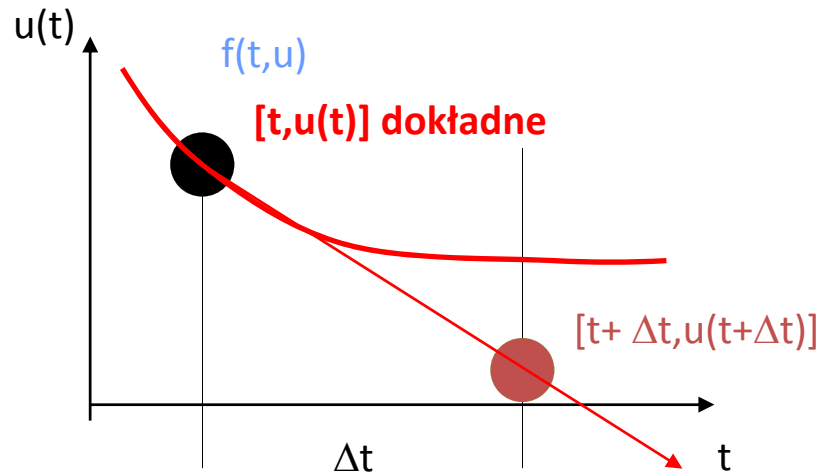
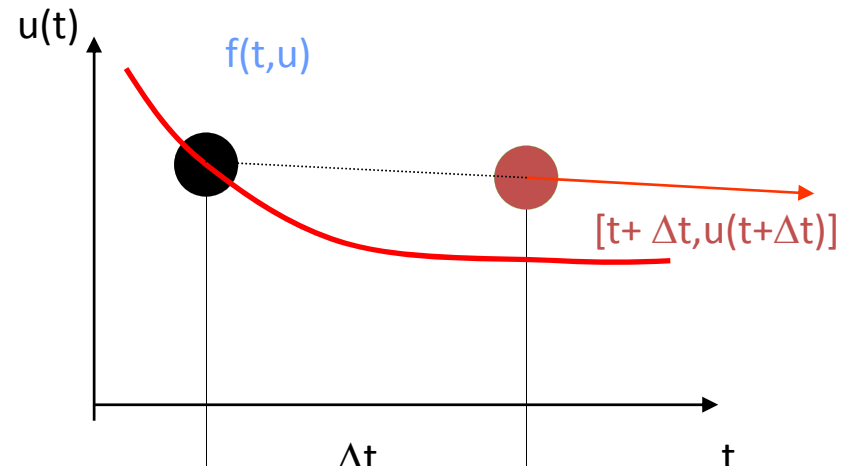


jawny schemat Eulera [globalny błąd $O(\Delta t)$]

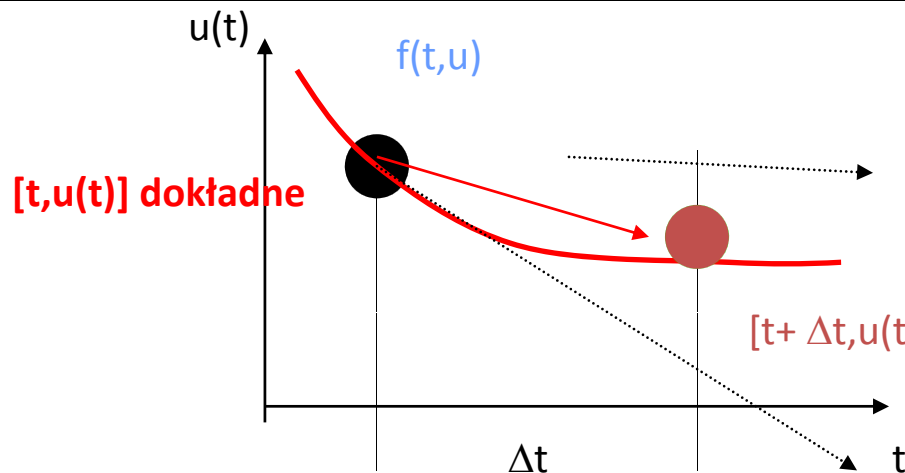


$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_n, u_n) + \frac{dt^2}{2} u''(\xi_n)$$

niejawny schemat Eulera [globalny błąd $O(\Delta t)$]



$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1}) - \frac{dt^2}{2} u''(\xi_n)$$



przesunięcie wyliczane na podstawie średniej arytmetycznej z chwil t i $t+\Delta t$
[wzór trapezów]

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} [f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})] + \dots$$

dokładność wzoru trapezów a jawnego schematu Eulera:

Równanie:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u) = tu$$

Warunek początkowy: $u_1 = u(t_1=0) = 1$

Rozwiązanie: $u(t) = \exp(t^2/2)$

Punkt $t_2=0.5$ $u_2 = ?$ [dokładnie: 1.1331]

Euler jawny jeden krok: $u_2 = u_1 + \Delta t t_1 u_1 = u_1 = 1$

wzór trapezów

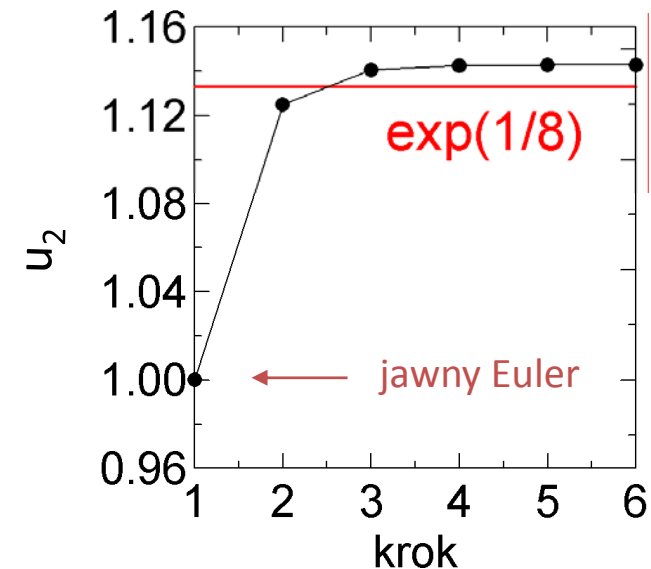
$$u_2 = u_1 + (t_1 u_1 + t_2 u_2) \Delta t / 2 = u_1 + t_2 u_2 \Delta t / 2$$

$$u_2 := u_1 + u_2 / 8$$

iteracja funkcjonalna

wynik 8/7

niejawny Euler: $4/3 = 1.333$ (pokazać)
nieco gorzej niż jawny



TR wygląda na bardziej dokładny od E:



Oszacować błąd lokalny wzoru trapezów

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

1. rozw. Taylora wstecz

$$u(t) = u(t + \Delta t) - \Delta t \frac{du(t + \Delta t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u(t + \Delta t)}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

2. dla dowolnej funkcji ciągłej $f(t) = f(t + \Delta t) + O(\Delta t)$



$$\longrightarrow \frac{d^2 u(t + \Delta t)}{dt^2} = \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + O(\Delta t) \quad (\text{wstawimy, rząd błędu pozostanie trzeci})$$

$$u(t) = u(t + \Delta t) - \Delta t \frac{du(t + \Delta t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

3. Rozwiązać na $u(t + \Delta t)$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{du(t + \Delta t)}{dt} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$



Euler miał rząd obcięcia Δt^2 pozbyć się go.

3. Rozwiązać na $u(t+\Delta t)$ [przepisane]

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{du(t + \Delta t)}{dt} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

4. Uśrednić z rozwinięciem Taylora do przodu

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \frac{du(t)}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + O(\Delta t^3)$$

5. Wynik

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{du(t)}{dt} + \frac{du(t + \Delta t)}{dt} \right) + O(\Delta t^3)$$

6. Korzystamy z równania

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \frac{\Delta t}{2} (f(t, u(t)) + f(t + \Delta t, u(t + \Delta t))) + O(\Delta t^3)$$

jawny i niejawny Euler – lokalny błąd rzędu drugiego (rzęd dokładności 1)
wzór trapezów – lokalny błąd rzędu trzeciego (rzęd dokładności 2)

stabilność bezwzględna wzoru trapezów

problem modelowy:

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \quad \text{WP: } u(t=0)=1.$$
$$\text{rozwiązanie } u = \exp(\lambda t)$$

$$u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \lambda (u_{n-1} + u_n)$$

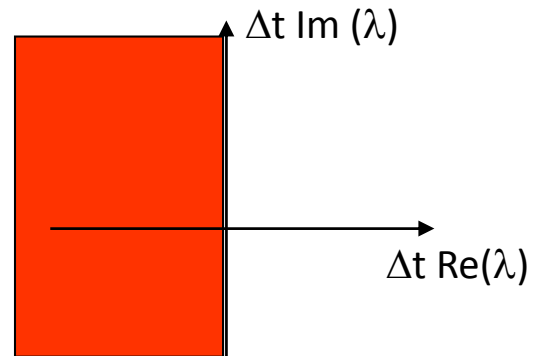
$$u_n = \frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda}{1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda} u_{n-1}$$

$$u_n = \left(\frac{1 + \frac{\Delta t}{2} \lambda}{1 - \frac{\Delta t}{2} \lambda} \right)^n u_0$$
$$\left| \frac{1 + \lambda \frac{\Delta t}{2}}{1 - \lambda \frac{\Delta t}{2}} \right| \leq 1$$

$$|2 + z| \leq |2 - z|$$

zbiór punktów na p. Gaussa, które są nie dalej od (-2,0)
niż od (2,0)

region bzwz. stabilności wzoru trapezów



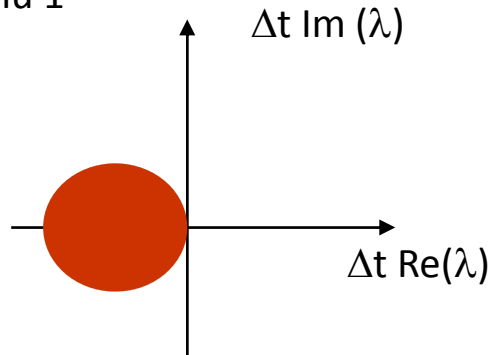
**Wniosek: dla $\lambda < 0$ wzór trapezów bezwzględnie stabilny dla dowolnego kroku czasowego !
A-stabilny**

druga bariera Dahlquist: maksymalny rząd dokładności metody A-stabilnej =2
schemat trapezów
jest najdokładniejszą metodą A-stabilną spośród liniowych metod
wielokrokowych Implementowana np. w SPICE.

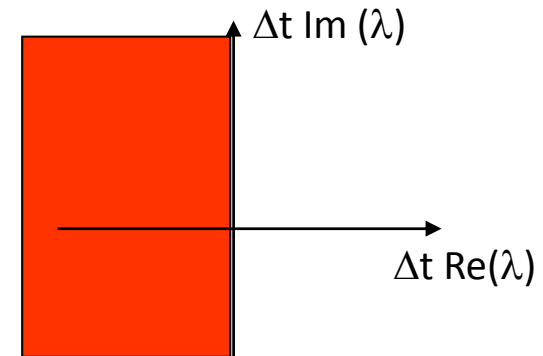
region bzwz. stabilności Eulera:

koło o promieniu 1

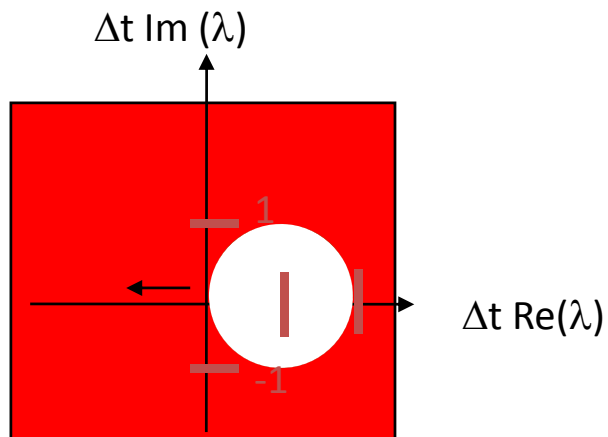
i środka (-1,0)



region bzwz. stabilności wzoru trapezów



niejawna metoda Eulera:
region bezwzględnej stabilności



między metodami można przechodzić w sposób ciągły

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t [(1 - \theta)f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \theta f(t_n, u_n)]$$

$\theta=0,1,1/2$ – Euler jawny, niejawny i wzór trapezów odpowiednio
w wykładzie na temat niejawnych formuł RK zobaczymy, że
dokładność rzędu 2 uzyskana tylko dla $\theta=1/2$
region stabilności ?

iteracja funkcjonalna a wzór trapezów

problem początkowy:

$$u' = -100u, \quad u(0) = 1$$

z rozwiązaniem dokładnym $u(t) = \exp(-100t)$

$$u_n^\mu = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \left(\underline{f(t_{n-1}, u_{n-1})} + f(t_n, u_n^{\mu-1}) \right)$$

$\Delta t = 0.01$ = graniczny dla zbieżności IF dla niejawnego Eulera

1,0, 0.5, 0.25, 0.375, 0.3125, 0.34375, 0.328125, 0.33593, 0.33203, 0.333984, ... ,0.333333

wzór trapezów = używa prawej strony z poprzedniego kroku czasowego z wagą 0.5 – co nieco stabilizuje iterację.

niestety iteracja funkcjonalna dla $\Delta t = 0.02$ już przestaje być zbieżna (+1,-1,+1,-1,itd..) wzór trapezów zwiększa zakres zbieżności iteracji dwukrotnie (wyras podkreślony stabilizuje iteracje) ale to wciąż mało

metoda Newtona-Raphsona pozostaje

$$\frac{du}{dt} = f$$

poznane metody:

$$1) u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_n, u_n) + O(\Delta t^2)$$

$$2) u_{n+1} = u_n + \Delta t f(t_{n+1}, u_{n+1}) + O(\Delta t^2)$$

$$3) u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} (f(t_{n+1}, u_{n+1}) + f(t_n, u_n)) + O(\Delta t^3)$$

Poznane metody: jednokrokowe (1-3), jawna (1) i niejawne (2-3),
pierwszego (1-2) i drugiego (3) rzędu dokładności
Metody (2-3) A stabilne, metoda (2) nadstabilna

jawne metody różnicowe wysokiej dokładności ??

jawne metody jednokrokowe wyższego rzędu dokładności niż jawny Euler

$$u' = f(t, u), u(0) = u_0$$

rozwinięcie Taylora ponownie:

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t u'(t_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} u''(t_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta t^k}{k!} u^{(k)}(t_{n-1}) + O(\Delta t^{k+1})$$

liczymy pochodne:

$$u'(t_{n-1}) = f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) \quad \text{z RR.}$$

RR różniczkujemy po czasie

$$u''(t_{n-1}) = [f'_t + f'_u u']_{(t_{n-1}, u_{n-1})}$$

czyli

$$u''(t_{n-1}) = [f'_t + f'_u f]_{(t_{n-1}, u_{n-1})}$$

podobnie

$$u'''(t_{n-1}) = [f''_{tt} + 2f''_{tu} f + f''_{uu} f^2 + (f'_u)^2 f + f'_u f'_t + f''_{tu} f]_{(t_{n-1}, u_{n-1})}$$

Zależnie od tego gdzie się zatrzymamy uzyskamy błąd lokalny
żądanego rzędu

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t u'(t_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} u''(t_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta t^k}{k!} u^{(k)}(t_{n-1}) + O(\Delta t^{k+1})$$

Zależnie od tego gdzie się zatrzymamy uzyskamy błąd lokalny zadanego rzędu np.

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} [f'_t + f'_u f]_{(t_{n-1}, u_{n-1})} + \frac{\Delta t^3}{6} u'''(\xi_n)$$

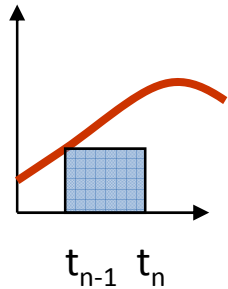
pomysł: mało przydatny w praktyce ze względu na konieczność analitycznego wyliczenia pochodnych cząstkowych f .

Dla metod ogólnych: nie powinniśmy liczyć, że f jest dane wzorem

podjęcie alternatywne: inspirowane całkowaniem

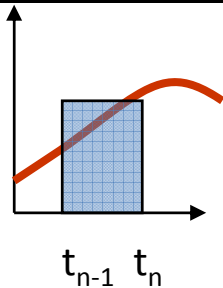
prawa strona = funkcja tylko t $u' = f(t), u(0) = u_0$

z rozwiązaniem: $u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau) d\tau$



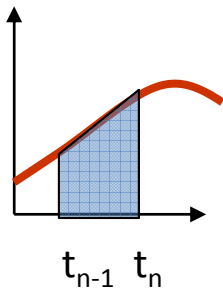
jeśli zastąpimy całkę kwadraturą prostokątów z wywołaniem funkcji w lewym końcu przedziału

$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t f(t_{n-1}) + O(\Delta t^2)$ - rozpoznajemy jawny schemat Eulera



kwadratura prostokątów z wywołaniem funkcji w prawym końcu przedziału

$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t f(t_n) + O(\Delta t^2)$ - rozpoznajemy niejawny schemat Eulera

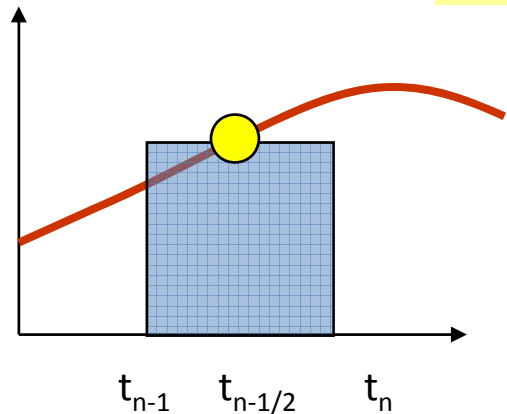


kwadratura trapezów

$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t f(t_n)/2 + \Delta t f(t_{n-1})/2 + O(\Delta t^3)$

- rozpoznajemy niejawny schemat trapezów

reguła punktu środkowego



wzór prostokątów z wywołaniem funkcji w środku przedziału
(dokładny dla funkcji liniowej, znoszenie błędów)

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f(t_{n-1} + \Delta t/2) + O(\Delta t^3)$$

uogólniony wzór na równanie różniczkowe $u'=f(t,u)$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f\left(t_{n-\frac{1}{2}}, u_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

ale - skąd rozwiązanie w środku przedziału?

np. ze schematu Eulera:

$$u_{n-\frac{1}{2}} = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

błąd lokalny Eulera $O(\Delta t^2)$, czy reguła punktu środkowego zachowa trzeci rząd błędu lokalnego?

sprawdźmy to rozważając bardziej ogólny schemat:

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t (b_1 k_1 + b_2 k_2)$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u_{n-1}) \quad \text{obliczone na początku kroku}$$

$$k_2 = f(t_{n-1} + c\Delta t, u_{n-1} + a\Delta t k_1)$$

obliczone gdzieś
w środku przedziału
(t_{n-1}, t_n)

z odpowiednio oszacowanym
rozwiązaniem u dla tego t (wzór typu Eulera)

jest to jawny dwustopniowy schemat **Rungego-Kutty**. potencjalna wyższa dokładność od jawnego Eulera kosztem dwóch wywołań f (podobnie jak we wzorze trapezów, ale RK: jawny)

b_1, b_2, a, c – parametry metody – jakie muszą być aby RK2 (2 = rząd dokładności)

reguła punktu środkowego:

należy do tej klasy z
 $b_1=0, b_2=1, c=1/2, a=1/2$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f\left(t_{n-\frac{1}{2}}, u_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

$$u_{n-\frac{1}{2}} = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

Jawne metody Rungego-Kutty dwustopniowe: wybór parametrów

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + \Delta t (b_1 k_1 + b_2 k_2) \\ (*) \left\{ \begin{aligned} k_1 &= f(t_{n-1}, u_{n-1}) \\ k_2 &= f(t_{n-1} + c\Delta t, u_{n-1} + a\Delta t k_1) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad u' = f(t, u)$$

jak dobrać b_1, b_2, c, a ? – metodą brutalnej siły -
tak aby rozwinięcie Taylora metody zgadzało się
z rozwinięciem Taylora dokładnego równania różniczkowego
do wyrazów tak wysokiego rzędu jak to tylko możliwe

przypominamy: rozwinięcie Taylora dla funkcji dwóch zmiennych

$$\begin{aligned} g(x + \Delta x, y + \Delta y) &= g(x, y) \\ &+ \left(\Delta x \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\Delta x^2 \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y} + \Delta y^2 \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

wstawiamy rozwiązanie dokładne $u(t_n), u(t_{n-1})$ do (*) i rozwijamy względem t_{n-1}, u_{n-1}

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t (b_1 k_1 + b_2 k_2)$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u(t_{n-1}))$$

$$k_2 = f(t_{n-1} + c\Delta t, u(t_{n-1}) + a\Delta t k_1) \leftarrow \text{to trzeba rozwinąć}$$

$$k_2 = f + c\Delta t f'_t + a\Delta t f f'_u + \frac{1}{2} (c^2 \Delta t^2 f''_{tt} + a^2 \Delta t^2 f^2 f''_{uu} + 2ac\Delta t^2 f f''_{tu}) + O(\Delta t^3)$$

wstawmy k_2 do rozwinięcia.
Zachowajmy czony do Δt^2 :

(wszystko liczone
w t_{n-1}, u_{n-1})

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t [b_1 f + b_2 (f + c\Delta t f'_t + a\Delta t f f'_u)] + O(\Delta t^3)$$

rozwinięcie Taylora rozwiązania dokładnego uzyskaliśmy kilka slajdów wcześniej

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} [f'_t + f'_u f]_{(t_{n-1}, u_{n-1})} + \frac{\Delta t^3}{6} u'''(\xi_n)$$

czyli:

rzęd Δt : $b_1 + b_2 = 1$, rzęd Δt^2 : $b_2 c = b_2 a = 1/2$

czyli reguła punktu środkowego: $b_1 = 0, b_2 = 1, c = 1/2, a = 1/2$ ma błąd lokalny rzędu $O(\Delta t^3)$
mamy metodę równie dokładną co wzór trapezów – ale jawną (co ma swoje zalety i wady)

Wyższy rząd błędu do uzyskania tylko w metodach o większej niż 2 liczbie stopni

cztery parametry i trzy równania

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$b_2 c = b_2 a = 1/2$$

- pozostaje swoboda w wyborze parametrów

reguła punktu środkowego RK2

$$b_1 = 0, b_2 = 1, c = 1/2, a = 1/2$$

dwa zastosowania jawnego schematu Eulera

$$u_{n-\frac{1}{2}} = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

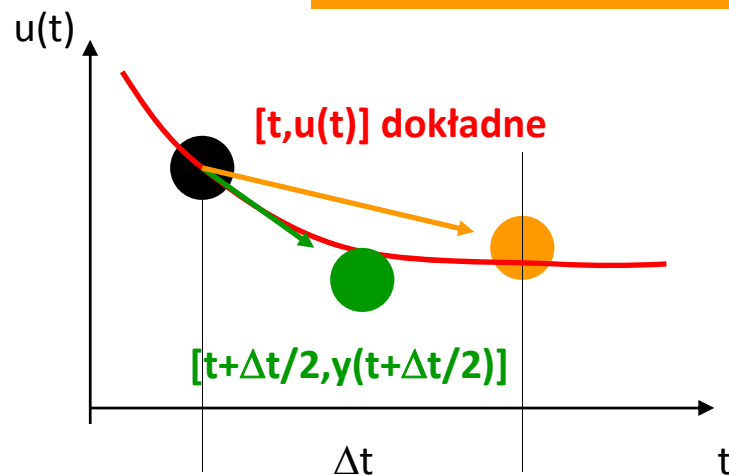
oszacowanie wstępne w punkcie pośrednim
(błąd lokalny rzędu drugiego)

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f(t_{n-\frac{1}{2}}, u_{n-\frac{1}{2}})$$

oszacowanie docelowe
(błąd lokalny oszacowania: rzędu trzeciego)

albo (przesunięty indeks)

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, u_n)\right)$$



- 1) Szacujemy metodą Eulera punkt środkowy $[t+\Delta t/2, u(t+\Delta t/2)]$ korzystając z $f(t, u)$ w lewym końcu przedziału
- 2) Wykorzystujemy wartość f w tym punkcie do wyliczenia zmiany y na całym przedziale Δt

RK punktu środkowego: $b_1 + b_2 = 1$,

$b_2 c = b_2 a = 1/2$

inny wybór:

$b_1 = b_2 = 1/2$, wtedy musi $a = c = 1$

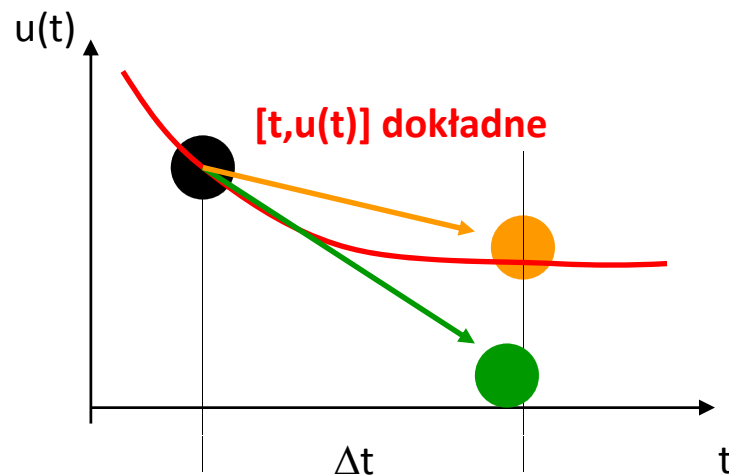
$$u_n = u_{n-1} + \Delta t (b_1 k_1 + b_2 k_2)$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

$$k_2 = f(t_{n-1} + c\Delta t, u_{n-1} + a\Delta t k_1)$$

metoda podobna do wzoru trapezów
(ale jawna)

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, u_n) + \frac{\Delta t}{2} f(t_n + \Delta t, u_n + \Delta t f(t_n, u_n))$$



metoda RK2 trapezów

- 1) Szacujemy metodą Eulera punkt końcowy $[t + \Delta t, u(t + \Delta t)]$ korzystając z $f(t, u)$ w lewym końcu przedziału
- 2) krok z t do $t + \Delta t$ wykonujemy biorąc średnią arytmetyczną z f na początku i końcu

dla błędu lokalnego $O(\Delta t^3)$ potrzeba aby,
rzęd Δt : $b_1+b_2=1$, rzęd Δt^2 : $b_2c=b_2a=1/2$

punkt środkowy $b_2=1$, $b_1=0$ [b_1+b_2]=1

czy ma sens $b_1=1$, $b_2=0$?

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t (b_1 k_1 + b_2 k_2)$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u(t_{n-1}))$$

Metody Rungego-Kutty, forma ogólna

są to metody jednokrokowe, czyli można zapisać:

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \phi(t_{n-1}, u_{n-1}, \Delta t)$$

metoda RK w s-odstępach (*stage*) (unikamy słowa „krok”)

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

z

$$k_i = f\left(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j\right)$$

wzory przedstawiane w formie tabel Butchera

c **A**
b

c_1	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss}
	b_1	b_2	\cdots	b_s

Metody Rungego-Kutty, forma ogólna

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$$

czasem zapisywane w postaci:

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n-1} + c_i \Delta t, U_i)$$

$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j)$$

tutaj U_i – przybliżone rozwiązanie w chwili $t_{n-1} + c_i \Delta t$
zazwyczaj niższej dokładności niż rozwiązanie końcowe

jawne metody Rungego-Kutty

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$$

jawne: $a_{ij}=0$ dla $j \geq i$

c_1	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	a_{ss}
	b_1	b_2	\cdots	b_s

obcięte sumowanie:

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

odstona i -ta wyliczana na podstawie tylko wcześniejszych odstępów

historycznie wszystkie RK były jawne, uogólnienie okazało się przydatne dla problemów sztywnych

Wyprowadzanie formuł RK (**a,b,c**)

- 1) Rozwijamy rozwiązanie dokładne w szereg Taylora względem t_{n-1}
- 2) Podstawiamy rozwiązanie dokładne do ogólnej formy RK i rozwijamy względem t_{n-1}
- 3) Wartości parametrów a, b, c uzyskujemy z porównania. zazwyczaj w sposób niejednoznaczny

najbardziej popularne: jawne formuły 4-etapowe RK4:

o 4-tym stopniu zbieżności (4-tym rzędzie dokładności)

i 5-tym rzędzie błędu lokalnego

ogólna tabela Butchera:
dla jawnych RK4

0	0	0	0	0
c_2	a_{21}	0	0	0
c_3	a_{31}	a_{32}	0	0
c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	0
	b_1	b_2	b_3	b_4

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

$$c_1 = 0$$

(dla każdej jawnej RK, zaczynamy – k_1
od wyliczenia prawej strony w kroku początkowym)

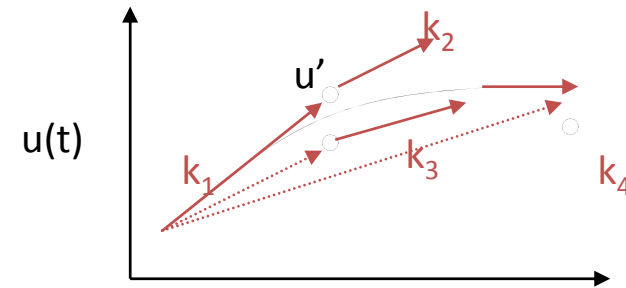
klasyczna formuła RK4: $u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

$$k_2 = f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, u_{n-1} + \frac{\Delta t k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, u_{n-1} + \frac{\Delta t k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_{n-1} + \Delta t, u_{n-1} + \Delta t k_3)$$



4 wywołania f na krok,
błąd lokalny $O(\Delta t^5)$

gdy f tylko funkcja czasu RK4
redukuje się do formuły Simpsona :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{6} (f(t_{n-1}) + 4f(t_{n-1/2}) + f(t_n))$$

Jawne schematy RK dla układu równań różniczkowych

$$\frac{du^1}{dt} = f^1(t, u^1, u^2)$$

$$\frac{du^2}{dt} = f^2(t, u^1, u^2)$$

2 zmienne zależne u^1, u^2 ,
2 prawe strony f^1, f^2

2 równania, s-odstón
($i=1,2,\dots,s$)

$$U_i^1 = u_{n-1}^1 + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f^1(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j^1, U_j^2)$$

$$U_i^2 = u_{n-1}^2 + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f^2(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j^1, U_j^2)$$

$$u_n^1 = u_{n-1}^1 + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f^1(t_{n-1} + c_i \Delta t, U_i^1, U_i^2)$$

$$u_n^2 = u_{n-1}^2 + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f^2(t_{n-1} + c_i \Delta t, U_i^1, U_i^2)$$

zapis wektorowy

$\mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n, \mathbf{f}, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N$ są wektorami o 2 składowych

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{f}(t_{n-1} + c_j \Delta t, \mathbf{U}_j)$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{f}(t_{n-1} + c_i \Delta t, \mathbf{U}_i)$$

Tabela Butchera dla klasycznej jawnej RK4

$$u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

$$k_2 = f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, u_{n-1} + \frac{\Delta t k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, u_{n-1} + \frac{\Delta t k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_{n-1} + \Delta t, u_{n-1} + \Delta t k_3)$$

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_i = f\left(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right)$$

0	0	0	0	0
c_2	a_{21}	0	0	0
c_3	a_{31}	a_{32}	0	0
c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	0
	b_1	b_2	b_3	b_4

Dlaczego RK4 najbardziej popularna:

Liczba kroków a rząd zbieżności jawnych metod RK:

rząd	1	2	3	4	5	6	7	8
minimalna liczba odstępów	1	2	3	4	6	7	9	11

RK4 – wyjątkowo opłacalna

RK1 – metoda RK w jednej odstępnie

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$$

$b_1 + b_2 = 1$, przy $b_1 = 1, b_2 = 0$
dostaniemy jawnego Eulera
warunek $a * b_2 = c * b_2 = 1/2$
nie będzie spełniony

jawny schemat Eulera to jawna metoda RK1

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

jawny Euler

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$$

0	0
1	1

tabela Butchera

RK2 trapezów

$$\mathbf{b_1=b_2=1/2, a=c=1}$$

0	0	0
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t (b_1 k_1 + b_2 k_2)$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

$$k_2 = f(t_{n-1} + c\Delta t, u_{n-1} + a\Delta t k_1)$$

RK2 punktu środkowego

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, u_n)\right)$$

0	0	0
1/2	1/2	0
	0	1