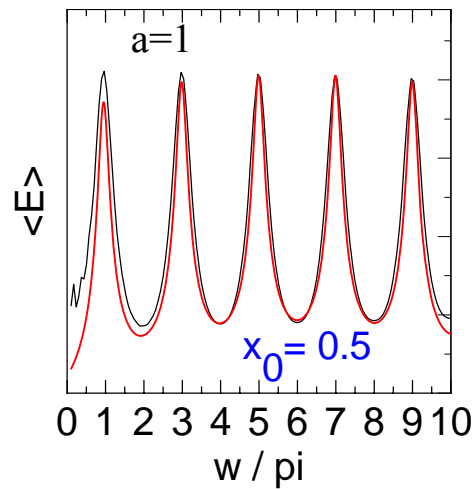
$$s(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{(w - w_i)^2 + (a/2)^2}$$

$$w_i = \sqrt{\omega_i^2 - a^2}$$

Siła sprzężenia = kwadrat wartości modu normalnego w miejscu przyłożenia siły:

$$c_i^2 = \sin^2(i\pi x_0)$$

Średnie energie stanu ustalonego a wzory lorentowskie

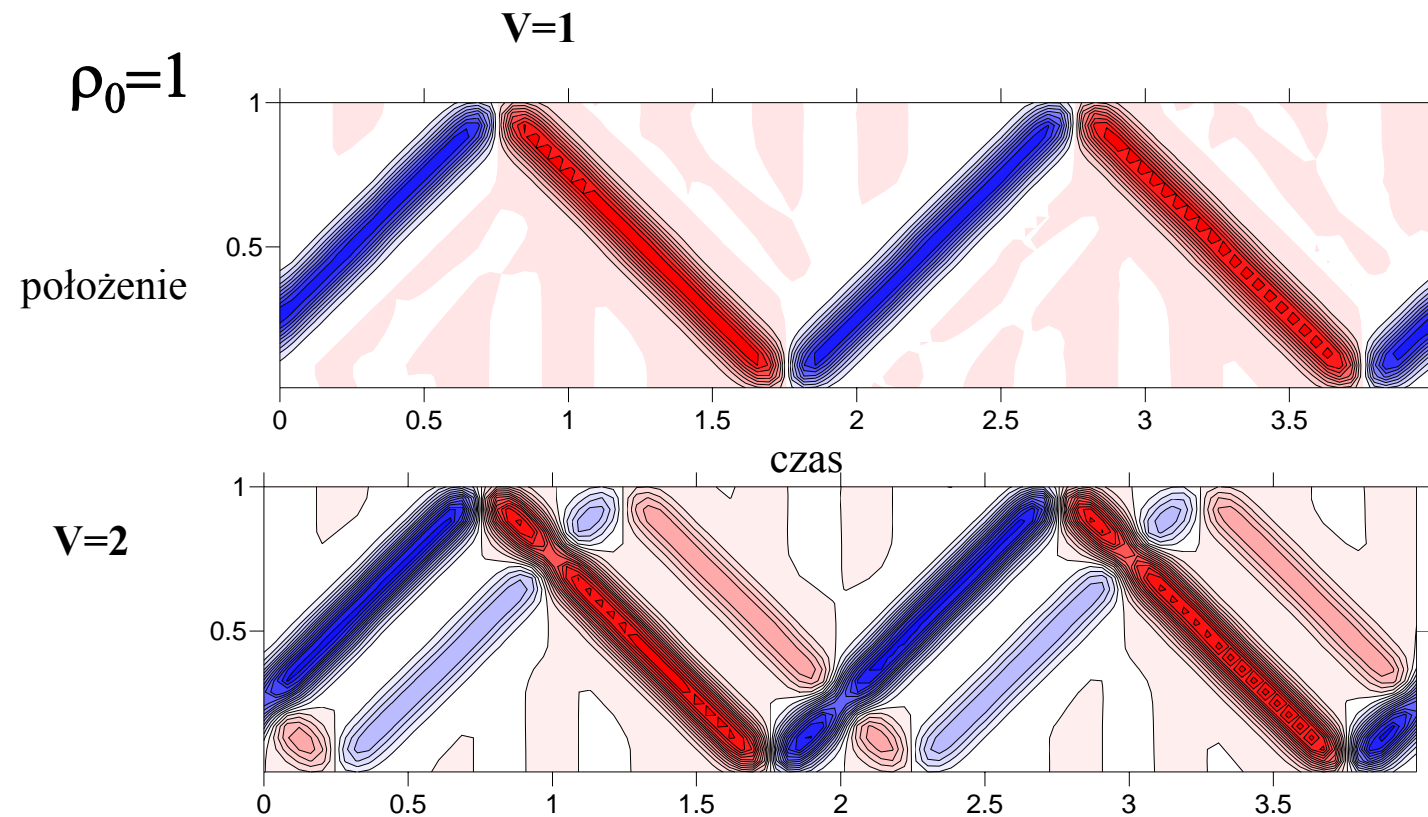


Rezonans a stała tłumienia

Laboratorium 2: odbicie pakietu od granicy ośrodków

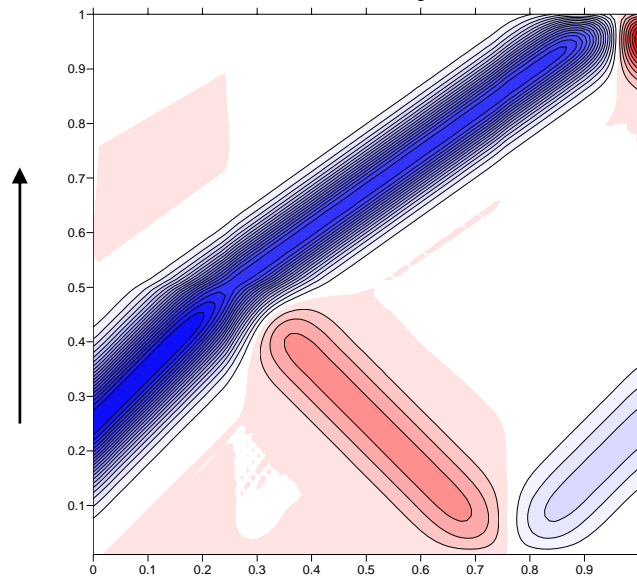
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < \frac{1}{2} \\ \rho_0 & \text{dla } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u(x - Vt) = \exp(-100(x - Vt - 1/4)^2)$$

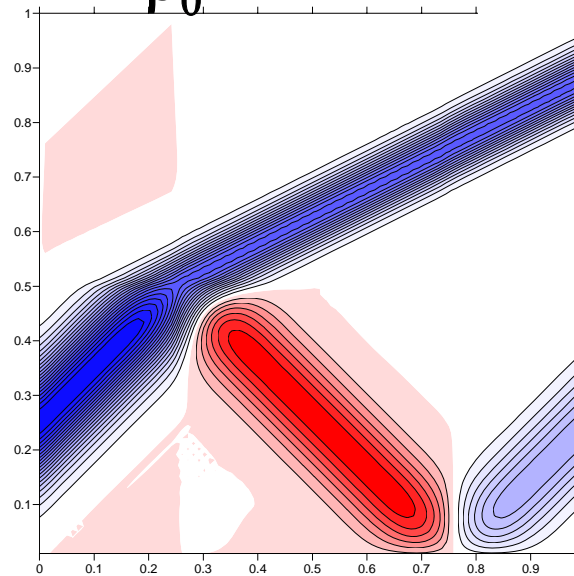


$V=1$

$\rho_0=2$

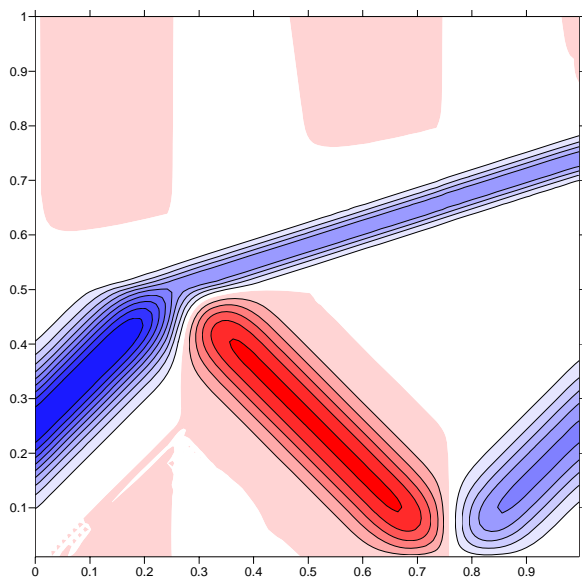


$\rho_0=4$

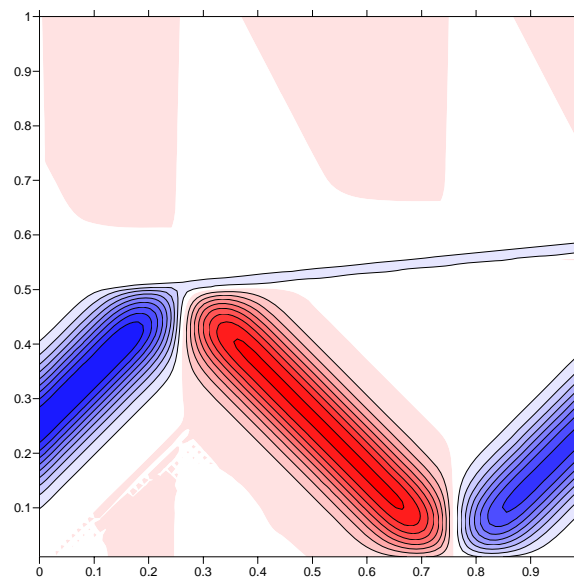


$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < \frac{1}{2} \\ \rho_0 & \text{dla } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\rho_0=10$



$\rho_0=100$

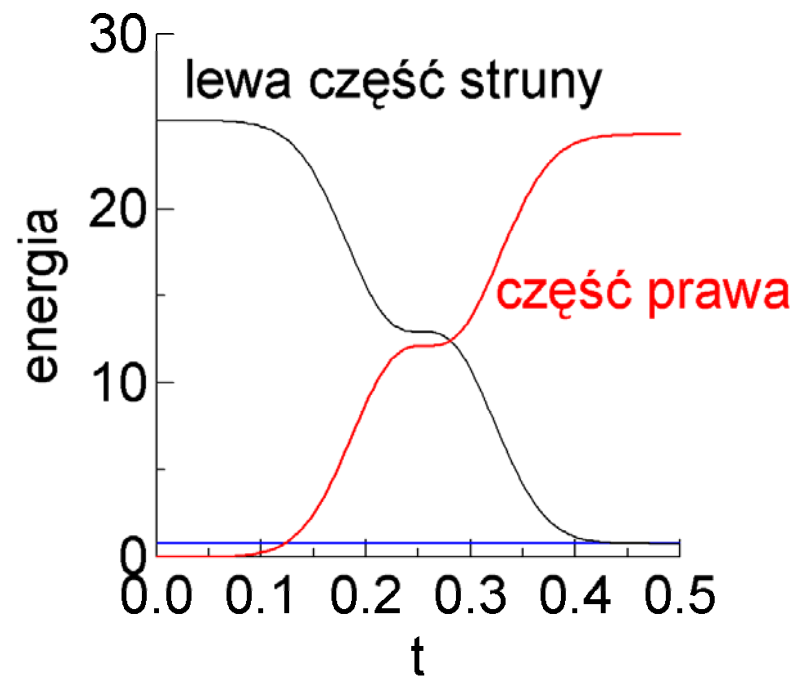


czas

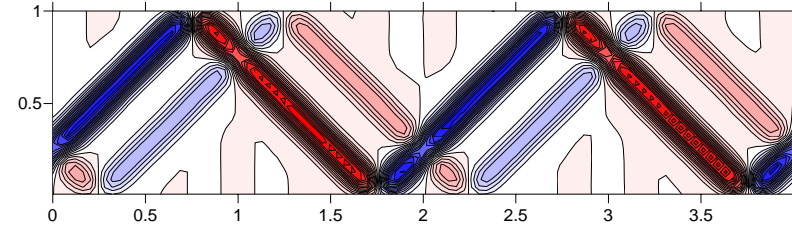
Część energii, która
pozostaje po lżejszej stronie struny $\rho=1$
po odbiciu

$$\left(\frac{1 - \sqrt{\rho_0}}{1 + \sqrt{\rho_0}} \right)^2$$

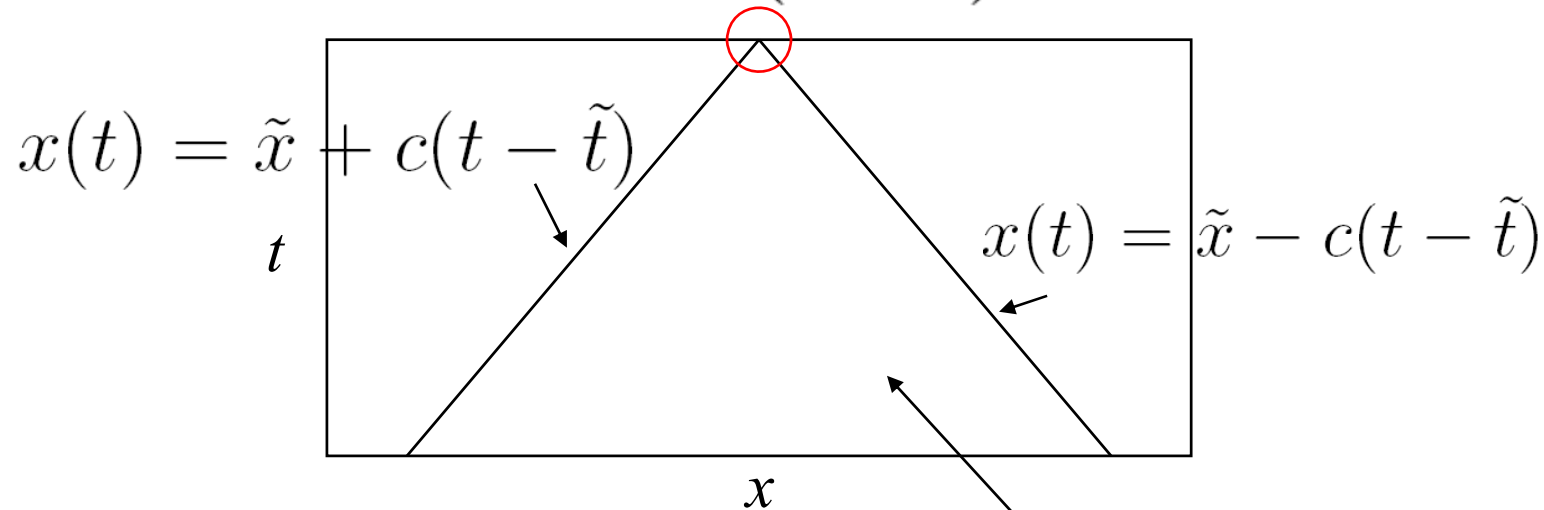
$$\rho_0=2$$



**Domena zależności (Domain of Dependence)
i kryterium stabilności CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)**



$$P(\tilde{x}, \tilde{t})$$



domena zależności:
tylko zdarzenia z trójkąta ograniczonego
charakterystykami mogą
mieć wpływ na rozwiązanie w punkcie P

Numeryczna domena zależności
[NUMERYCZNA PRZESZŁOŚĆ]

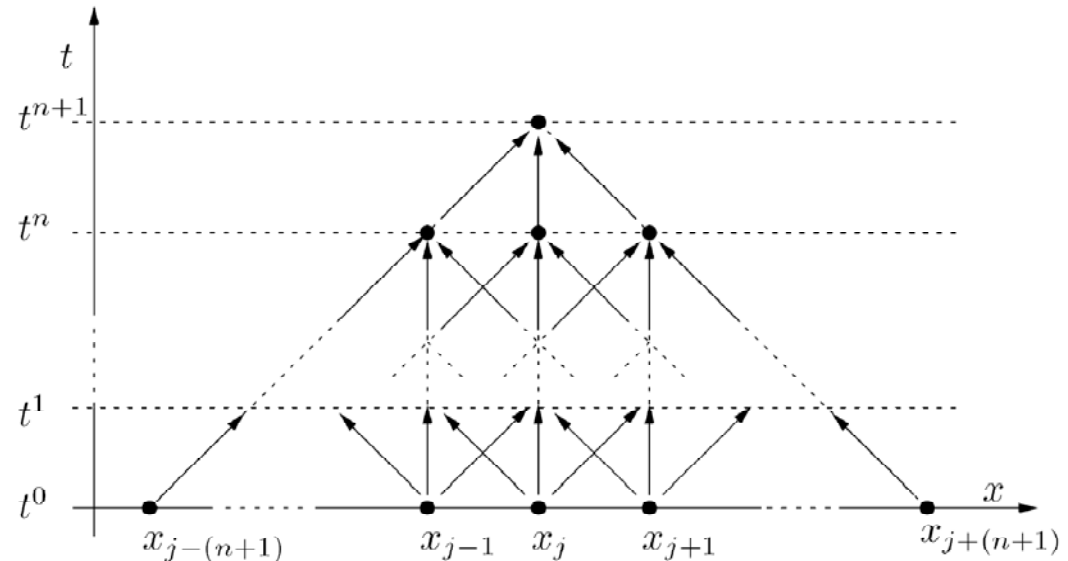
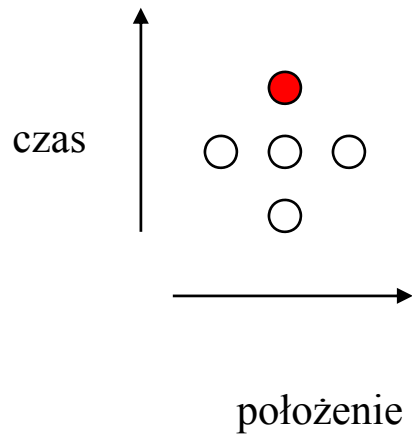
kryterium stabilności CFL
(Courant-Friedrichs-Lewy)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

schemat Verleta dla przyspieszenia danego przez prawą stronę równania:

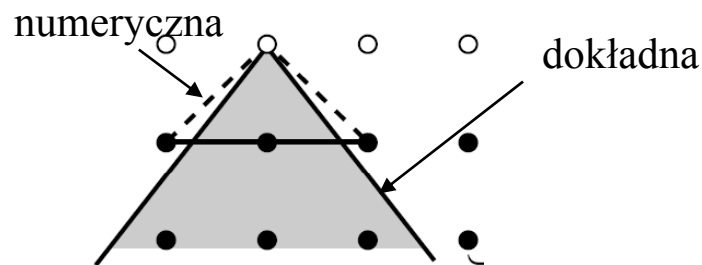
$$\frac{u(j, n+1) + u(j, n-1) - 2u(j, n)}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$u(j, n+1) = c^2 \Delta t^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} - u(j, n-1) + 2u(j, n) + O(\Delta t^4, \Delta x^2)$$



kryterium stabilności CFL
(Courant-Friedrichs-Lewy)

$$u(j, n+1) = c^2 \Delta t^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} - u(j, n-1) + 2u(j, n) + O(\Delta t^4, \Delta x^2)$$



$$c \Delta t \leq \Delta x$$

warunek: jak dla adwekcji

aby przekroczyć kryterium CFL (prędkość dźwięku): schematy niejawne dla równań mechaniki
standardowy schemat niejawny = schemat Newmarka
(dlaczego Crank-Nicolson się nie stosuje?)

algorytm Newmarka (uogólnienie prędkościowego Verleta,
standardowy chemat niejawny dla równań opisujących układy dynamiczne)

w Verlecie prędkościowym
używamy
przepisów:
z $\gamma=1/2$

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 a(t)$$

$$v(t+dt) = v(t) + dt [(1-\gamma)a(t) + \gamma a(t+dt)]$$

Czyli: w Verlecie: jawna formuła na położenie, potencjalnie niejawna na prędkość
ta nie wystarczy dla bezwzględnej stabilności przy kroku czasowym $cdt > dx$ (zobaczmy analizą v. Neumanna)

dla Newmarka: wprowadzamy niejawność (ważenie przyspieszeń z teraźniejszości i przyszłości)
również do wzoru na położenia:

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

algorytm prędkościowy Newmarka

źródło: WJT DANIEL, computational mechanics **20** (1997) 272

zrobmy z tego formułę położeniową: bez prędkości, za to dwupoziomową (t+dt) względem t, t-dt
wyliminować prędkości : ↓

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

(*)

$$v(t+dt) = v(t) + dt [(1-\gamma)a(t) + \gamma a(t+dt)]$$

dla kroku poprzedniego =

$$u(t) = u(t-dt) + v(t-dt)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t-dt) + 2\beta a(t)]$$

dla kroku poprzedniego =

$$v(t) = v(t-dt) + dt [(1-\gamma)a(t-dt) + \gamma a(t)]$$

$$u(t) = u(t-dt) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t-dt) + 2\beta a(t)] - dt^2 [(1-\gamma)a(t-dt) + \gamma a(t)]$$

$$u(t) = u(t-dt) + v(t)dt + dt^2/2 [(2\gamma-2\beta-1)a(t-dt) + (2\beta-2\gamma)a(t)]$$

$$u(t-dt) = u(t) - v(t)dt - dt^2/2 [(2\gamma-2\beta-1)a(t-dt) + (2\beta-2\gamma)a(t)] \quad (*)$$

dodamy stronami gwiazdki aby usunąć prędkość ze schematu

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

+ stronami

$$u(t-dt) = u(t) - v(t)dt + dt^2/2 [(-2\gamma + 2\beta + 1)a(t-dt) + (2\gamma - 2\beta)a(t)]$$

↓ skasujemy prędkość

$$u(t-dt) + u(t+dt) = 2u(t) + dt^2/2 [2\beta a(t+dt) + (1-4\beta + 2\gamma)a(t) + (-2\gamma + 2\beta + 1)a(t-dt)]$$

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma)a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2)a(t-dt)]$$

algorytm Newmark = wersja położeniowa, dwa parametry γ, β

dla porównania Verlet położeniowy

$$u(t + dt) = dt^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u(t) - u(t - dt)$$

wagi przy przyspieszeniu: $\beta + 1/2 - 2\beta + \gamma - \gamma + \beta + 1/2 = 1$

(wszystkie wybory dają schemat, który w granicy małego dt redukuje się do Verleta)

Newmark sprowadza się do Verleta gdy $\gamma = 1/2, \beta = 0$ (maks dokładność

lokalny błąd czwartego rzędu)

rola γ, β – zobaczymy jak się sprawdzają w praktyce

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma) a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2) a(t-dt)]$$

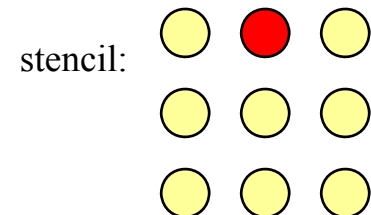
$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + \alpha a(t) + \delta a(t-dt)]$$

jak wykonać krok czasowy?

sposób rozwiązywania zależy od wyrażenie na a
dla struny:

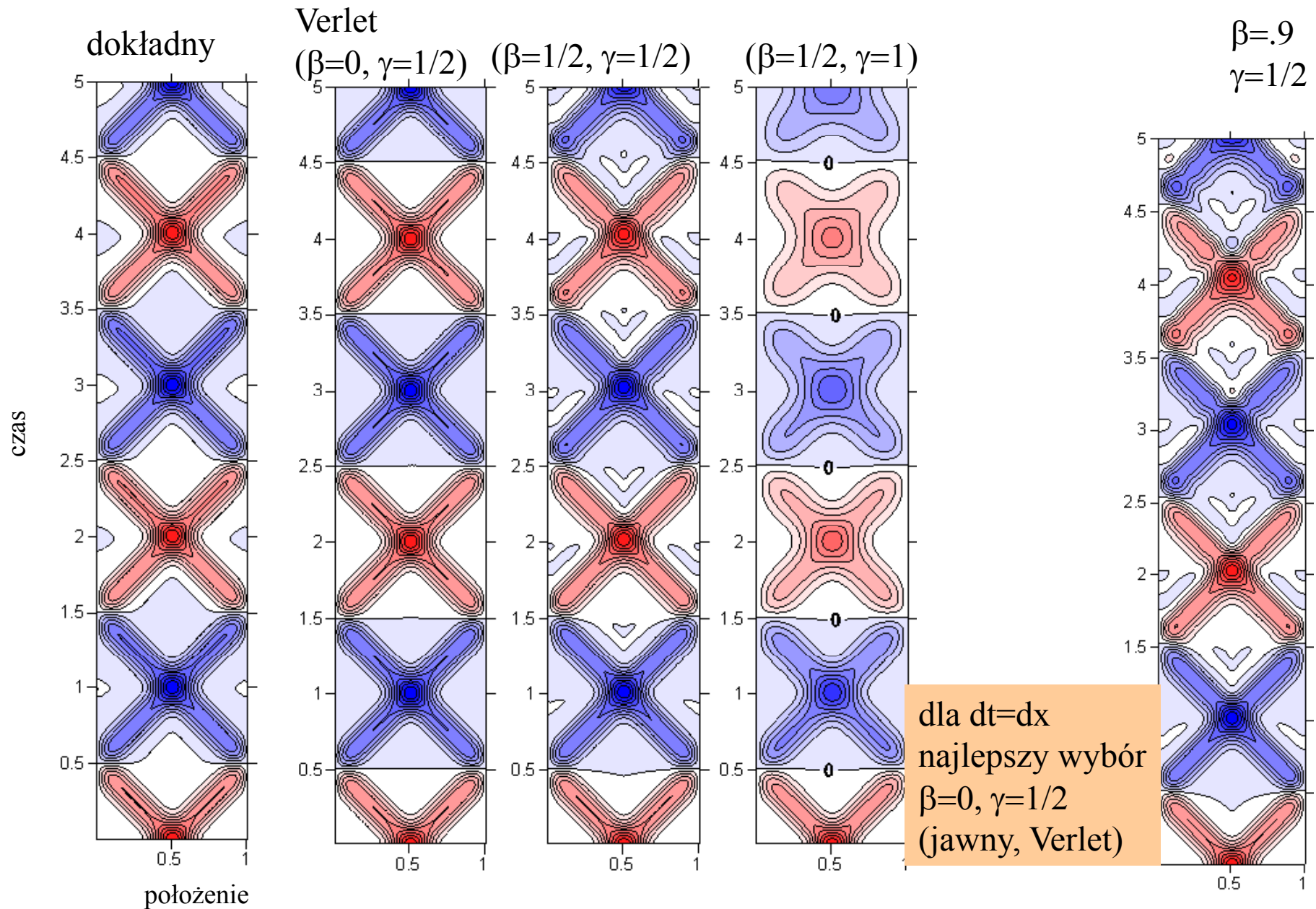
$$U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \frac{dt^2}{dx^2} \left[\beta \left(U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} \right) + \alpha \left(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n \right) + \delta \left(U_{j+1}^{n-1} + U_{j-1}^{n-1} - 2U_j^{n-1} \right) \right]$$

Po przegrupowaniu wyrazów:
układ równań liniowych z macierzą trójprzekątniową



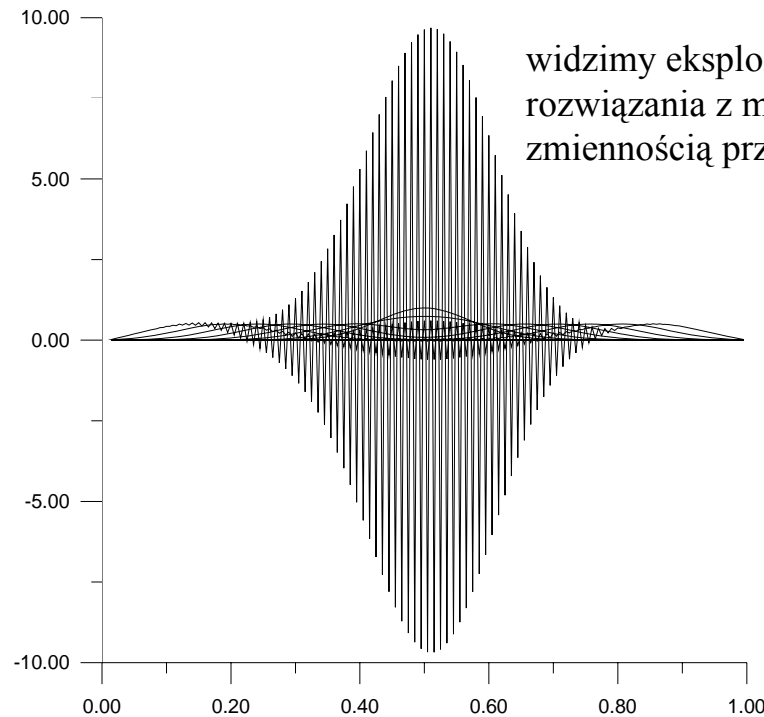
schemat Newmark MRS, struna
dt=dx

101 węzłów

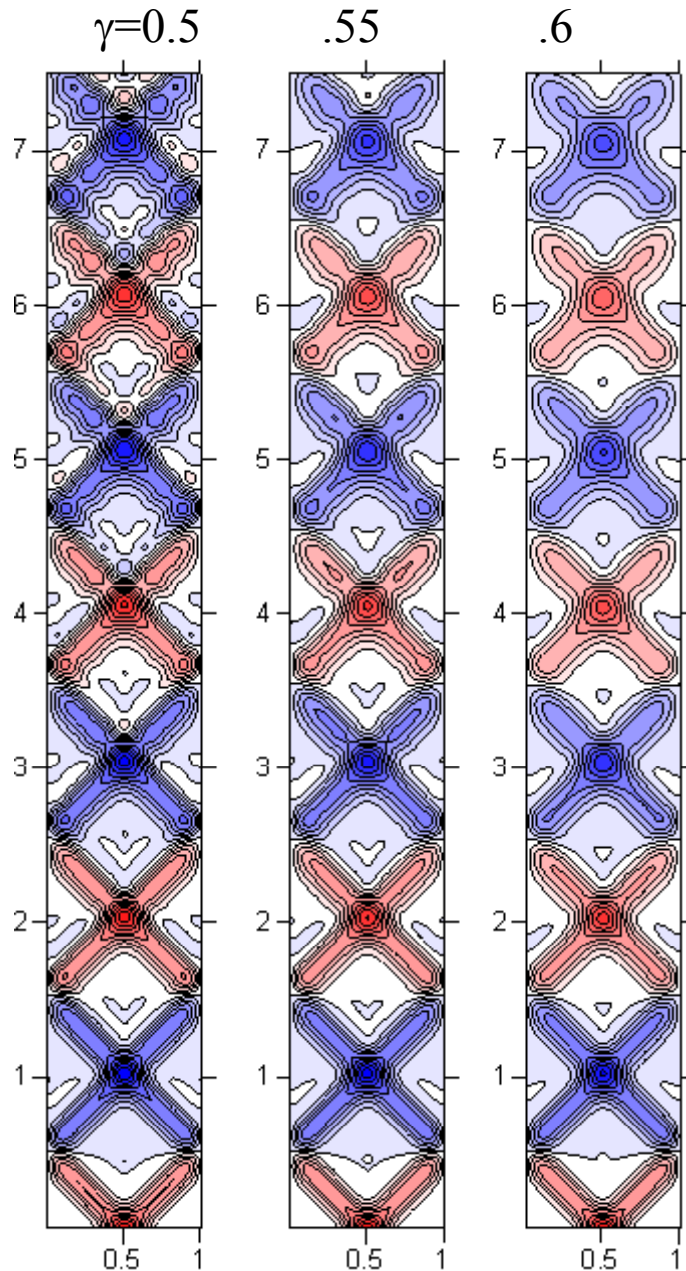


dla $dt=dx$
najlepszy wybór
 $\beta=0, \gamma=1/2$
(jawny, Verlet)

Verlet
dla $dt=dx*1.01$



Newmark jest po to aby przekroczyć kryterium CFL

rola γ ($dt=1.5dx$, $\beta=0.5$)MRS: schemat Newmark
rola parametrów metody

$\beta > 0$ – wynosi stabilność poza kryterium CFL,
kosztem generacji wyższych częstotliwości
przestrzennych

$\gamma > 1/2$ ogranicza
wzmacnianie
wyższych częstotliwości
kosztem dyssypacji
(zaniku całego pakietu)

$\gamma < 1/2$ – schemat jest niestabilny

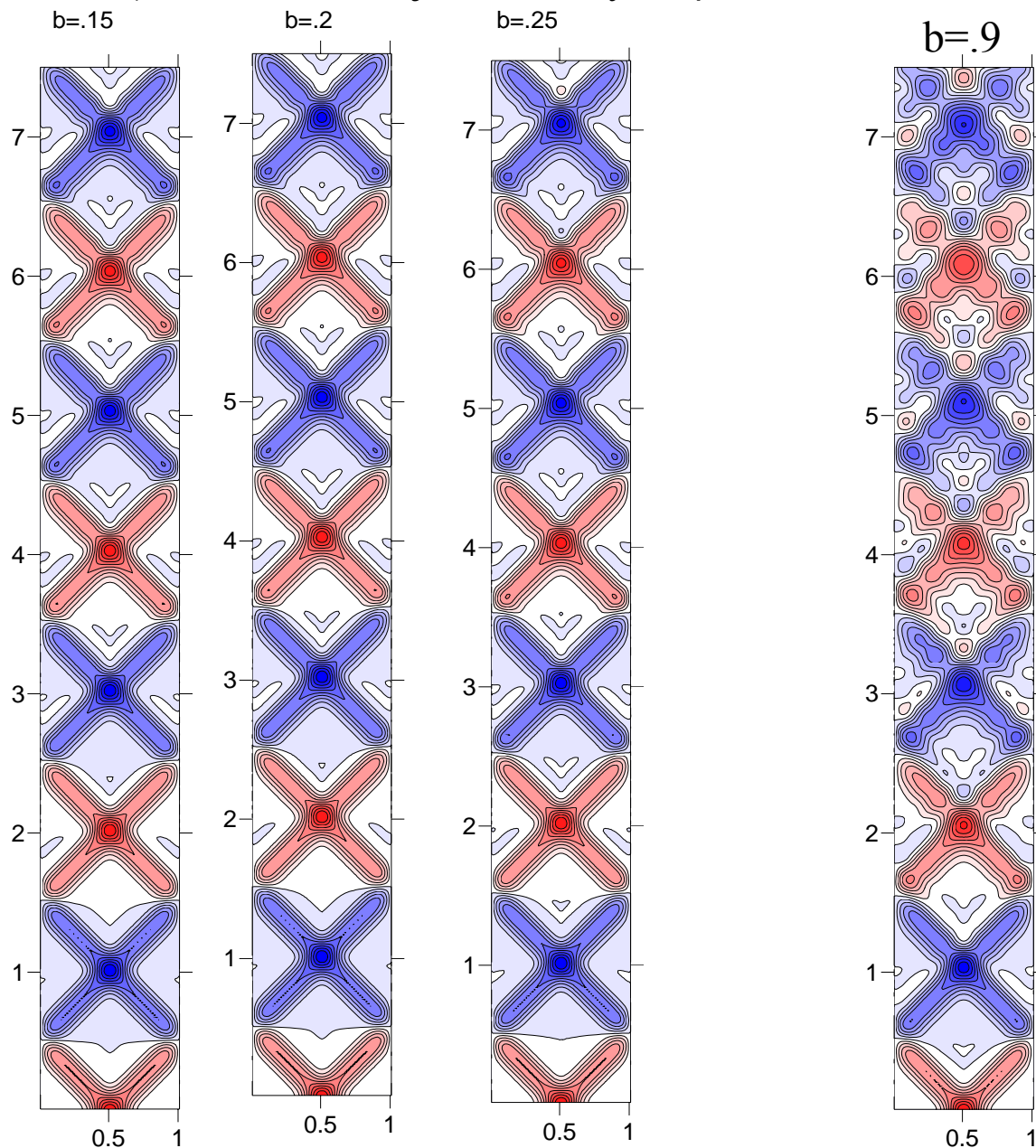
zostawmy $\gamma = 1/2$ (jak dla Verleta)
i manipulujmy β

poza CFL: $dt > cdx$

$dt=1.5dx$,

$\gamma=0.5$, schemat staje się stabilny dla $\beta > 0.15$

101 węzłów MRS



rosnące beta generuje
wyższe częstotliwości
wniosek:
najlepszy minimalne
 β przy którym
schemat jeszcze stabilny

czy można je wyznaczyć
analitycznie?

Projektowanie schematu Newmarka dla danego kroku czasowego.

dobrac minimalne β aby metoda była stabilna dla danego dt ?

Będziemy wiedzieli, że po wyższe β nie warto sięgać.

analiza von Neumanna dla $\gamma=1/2$

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma)a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2)a(t-dt)]$$

$$u(t+dt) - dt^2 \beta a(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [(1 - 2\beta)a(t) + \beta a(t-dt)]$$

Ansatz von Neumanna:

$$A_k^n = \lambda^{n+1} A_k^0$$

$$\lambda^2 [1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} (\cos(k\Delta x) - 1)] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} [\lambda(1 - 2\beta)2(\cos(k\Delta x) - 1) + \beta 2(\cos(k\Delta x) - 1)]$$

$$\lambda^2 [1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} [\lambda(1 - 2\beta)2c + \beta 2c]$$

$$\lambda^2 \left[1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} \left[\lambda(1 - 2\beta)2c + \beta 2c \right]$$

$$\lambda^2 \left[1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right] - 2\lambda \left[1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \right] + 1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c = 0$$

$$\Delta = 4 \left[1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \right]^2 - 4 \left[1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right]^2$$

$$\Delta = 4 \frac{dt^2}{dx^2} c \left(2 + \frac{dt^2}{dx^2} c - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right)$$

$$\lambda = \frac{1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \pm \frac{dt}{dx} \sqrt{c \left(2 + c \frac{dt^2}{dx^2} - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right)}}{1 - 2\beta c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

Sytuacja będzie taka: dopóki $\Delta < 0$: 2 pierwiastki, o module nie większym od 1
gdy $\Delta > 0$ metoda stanie się niestabilna

$$\lambda = \frac{1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \pm \frac{dt}{dx} \sqrt{c(2 + c \frac{dt^2}{dx^2} - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c)}}{1 - 2\beta c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$-2 < c < 0$ zawsze

żeby pod pierwiastkiem liczba ujemna
potrzeba aby:

$$2 + \frac{dt^2}{dx^2} c(1 - 4\beta) > 0 \quad \longrightarrow \quad \beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$|\lambda|^2 < 1$?

daje ten sam wynik

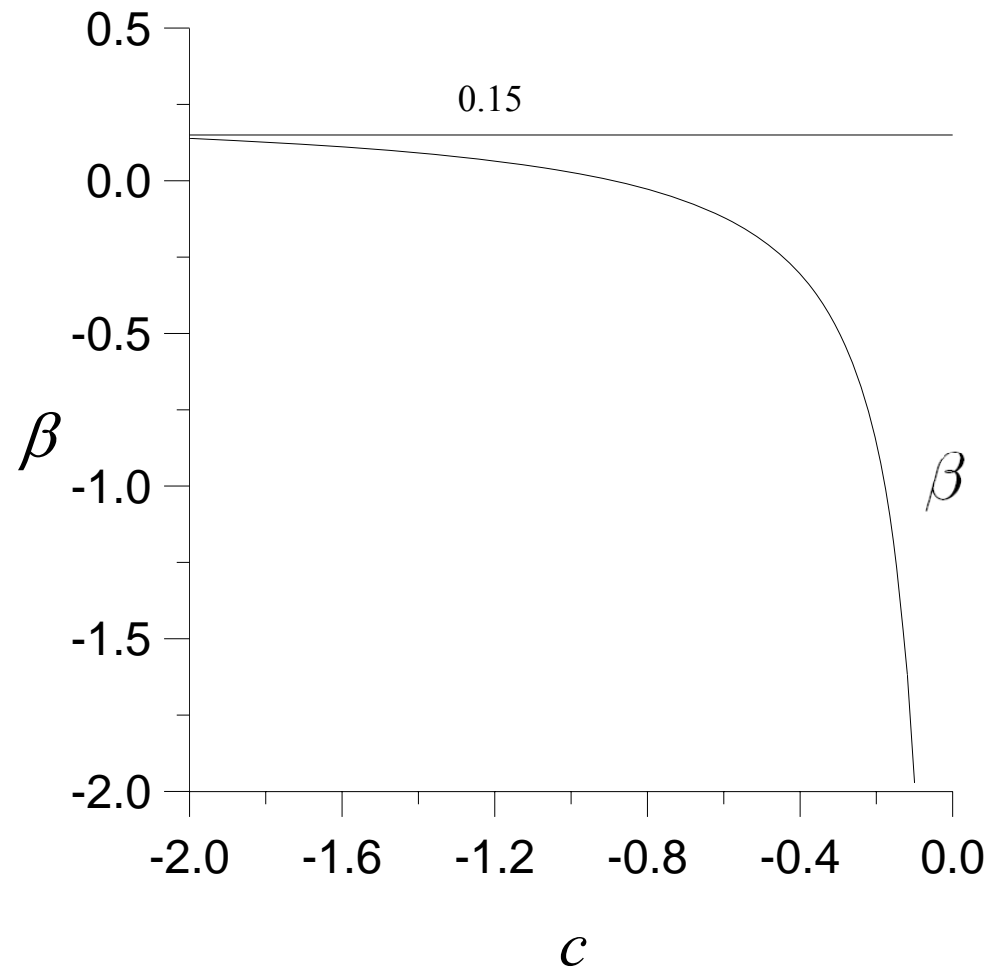
$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$\beta > 1/4$ – metoda stabilna dla dowolnego t [ponieważ $c < 0$]

uwaga: możemy sobie teraz
sprawdzić stabilność Verleta dla $dt=dx$ oraz $\beta=0$, $1/4 + 1/(2c) < 0$ [ok.]

dobór beta zapewniającego
stabilność schematu Newmark
w MRS dla zadanego kroku czasowego

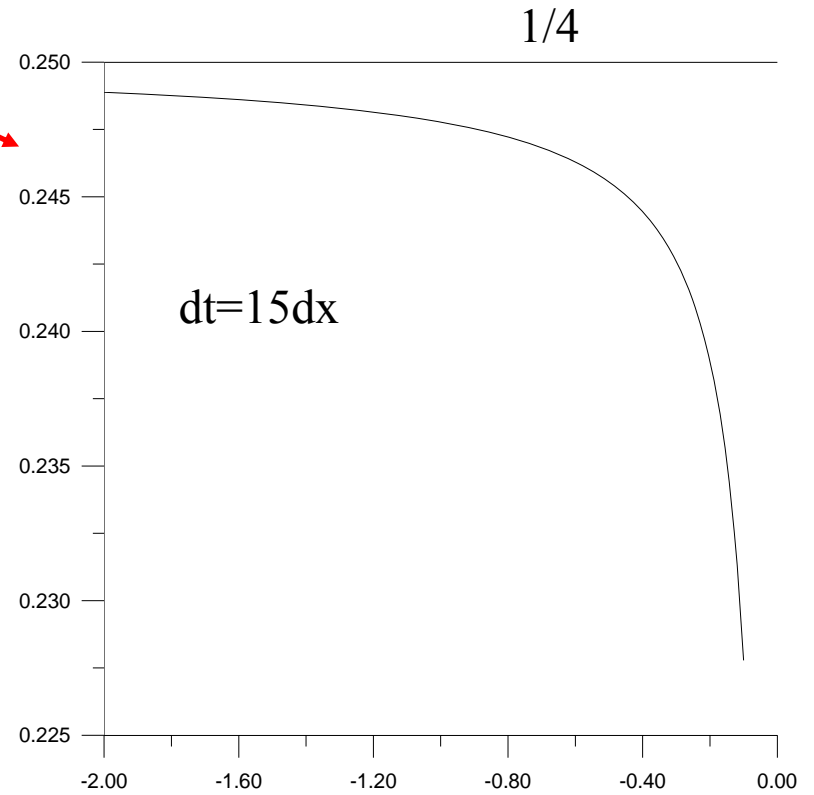
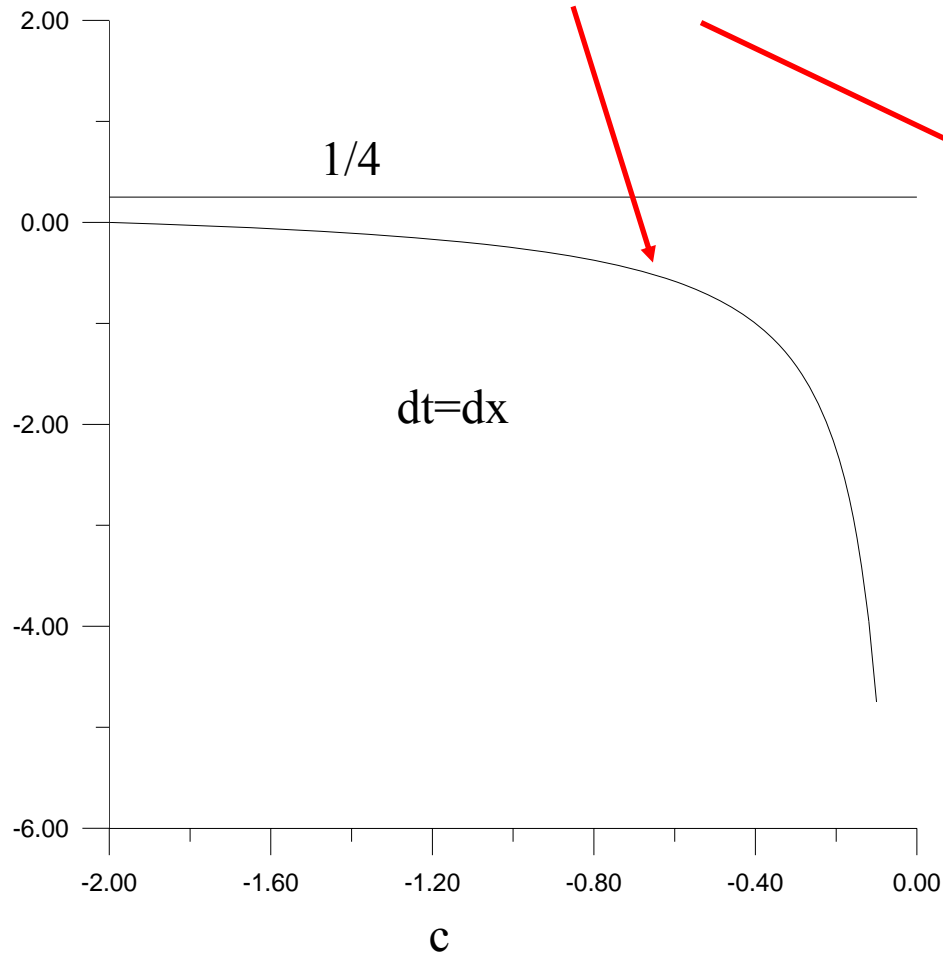
$dt=1.5 dx$



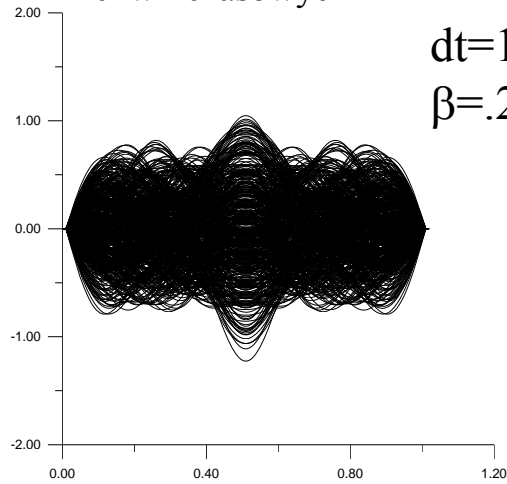
$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

dobór beta zapewniającego
stabilność schematu Newmark
w MRS dla zadanego kroku czasowego

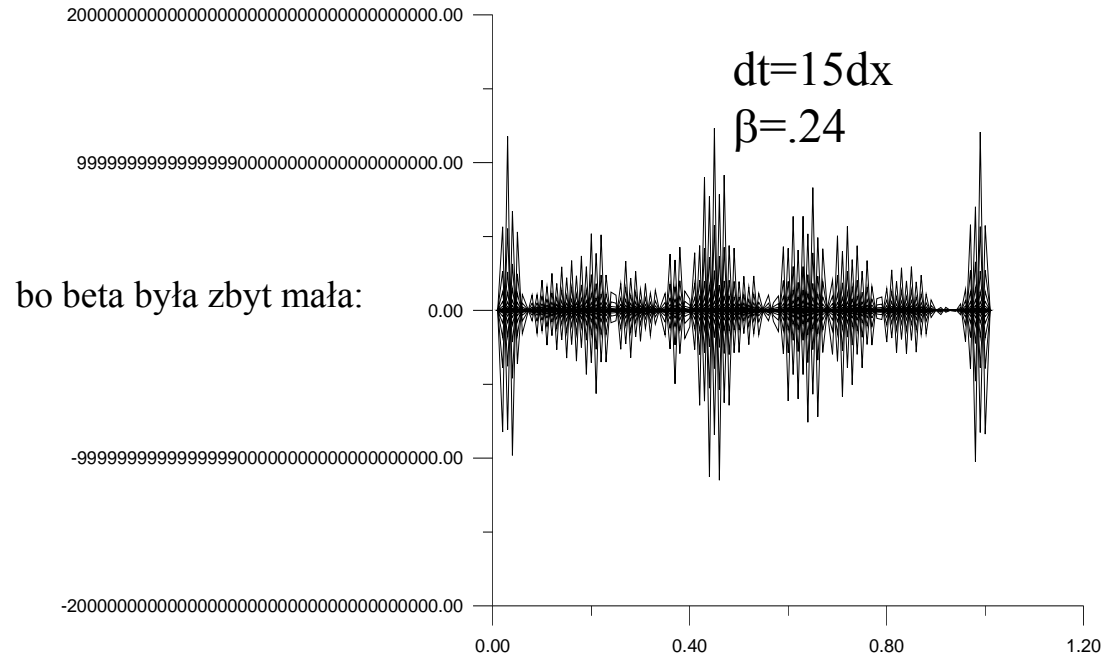


struna, b. wiele
chwil czasowych



$dt=15dx$
 $\beta=.25$

MRS, Newmark, $\gamma=1/2$



Ze schematem Newmarka spotkamy się ponownie przy omawianiu MES, Pokażemy, że umożliwi on skuteczne prowadzenie Rachunków dla lokalnie zagęszczonej siatki