

RRZ:  
 $u'(t)=f(t,u)$

Jednokrokowy schemat różnicowy  
 $u(t+\Delta t)=u(t)+\Phi(t,u(t),\Delta t)$

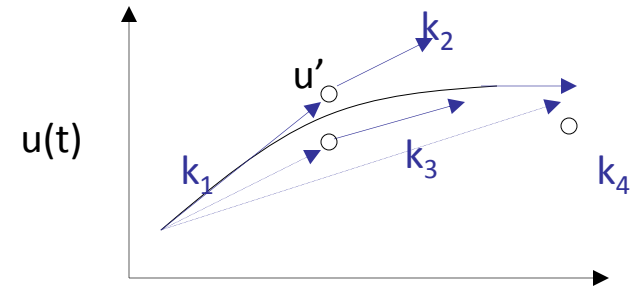
klasyczna formuła RK4: 
$$u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

$$k_2 = f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, u_{n-1} + \frac{\Delta t k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, u_{n-1} + \frac{\Delta t k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_{n-1} + \Delta t, u_{n-1} + \Delta t k_3)$$



4 wywołania  $f$  na krok,  
błąd lokalny  $O(\Delta t^5)$

gdy  $f$  tylko funkcja czasu RK4  
redukuje się do formuły Simpsona :

$$u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{6} (f(t_{n-1}) + 4f(t_{n-1/2}) + f(t_n))$$

ogólna

$c_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\cdots$	$a_{1s}$
$c_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\cdots$	$a_{2s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	$\cdots$	$a_{ss}$
	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_s$

w wersji ogólnej  
(niejawnej = sumowanie do s)

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

dla metod jawnych

0	0	0	0	0
$c_2$	$a_{21}$	0	0	0
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	0	0
$c_4$	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	0
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n-1} + c_i \Delta t, U_i)$$

$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j)$$

Metoda musi być dokładna dla rozwiązania stałego:

w przeciwnym wypadku powstanie błąd lokalny  $O(\Delta t)$  (metoda nie będzie zbieżna  
zerowy rząd zbieżności ☹)

jeśli  $f=0$  to  $u_n = u_{n-1}$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

to mamy zawsze

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j)$$

---

podobnie, jeśli rząd zbieżności 1 (jak Euler) lub więcej = wynik dokładny dla funkcji liniowej  
 $f=1$

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1$$

np RK4

$$u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n-1} + c_i \Delta t, U_i)$$

$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j)$$

rozwiązania pośrednie = mniej dokładne niż wynik końcowy, ale:

zażądajmy aby rozwiązania pośrednie  $U_i$  (dla chwili  $t_{n-1} + c_i \Delta t$ ) były rzędu zbieżności pierwszego (nie gorsze niż Euler).

Mają działać dokładnie dla  $f=1$  i rozwiązania  $u=D+t$ , co daje:  $u(t+dt)=u(t)+dt$

$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = u_{n-1} + c_i \Delta t \quad \longrightarrow \quad c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$$

dla RK4:

0	← 0	0	0	0
1/2	← 1/2	0	0	0
1/2	← 0	1/2	0	0
1	← 0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

0	0	0	0	0
$c_2$	$a_{21}$	0	0	0
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	0	0
$c_4$	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	0
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$

metoda RK rzędu dokładności  $p$  jeśli działać będzie dokładnie dla wielomianów stopnia  $p$

$$u' = (t - t_{n-1})^{l-1}$$

z rozwiązaniem:

$$u(t) = \frac{1}{l} (t - t_{n-1})^l$$

dla  $l=1,2,\dots,p$

wstawić



$$\frac{1}{l} \Delta t^l = \Delta t \sum_{i=1}^s b_i (c_i \Delta t)^{l-1}$$



$$\frac{1}{l} = \sum_{i=1}^s b_i (c_i)^{l-1}$$

$l=1$  poznajemy

Zastosowanie do tabeli Butchera RK4:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} * 0 + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * 1 = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} * \frac{1}{4} + \frac{1}{3} * \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} * \frac{1}{8} + \frac{1}{3} * \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12}$$

dla  $l=5$  prawa strona = 0.20833

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

warunki tego typu są konieczne, ale nie wystarczają do wyznaczenia całej tabeli B. można podać więcej rozważając inne równania i wykorzystując założony rząd dokładności metody.

można podać więcej rozważając inne równania i wykorzystując założony rząd dokładności metody. [zapisujemy dla ogólnej, tj. ewentualnie niejawniej RK]

$$u' = u$$



$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n-1} + c_i \Delta t, U_i)$$

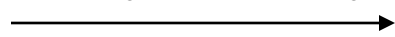
$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j)$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i U_i$$



$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} U_j$$

w notacji wektorowej



$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \mathbf{b}^T \mathbf{U} \quad (1)$$

$$\mathbf{U} = u_{n-1} \mathbf{1} + \Delta t \mathbf{A} \mathbf{U} \quad (2)$$

z oznaczeniami:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \end{bmatrix}$$

z (2) eliminujemy  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{U} = u_{n-1} (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}$$

wstawiamy do (1)

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \Delta t \mathbf{b}^T (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}$$

$$u' = u \longrightarrow \text{dokładne rozwiązanie } u(t) = \exp(t)$$

$$u_n = \exp(\Delta t) u_{n-1}$$

dokładne:

$$u_n = u_{n-1} \left( 1 + \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} + \dots + \frac{\Delta t^k}{k!} + \dots \right)$$

RK:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \Delta t \mathbf{b}^T (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots$$

$$u_n = u_{n-1} \left( 1 + \Delta t \mathbf{b}^T (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A} + \Delta t^2 \mathbf{A}^2 + \dots) \right) \mathbf{1}$$

zrównując wyrazy tego samego rzędu w  $\Delta t$

$$\frac{1}{k!} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1}$$

dla metody RK  
rzędu dokładności  $p$   
czyli dla  $k=1,2,\dots,p$



$$\frac{1}{k!} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \quad \text{dla } k=1,2,\dots,p$$


---

$$k=1 \longrightarrow \sum_{i=1}^s b_i = 1$$

$$k=2 \longrightarrow \frac{1}{2} = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{1}$$

↓

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A} = [ d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \dots \quad d_s ]$$

$$d_k = \sum_m b_m a_{mk}$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{1} = \sum_k d_k = \sum_k \sum_m b_m a_{mk} = \frac{1}{2}$$

wcześniej dowiedzieliśmy się, że

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$$

oraz

$$\frac{1}{l} = \sum_{i=1}^s b_i (c_i)^{l-1}$$

dla  $l=2$  da wzór po lewej (zał. że pośrednie min  
rzędu 2)

---

$$\frac{1}{k!} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \quad \text{nowe niezależne warunki dostaniemy dla } k>2$$

## stabilność bezwzględna jawnych metod RK

$$u' = \lambda u$$

z oznaczeniem  $z = \lambda \Delta t$  dostaniemy wg wcześniejszej analizy

$$u_n = u_{n-1} \left[ \mathbf{1} + z \mathbf{b}^T (\mathbf{I} + z \mathbf{A} + z^2 \mathbf{A}^2 + \dots) \right] \mathbf{1}$$

metoda RK rzędu  $p$  dokładnie odtwarza  $p$  pierwszych wyrazów r.T rozwiązania dokładnego

$$\frac{1}{k!} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \quad \text{dla } k=1,2,\dots,p$$

$$u_n = \left( \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} z^k \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \right) u_{n-1}$$

# stabilność bezwzględna jawnych metod RK

$$u' = \lambda u$$

z oznaczeniem  $z = \lambda \Delta t$  dostaniemy wg wcześniejszej analizy

$$u_n = u_{n-1} \left[ \mathbf{1} + z \mathbf{b}^T (\mathbf{I} + z \mathbf{A} + z^2 \mathbf{A}^2 + \dots) \right] \mathbf{1}$$

metoda RK rzędu  $p$  dokładnie odtwarza  $p$  pierwszych wyrazów r.T rozwiązania dokładnego

$$\frac{1}{k!} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \quad \text{dla } k=1,2,\dots,p$$

$$u_n = \left( \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} z^k \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \right) u_{n-1}$$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a1 & 0 & 0 & 0 \\ a2 & a3 & 0 & 0 \\ a4 & a5 & a6 & 0 \end{bmatrix}$$

`B:=multiply(A,A);`

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a3 a1 & 0 & 0 & 0 \\ a5 a1 + a6 a2 & a6 a3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

`B:=multiply(B,A);`

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a6 a3 a1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

`C:=multiply(B,A);`

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# stabilność bezwzględna jawnych metod RK

$$u' = \lambda u$$

z oznaczeniem  $z = \lambda \Delta t$  dostaniemy wg wcześniejszej analizy

$$u_n = u_{n-1} \left[ \mathbf{1} + z \mathbf{b}^T (\mathbf{I} + z \mathbf{A} + z^2 \mathbf{A}^2 + \dots) \right] \mathbf{1}$$

metoda RK rzędu  $p$  dokładnie odtwarza  $p$  pierwszych wyrazów r.T rozwiązania dokładnego

$$\frac{1}{k!} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \quad \text{dla } k=1,2,\dots,p$$

$$u_n = \left( \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} z^k \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \right) u_{n-1}$$

macierz  $\mathbf{A}$  dla jawnych dolna trójkątna bez diagonali

$$\mathbf{A}^m = \mathbf{0} \quad \text{dla } m \geq s$$

dlatego: - możemy urwać drugą sumę  
współczynnik wzmocnienia dla jawnych RK  
jest wielomianem

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a1 & 0 & 0 & 0 \\ a2 & a3 & 0 & 0 \\ a4 & a5 & a6 & 0 \end{bmatrix}$$

`B:=multiply(A,A);`

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a3 a1 & 0 & 0 & 0 \\ a5 a1 + a6 a2 & a6 a3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

`B:=multiply(B,A);`

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a6 a3 a1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

`C:=multiply(B,A);`

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rzęd dokładności      liczba stopni (odślon) metody zamiast  $\infty$

$$u_n = \left( \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^s z^k \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \right) u_{n-1}$$

Liczba kroków a rząd zbieżności jawnych metod RK:

rzęd	$p$	1	2	3	4	5	6	7	8
minimalna liczba odślon	$s$	1	2	3	4	6	7	9	11

czyli dla  $p \leq 4$  druga suma znika, mamy dokładnie:

$$u_n = \left( \underline{1 + \lambda \Delta t} + \frac{\lambda^2 \Delta t^2}{2} + \frac{\lambda^3 \Delta t^3}{6} + \frac{\lambda^4 \Delta t^4}{24} \right) u_{n-1}$$

stąd współczynnik  
wzmocnienia dla  
RK1, RK2, RK3 i RK4

---

rozwiązanie dokładne  $u = \exp(\lambda t) \rightarrow u(t_n) = \exp(\lambda \Delta t) u(t_{n-1})$

RK dokładności  $p$  dokładnie odtwarza pierwsze  $p$  wyrazów rozwinięcia Taylora rozwiązania dokładnego

## Stabilność bezwzględna RK

$$\left| \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^s z^k \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \right| \leq 1$$

ponadto: dla  $p \leq 4$  mamy  
dla stabilności bezwzględnej:  $\left| \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} \right| \leq 1$

**wniosek: region stabilności bezwzględnej jawnych metod RK o rzędzie dokładności nie większym niż 4 jest niezależny od wyboru  $a, b, c$  !**

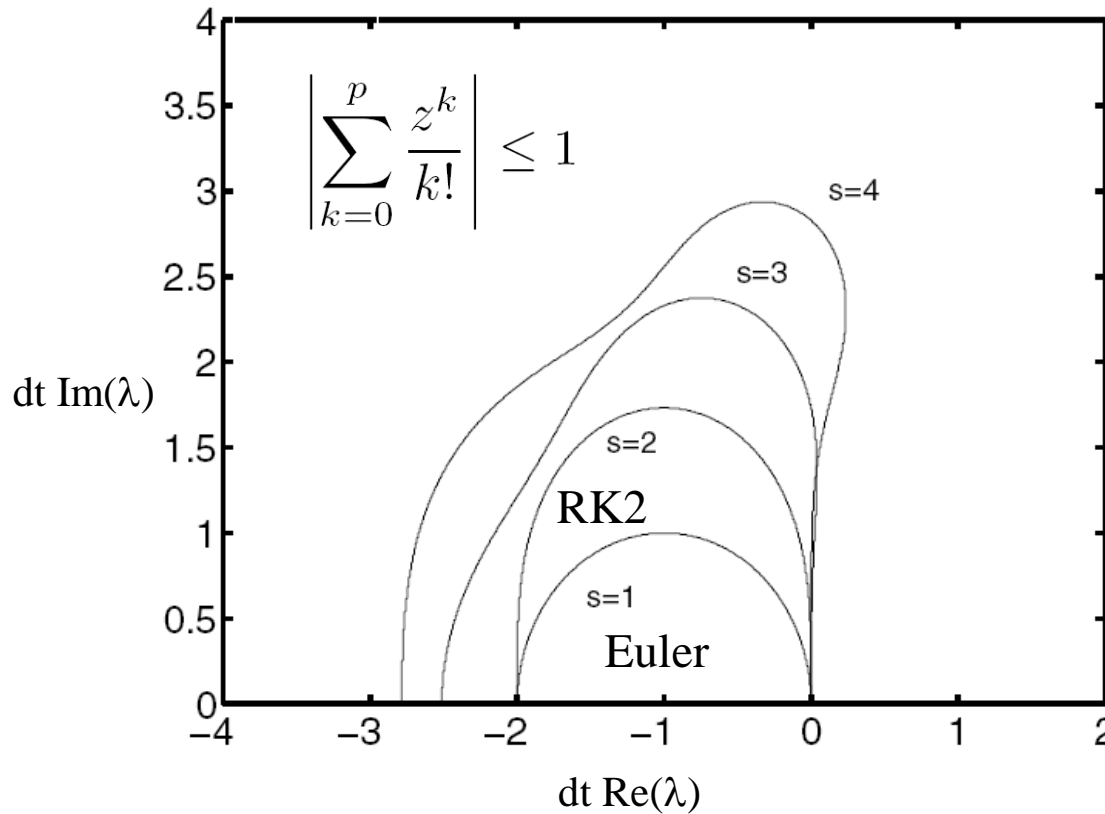
w szczególności dwie poznane metody rzędu drugiego:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, u_n)\right)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, u_n) + \frac{\Delta t}{2} f(t_n + \Delta t, u_n + \Delta t f(t_n, u_n))$$

mają ten sam region stabilności

# rejony bezwzględnej stabilności jawnych metod RK w s-odsłonach



dla danego  $s$  –  
 rejony identyczne  
 dla wszystkich wariantów

zakres stabilności  
 rośnie z rzędem dokładności

*zobaczymy, że  
 przeciwnie niż dla  
 liniowych formuł  
 wielokrokowych!*

rysunek skopiowany z  
*Quarteroni: Numerical Mathematics*

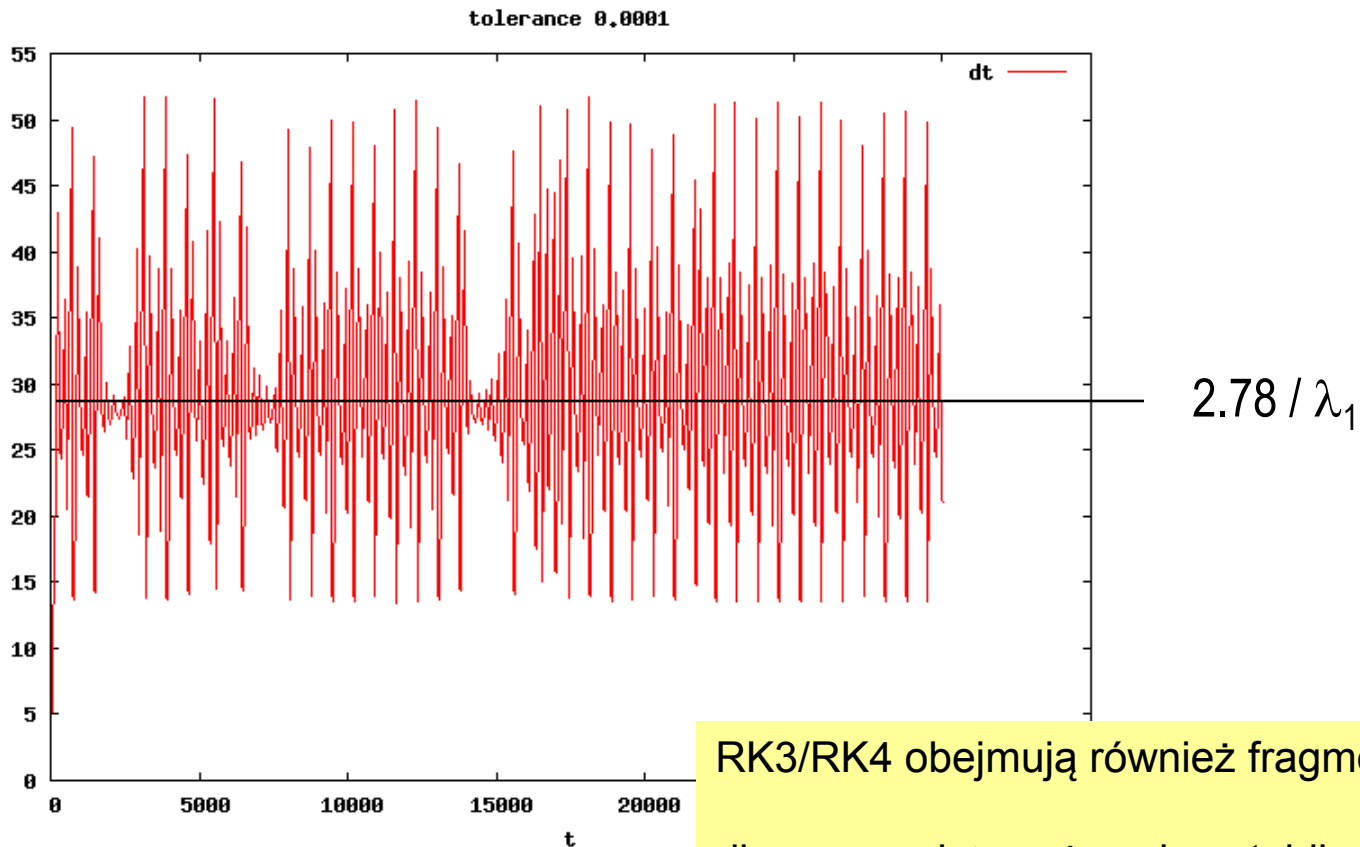
RK3/RK4 obejmują również fragment  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$

dla rzeczywistego  $\lambda$  region stabilności:  $dt\lambda$

RK1	(-2,0)
RK2	(-2,0)
RK3	(-2.51,0)
RK4	(-2.78,0)

Przypomnienie, problem z  $\lambda_1=0.1$ :

RK4



RK3/RK4 obejmują również fragment  $\text{Re}(\lambda) > 0$

dla rzeczywistego  $\lambda$  region stabilności:  $dt\lambda$

RK1 (-2,0)

RK2 (-2,0)

RK3 (-2.51,0)

**RK4 (-2.78,0)**



Region stabilności jawnych metod RK jest ograniczony

$$\left| \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^s z^k \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \right| \leq 1$$

funkcja pod modułem jest wielomianem (skończone rozwinięcie w szereg Taylora)  
każdy wielomian ucieka do nieskończoności gdy *z daleko od początku układu wsp.*  
(niezależnie od kierunku na płaszczyźnie Gaussa)

---

dla szerszych regionów bezwzględnej stabilności:  
niejawne metody RK

$$u_n = \left( \sum_{k=0}^p \frac{z^k}{k!} + \sum_{k=p+1}^{\infty} z^k \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \right) u_{n-1}$$

dla niejawnych RK druga suma może ustabilizować  
rozbieżność pierwszej dla dużego  $|z|$

niejawna metoda Rungego-Kutty w jednej odślonie  
 [jawny RK w jednej odślonie= jawny schemat Eulera]

$$\begin{cases}
 u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n-1} + c_i \Delta t, U_i) \\
 U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j)
 \end{cases}$$

↙

$$\begin{cases}
 u_n = u_{n-1} + \Delta t b_1 f(t_{n-1} + c_1 \Delta t, U_1) \\
 U_1 = u_{n-1} + \Delta t a_{11} f(t_{n-1} + c_1 \Delta t, U_1)
 \end{cases}$$

aby wyznaczyć współczynniki  $b_1=b$ ,  $c_1=c$ ,  $a_{11}=a$   
 rozwijamy metodę RK w Taylora względem  $t_{n-1}$  i  $u(t_{n-1})$  i porównujemy z rozwiązaniem dokładnym

$$u_n = u(t_{n-1}) + \Delta t b \left[ f + c \Delta t f'_t + f'_u \times (U_1 - u(t_{n-1})) + O(\Delta t^2) \right]$$

liczone w  $t_{n-1}$ ,  $u(t_{n-1})$

celujemy w błąd lokalny  $O(\Delta t^3)$

$$U_1 = u(t_{n-1}) + \Delta t a f + O(\Delta t^2)$$

wstawić wyżej

$$u_n = u(t_{n-1}) + \Delta t b \left[ f + c \Delta t f'_t + f'_u f \Delta t a + O(\Delta t^2) \right]$$



$$u_n = u(t_{n-1}) + \Delta t b \left[ f + c \Delta t f'_t + f'_u \times (U_1 - u(t_{n-1})) + O(\Delta t^2) \right]$$



liczone w  $t_{n-1}$ ,  $u(t_{n-1})$

$$U_1 = u(t_{n-1}) + \Delta t a f + O(\Delta t^2)$$

wstawić wyżej

niejawna metoda Rungego-Kutty w jednej odśłonie (będzie stopnia 2)

$$u_n = u(t_{n-1}) + \Delta t b \left[ f + c \Delta t f'_t + f'_u f \Delta t a + O(\Delta t^2) \right]$$

do porównania z rozwinięciem dokładnego rozwiązania (2 wykłady wstecz)

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} [f'_t + f'_u f]_{(t_{n-1}, u_{n-1})} + \frac{\Delta t^3}{6} u''''(\xi_n)$$

$$b=1$$
$$c=a=1/2$$

niejawna metoda Rungego-Kutty w jednej odśłonie (będzie stopnia 2)

$$u_n = u(t_{n-1}) + \Delta t b \left[ f + c \Delta t f'_t + f'_u f \Delta t a + O(\Delta t^2) \right]$$

do porównania z rozwinięciem dokładnego rozwiązania (2 wykłady wstecz)

$$u(t_n) = u(t_{n-1}) + \Delta t f(t_{n-1}, u_{n-1}) + \frac{\Delta t^2}{2} [f'_t + f'_u f]_{(t_{n-1}, u_{n-1})} + \frac{\Delta t^3}{6} u''''(\xi_n)$$

$$b=1 \\ c=a=1/2$$

zamiast Taylora  
mogliśmy użyć  
warunków koniecznych:

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1$$

$$\frac{1}{l} = \sum_{i=1}^s b_i (c_i)^{l-1}$$

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$$

## niejawna metoda Rungego-Kutty w jednej odśłonie (stopnia 2)

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t b_1 f(t_{n-1} + c_1 \Delta t, U_1)$$

$$U_1 = u_{n-1} + \Delta t a_{11} f(t_{n-1} + c_1 \Delta t, U_1)$$

$$b=1$$
$$c=a=1/2$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1\right)$$

$$U_1 = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1\right)$$

2) „korektor”  
wykonać krok wg „reguły punktu środkowego”  
z  $U_1$  policzonym niejawnym Eulerem

1) „predyktor” = niejawny Euler  
do połowy kroku czasowego  
(rozwiązać trzeba jak pokazywaliśmy)

porównanie metod RK drugiego rzędu = jawnej i niejawnej

*jawna metoda punktu środkowego RK2 (dwustopniowa – znaczy f wzywane w 2 chwilach czasowych):*

$$u_{n-\frac{1}{2}} = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f(t_{n-1}, u_{n-1}) \quad \text{predyktor = jawny Euler}$$

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f\left(t_{n-\frac{1}{2}}, u_{n-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{korektor = punkt środkowy}$$

0	0	0
1/2	1/2	0
	0	1

*niejawna metoda punktu środkowego NJRK (jednostopniowa f – tylko w jednej chwili)*

1/2	1/2
	1

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1\right)$$

2) wykonać krok wg „reguły punktu środkowego” z  $U_1$

$$U_1 = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1\right)$$

1) „predyktor” = niejawny Euler do połowy kroku czasowego

region bezwzględnej stabilności niejawniej metody punktu środkowego

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1\right)$$

$$U_1 = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1\right)$$

$$u' = \lambda u, z = \lambda \Delta t$$

$$U_1 = u_{n-1} + \frac{z}{2} U_1 \longrightarrow U_1 = \frac{u_{n-1}}{1 - z/2}$$

$$u_n = u_{n-1} + z \frac{u_{n-1}}{1 - z/2}$$

$$u_n = u_{n-1} \frac{1 + z/2}{1 - z/2} \quad \text{wsp. wzmocnienia=funkcja wymierna}$$

$$\text{Re}(z) \leq 0$$

24

$$\left| \frac{1 + z/2}{1 - z/2} \right| \leq 1$$

jest A-stabilna, ale metodę 2 rzędu dokładności już mieliśmy (trapezów)

gdy rozwinie w Taylora  $1+z+z^2/2+z^3/4$  [zamiast 6]



niejawna metoda Rungego-Kutty w jednej odślonie (metoda rzędu dokladności 2)

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1\right)$$

$$U_1 = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f\left(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, U_1\right)$$

tabela Butchera

1/2	1/2
	1

maksymalny rzad metody RK w s odslonach wynosi 2s

najdokladniejsza niejawna metoda Rungego-Kutty w 2 odslonach - rzad dokladności 4 jak jawne RK4

$$\begin{array}{c|cc}
 \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

dla najdokladniejszych niejawnych RK nie uzywamy chwili  $t_{n-1}$ , ani chwili  $t_n$   
 tylko c danych przez mapowanie zer wielomianow Legendre'a do przedzialu  $[0,1]$  (patrz dalej)

## Metody kolokacji dla zwyczajnego równania różniczkowego $u'=f$

zajmiemy się pojedynczym krokiem czasowym  $t_{n-1}$  do  $t_n$

$$u(t_{n-1}) = u_0$$

$$u'(t_{n-1}) = f(t_{n-1}, u(t_{n-1}))$$

$$u'(t_n) = f(t_n, u(t_n))$$



poszukujemy wielomianu,

który interpoluje a) wartość funkcji w chwili początkowej

b) równanie różniczkowe w 2 dyskretnych

punktach

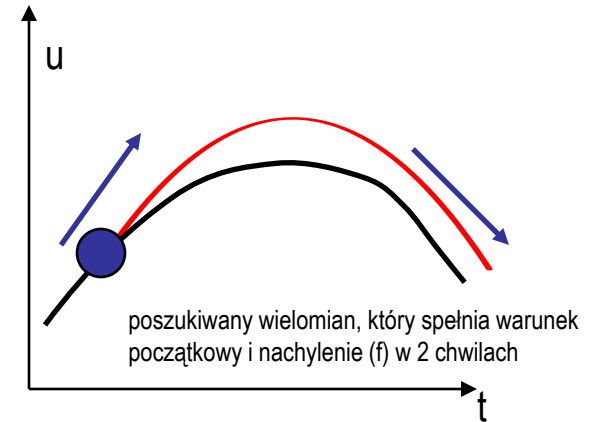
wartość tego wielomianu w chwili  $t_n$  wyprodukuje przepis na  $u_n$

# Metody kolokacji dla zwyczajnego równania różniczkowego $u'=f$

najpierw przykład, potem uogólnienie:

zajmiemy się pojedynczym krokiem czasowym  $t_{n-1}$  do  $t_n$

$$\begin{aligned}u(t_{n-1}) &= u_0 \\u'(t_{n-1}) &= f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) \\u'(t_n) &= f(t_n, u(t_n))\end{aligned}$$



wielomian, który interpoluje a) wartość funkcji w chwili początkowej  
b) równanie różniczkowe w 2 dyskretnych punktach  
jego wartość w chwili  $t_n$  produkuje  $u_n$

3 warunki  $\rightarrow$  potrzebna parabola  $w(t) = \alpha(t - t_{n-1})^2 + \beta(t - t_{n-1}) + \gamma$

$$\gamma = u_0$$

$$\beta = f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) \xrightarrow{w(t_n)=u_n} u_n = \frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n-1}, u_{n-1})}{2} \Delta t + u(t_{n-1})$$

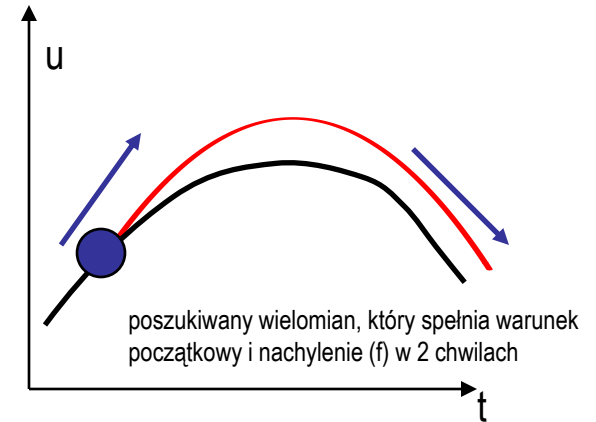
$$2\alpha\Delta t + f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) = f(t_n, u(t_n))$$

# Metody kolokacji dla zwyczajnego równania różniczkowego $u'=f$

najpierw przykład, potem uogólnienie:

zajmiemy się pojedynczym krokiem czasowym  $t_{n-1}$  do  $t_n$

$$\begin{aligned}u(t_{n-1}) &= u_0 \\u'(t_{n-1}) &= f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) \\u'(t_n) &= f(t_n, u(t_n))\end{aligned}$$



wielomian, który interpoluje a) wartość funkcji w chwili początkowej  
b) równanie różniczkowe w 2 dyskretnych punktach  
jego wartość w chwili  $t_n$  produkuje  $u_n$

3 warunki  $\rightarrow$  potrzebna parabola  $w(t) = \alpha(t - t_{n-1})^2 + \beta(t - t_{n-1}) + \gamma$

$$\gamma = u_0$$

$$\beta = f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) \quad \xrightarrow{w(t_n)=u_n} \quad u_n = \frac{f(t_n, u_n) + f(t_{n-1}, u_{n-1})}{2} \Delta t + u(t_{n-1})$$

$$2\alpha\Delta t + f(t_{n-1}, u(t_{n-1})) = f(t_n, u(t_n))$$

wzór trapezów (dlatego rzędu 2: dokładny dla paraboli!)





$$w(t_{n-1}) = u_{n-1}$$

$$w'(t_{n-1} + c_i \Delta t) = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, w(t_{n-1} + c_i \Delta t)) \equiv k_i$$

Interpolujemy pochodną w wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a w chwilach czasowych  $t_{n-1} + c_j \Delta t$

$$w'(t) = \sum_{i=1}^s k_i L_i(t)$$

$$z \quad L_i(t) = \prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{t - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}$$

↑  
wielomian węzłowy Lagrange'a

gdzie  $\tau_j = t_{n-1} + c_j \Delta t$

$$L_i(\tau_j) = \delta_{ij}$$

$$w'(t) = \sum_{i=1}^s k_i L_i(t) \quad L_i(t) = \prod_{j=1, i \neq j}^s \frac{t - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad \tau_j = t_{n-1} + c_j \Delta t$$

scalkowana pochodna + warunek poczatkowy daje

$$w(\tau) = \sum_{i=1}^s k_i \int_{t_{n-1}}^{\tau} L_i(t) dt + u_{n-1}$$

na koncu przedzialu:

$$w(t_n) = \sum_{i=1}^s k_i \int_{t_{n-1}}^{t_n} L_i(t) dt + u_{n-1}$$

jak RK

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

pod warunkiem, że

$$\Delta t b_i = \int_{t_{n-1}}^{t_n} L_i(t) dt$$


---

wlozyliśmy **c**  
dostaliśmy **b**  
jeszcze **a** do wyznaczenia



$$w'(t) = \sum_{i=1}^s k_i L_i(t) \quad L_i(t) = \prod_{j=1, i \neq j}^s \frac{t - \tau_j}{\tau_i - \tau_j} \quad \tau_j = t_{n-1} + c_j \Delta t$$

pochodna scałkowana do  $\tau$  + warunek początkowy daje

$$w(\tau) = \sum_{i=1}^s k_i \int_{t_{n-1}}^{\tau} L_i(t) dt + u_{n-1}$$

wstawić do:

$$w'(t_{n-1} + c_i \Delta t) = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, w(t_{n-1} + c_i \Delta t)) \equiv k_i$$

jak w RK  
pod  
warunkiem że

$$k_i = f(t_{n-1} + c_i \Delta t, u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$$


---

$$\Delta t a_{ij} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1} + c_i \Delta t} L_j(t) dt$$


---

$$\Delta t b_i = \int_{t_{n-1}}^{t_n} L_i(t) dt$$

$$\Delta t a_{ij} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1} + c_i \Delta t} L_j(t) dt$$

wyrażenia, na a i b  
są niezależne od kroku czasowego:

po przesunięciu  $t$  o  $t_{n-1}$ :

po podstawieniu  $\tau = t'/\Delta t$

$$\Delta t b_i = \int_0^{\Delta t} L_i(t') dt' = \int_0^1 L_i(\tau) d\tau \Delta t$$

$$\text{podobnie: } a_{ij} = \int_0^{c_i} L_j(\tau) d\tau$$

**Mamy przepis na uzyskiwanie a i b z c**

wybór punktów kolokacji :  $t_{n-1} + c_i \Delta t = \text{tak aby uzyskać maksymalny rząd dokładności albo np } L\text{-stabilność}$

tabela Butchera dla najdokładniejszej niejawniej RK (2 odsłony, rząd 4):

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

**A** oraz **b** w tabeli Butchera wynikają z wyboru punktów kolokacji **c**

$$b_i = \int_0^1 L_i(\tau) d\tau$$

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} L_j(\tau) d\tau$$

$$L_i(\tau) = \prod_{j=1, j \neq i}^s \frac{\tau - c_j}{c_i - c_j}$$

c1	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
c2	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		b1	b2

$$L_1 = \frac{\tau - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}(-\tau + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}) \xrightarrow{\int_0^1} -\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad b_1$$

$$L_2 = \frac{\tau - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}(\tau - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}) \xrightarrow{\int_0^1} \sqrt{3} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad b_2$$

$$L_1 \xrightarrow{\int_0^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}}} a_{11}$$

itd.

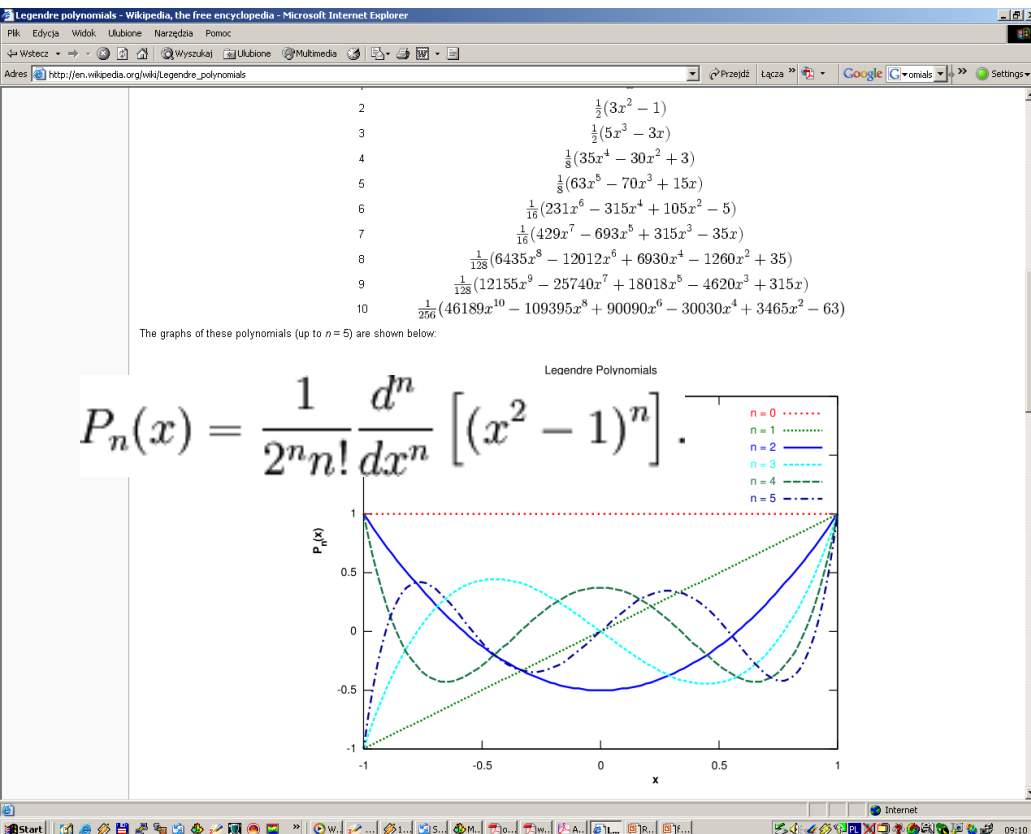
$$L_2 \xrightarrow{\int_0^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}}} a_{12}$$

współczynniki w tabeli Butchera dla niejawnych RK można uzależnić od punktów kolokacji

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}} \quad \left| \quad \frac{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}} \quad \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \right.$$

z teorii kwadratur Gaussa -- maksymalną dokładność [do całkowania wielomianów stopnia  $2s-1$ ] uzyskujemy wybierając punkty kolokacji (Gaussa) w  $s$  zerach wielomianów Legendre'a.

2 punkty: Gauss całkuje dokładnie  $w'(t)$  – gdy ta będzie wielomianem stopnia 3, stąd 4-ty rząd metody RK  
**2 punkty Gaussa: dokładnie całkujemy do wielomianu trzeciego stopnia**  
**dla 2 punktów wybranych jak popadło – dokładnie tylko do pierwszego stopnia**



$P_2$  w przedziale  $[-1,1]$   
 ma zera w  $\pm \sqrt{3}/3$

Przedział  $[-1,1]$  w  $[0,1]$  mapowany wg.  
 $t := (x+1)/2$

co daje punkty kolokacji niejawnej  
 metody RK maksymalnej dokładności

mamy przepis na generację tablic Butchera  
 z zer wielomianów Legendre'a

## region bezwzględnej stabilności dla ogólnej niejawnej metody RK

$$u' = \lambda u, z = \lambda \Delta t$$

$$R(z) = \left( 1 + z \mathbf{b}^T (\mathbf{I} - z \mathbf{A})^{-1} \mathbf{1} \right)$$

dla metod niejawnych: nie można obciąć rozwinięcia Taylora, bo  $\mathbf{A}$  pełna współczynnik wzmocnienia nie jest wielomianem, okazuje się, że jest funkcją wymierną

$|R(z)| \leq 1$  może być nieograniczony

niejawna 1 stopniowa

$$u_n = u_{n-1} \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

## region bezwzględnej stabilności dla ogólnej niejawnej metody RK

$$R(z) = \left(1 + z\mathbf{b}^T (\mathbf{I} - z\mathbf{A})^{-1} \mathbf{1}\right)$$

wsp wzmocnienia niejawnego RK

$$R(z) = \exp(z) + O(z^{p+1})$$

metoda rzędu  $p$   
ma współczynnik wzmocnienia,  
który do  $O(z^{p+1})$  zgadza się z eksponentą

Współczynniki wzmocnienia jawnych RK – wielomany, niejawnych – funkcje wymierne

przybliżenie Padé (j,k) funkcji  $\exp(z)$  [funkcja wymierna będąca przybliżeniem  $\exp(z)$  maksymalnego rzędu]

$$R_{jk}(z) = \frac{P_k(z)}{Q_j(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \dots + p_k z^k}{q_0 + q_1 z + \dots + q_j z^j}$$


$P_k, Q_j$  nie mają wspólnych czynników (nie można uprościć ułamka)

Warunek normalizacji:  $q_0=1$

Do wyznaczenia  $k+j+1$  wartości.

Rząd dokładności do uzyskania:  $k+j$  (bo od wykładnika 0 zaczynamy uzgadniać).

$$R_{jk}(z) = \exp(z) + O(z^{k+j+1})$$


$$\sum_{i=0}^{k+j} \frac{z^i}{i!} = \frac{\sum_{i=0}^k p_i z^i}{\sum_{i=0}^j q_i z^i} + O(z^{k+j+1})$$

przykład:

wyznaczyć przybliżenie Padé (j,k)=(2,0) funkcji exp(z)

$$\sum_{i=0}^{k+j} \frac{z^i}{i!} = \frac{\sum_{i=0}^k p_i z^i}{\sum_{i=0}^j q_i z^i} + O(z^{k+j+1})$$

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) = \frac{p_0}{1 + q_1 z + \frac{q_2}{2} z^2} + O(z^3)$$

$$\left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) \left(1 + q_1 z + \frac{q_2}{2} z^2\right) = p_0 + O(z^3)$$

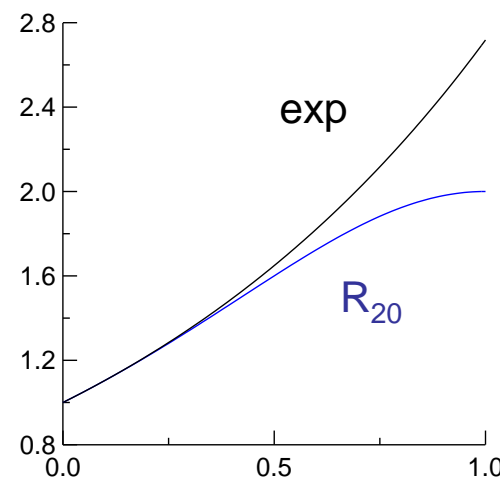
$$p_0 = 1$$

$$q_1 + 1 = 0$$

$$q_1 + 1/2 + q_2/2 = 0$$

$$\longrightarrow (p_0 = 1, q_1 = -1, q_2 = 1/2)$$

$$\exp(z) = \frac{1}{1 - z + z^2/2} + O(z^3)$$



39

R<sub>20</sub> pozostaje skończone dla rzeczywistego z, w przeciwieństwie do obciętego rozw. Taylora

przybliżenia Padé  $R_{jk}$  funkcji  $\exp(z)$ :

$$\sum_{i=0}^{k+j} \frac{z^i}{i!} = \frac{\sum_{i=0}^k p_i z^i}{\sum_{i=0}^j q_i z^i} + O(z^{k+j+1})$$

współczynniki wzmocnienia metod RK

	$k = 0$	1	2	
$j = 0$	1	$1 + z$	$1 + z + z^2/2$	jawny RK1 (Euler)
1	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1+z/2}{1-z/2}$	$\frac{1+2z/3+z^2/6}{1-z/3}$	RK2 (jawna)
2	$\frac{1}{1-z+z^2/2}$	$\frac{1+z/3}{1-2z/3+z^2/6}$	$\frac{1+z/2+z^2/12}{1-z/2+z^2/12}$	niejawny jednostopniowy RK

niejawny Euler  
RK Radaua  $s=1$

RK Radaua rzędu 2

niejawny dwustopniowy RK  
RK Legendre'a 2stopniowy

dla  $s$  odstępów metoda rzędu  $2s$  jest tylko jedna, a jej błąd wzmocnienia jest przybliżeniem Padé eksponenty  $R_s$

Metody, które prowadzą do diagonalu oraz dwóch pierwszych poddiagonalu tabeli Padé są A-stabilne (bezwzględnie stabilne dla  $\text{Re}(z) \leq 0$ )

na diagonalu  $R_{ss}$ :  $|q_s| = |p_s|$  więc  $|R(z)| \rightarrow 1$  gdy  $|z| \rightarrow \infty$   
 poniżej diagonalu - dla  $(1,0), (1,2), (2,1)$ :  $|R(z)| \rightarrow 0$  gdy  $|z| \rightarrow \infty$



definicja:

metoda jest L-stabilna jeśli jest A-stabilna oraz  $|R(z)| \rightarrow 0$  gdy  $|z| \rightarrow \infty$

	$k = 0$	1	2
$j = 0$	1	$1 + z$	$1 + z + z^2/2$
1	$\frac{1}{1-z}$	$\frac{1+z/2}{1-z/2}$	$\frac{1+2z/3+z^2/6}{1-z/3}$
2	$\frac{1}{1-z+z^2/2}$	$\frac{1+z/3}{1-2z/3+z^2/6}$	$\frac{1+z/2+z^2/12}{1-z/2+z^2/12}$

L-stabilne

A-stabilne najwyższego rzędu dokładności (czyli nie L-stabilne) przydatne, gdy rozwiązanie szybko oscyluje, czyli  $\text{Re}(\lambda) \approx 0$ , ale  $|\text{Im}(\lambda)| \gg 1$

metody L-stabilne przydatne w problemach sztywnych gdy  $\text{Re}(\lambda) \ll 0$   
 wtedy okazuje się być opłacalne zrezygnować z wysokiej dokładności na rzecz stabilności

- Punkty kolokacji wybrane wg zer wielomianu Legendre'a
- : maksymalny rząd  $2s$ , metody A-stabilne, nie L-stabilne
  - : ze współczynnikami wzmocnienia z diagonalii tabeli Pade

Osobna klasa to metody RK pochodzące od wielomianów Radaua ( $2s-1$ )

definiowanych na podstawie wielomianu Legendre'a  $P$   
jedno z zer wielomianu: na prawym końcu przedziału

$$R_s = P_s \pm P_{s-1}$$

Tabela Butchera dla RK Radaua  $s=2$ :

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

RK Radaua: odpowiadają poddiagonalii w tabeli Pade : są L-stabilne (lepsze od RK Legendre'a w problemach sztywnych)

## NJRK 2, sposób rozwiązywania równań

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

predyktor= układ równań nieliniowych

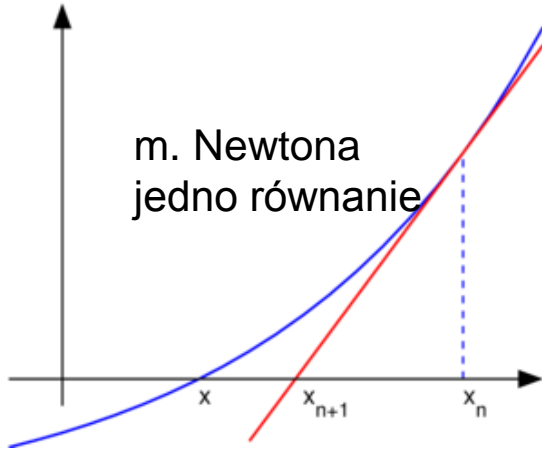
$$U_1 = u_{n-1} + dt [a_{11}f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + a_{12}f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

$$U_2 = u_{n-1} + dt [a_{21}f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + a_{22}f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

korektor (podstawienie po rozwiązaniu równań predyktora na U1, U2)

$$u_n = u_{n-1} + dt [b_1f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + b_2f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

# Niejawne metody RK = sposób rozwiązywania



m. Newtona  
jedno równanie

jawne RK = stosuje się kolejne podstawienia = łatwo  
niejawne RK = metoda Newtona

↓ korektor = tylko podstawienie

$$u_n = u_{n-1} + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f(t_{n-1} + c_i \Delta t, U_i)$$

$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j)$$

↗ predyktor: układ s równań nieliniowych do rozwiązania

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

$$F(x) = 0$$

$$F(x_n + \Delta x) = F(x_n) + \Delta x F'(x_n)$$

$$\underline{-F(x_n) = \Delta x F'(x_n)}$$

M. Newtona dla układu 2 równań

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta x f'_x(x, y) + \Delta y f'_y(x, y) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

$$g(x + \Delta x, y + \Delta y) = g(x, y) + \Delta x g'_x(x, y) + \Delta y g'_y(x, y) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$$

poszukiwany taki krok  $\Delta x, \Delta y$ , aby lewa strona znikła:

$$-f(x, y) = \Delta x f'_x(x, y) + \Delta y f'_y(x, y)$$

$$-g(x, y) = \Delta x g'_x(x, y) + \Delta y g'_y(x, y)$$

$$\begin{bmatrix} -f \\ -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

↗ macierz Jakobiego

$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j)$$

układ s : równań nieliniowych

$$F_i(U_1, U_2, \dots, U_N) = U_i - u_{n-1} - \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + \Delta t c_j, U_j) = 0$$

układ równań rozwiązywany w jednej iteracji na przesunięcia  $\Delta U_i$

$$- \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial U_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial U_s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial U_1} & \frac{\partial F_s}{\partial U_2} & \cdots & \frac{\partial F_s}{\partial U_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_s \end{bmatrix} \quad \text{było:} \quad \begin{bmatrix} -f \\ -g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

## Niejawne metody RK – rozwiązywanie równań predyktora

$$U_i = u_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + c_j \Delta t, U_j)$$

układ  $s$  : równań nieliniowych

$$F_i(U_1, U_2, \dots, U_N) = U_i - u_{n-1} - \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n-1} + \Delta t c_j, U_j) = 0$$

układ równań rozwiązywany w jednej iteracji na przesunięcia  $\Delta U_i$

$$-\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial U_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial U_s} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial U_1} & \frac{\partial F_s}{\partial U_2} & \dots & \frac{\partial F_s}{\partial U_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_s \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} \frac{\partial F_k}{\partial U_l} &= \delta_{kl} - \Delta t \sum_{j=1}^s a_{kj} \frac{\partial f}{\partial U_l}(t_{n-1} + \Delta t c_j, U_j) \\ &= \delta_{kl} - \Delta t \sum_{j=1}^s a_{kj} \frac{\partial f}{\partial u}(t_{n-1} + \Delta t c_j, U_j) \delta_{jl} \\ &= \delta_{kl} - \Delta t a_{kl} \frac{\partial f}{\partial u}(t_{n-1} + \Delta t c_l, U_l) \end{aligned}$$

w każdej iteracji musimy wyliczyć  
s pochodnych  $f$  po  $u$   
(w  $s$  chwilach czasowych)

$$\frac{du^1}{dt} = f^1(t, u^1, u^2) \text{ niejawne RK dla układu 2 równań (laboratorium)}$$

$$\frac{du^2}{dt} = f^2(t, u^1, u^2)$$

predyktor dla pojedynczego równania:

$$U_1 = u_{n-1} + dt [a_{11}f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + a_{12}f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

$$U_2 = u_{n-1} + dt [a_{21}f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + a_{22}f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

$\frac{du^1}{dt} = f^1(t, u^1, u^2)$  niejawne RK dla układu 2 równań (laboratorium)

$$\frac{du^2}{dt} = f^2(t, u^1, u^2)$$

predyktor dla pojedynczego równania:

$$U_1 = u_{n-1} + dt [a_{11}f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + a_{12}f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

$$U_2 = u_{n-1} + dt [a_{21}f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + a_{22}f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

predyktor dla dwóch równań

numer szukanej funkcji

nr chwili

$$U_1^1 = u_{n-1}^1 + dt [a_{11}f^1(t_{n-1}, c_1dt, U_1^1, U_1^2) + a_{12}f^1(t_{n-1}, c_2dt, U_2^1, U_2^2)]$$

$$U_1^2 = u_{n-1}^2 + dt [a_{11}f^2(t_{n-1}, c_1dt, U_1^1, U_1^2) + a_{12}f^2(t_{n-1}, c_2dt, U_2^1, U_2^2)]$$

$$U_2^1 = u_{n-1}^1 + dt [a_{21}f^1(t_{n-1}, c_1dt, U_1^1, U_1^2) + a_{22}f^1(t_{n-1}, c_2dt, U_2^1, U_2^2)]$$

$$U_2^2 = u_{n-1}^2 + dt [a_{21}f^2(t_{n-1}, c_1dt, U_1^1, U_1^2) + a_{22}f^2(t_{n-1}, c_2dt, U_2^1, U_2^2)]$$



$$\frac{du^1}{dt} = f^1(t, u^1, u^2) \text{ niejawne RK dla układu 2 równań (laboratorium)}$$

$$\frac{du^2}{dt} = f^2(t, u^1, u^2)$$

predyktor dla pojedynczego równania:

$$U_1 = u_{n-1} + dt [a_{11}f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + a_{12}f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

$$U_2 = u_{n-1} + dt [a_{21}f(t_{n-1} + c_1dt, U_1) + a_{22}f(t_{n-1} + c_2dt, U_2)]$$

predyktor dla dwóch równań

numer szukanej funkcji

nr chwili

$$U_1^1 = u_{n-1}^1 + dt [a_{11}f^1(t_{n-1}, c_1dt, U_1^1, U_1^2) + a_{12}f^1(t_{n-1}, c_2dt, U_2^1, U_2^2)]$$

$$U_1^2 = u_{n-1}^2 + dt [a_{11}f^2(t_{n-1}, c_1dt, U_1^1, U_1^2) + a_{12}f^2(t_{n-1}, c_2dt, U_2^1, U_2^2)]$$

$$U_2^1 = u_{n-1}^1 + dt [a_{21}f^1(t_{n-1}, c_1dt, U_1^1, U_1^2) + a_{22}f^1(t_{n-1}, c_2dt, U_2^1, U_2^2)]$$

$$U_2^2 = u_{n-1}^2 + dt [a_{21}f^2(t_{n-1}, c_1dt, U_1^1, U_1^2) + a_{22}f^2(t_{n-1}, c_2dt, U_2^1, U_2^2)]$$

w zapisie wektorowym: wracamy do formy dla pojedynczego równania  $\mathbf{U}_1 = [U_1^1, U_1^2]^T$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{u}_{n-1} + dt [a_{11}\mathbf{f}(t_{n-1}, c_1dt, \mathbf{U}_1) + a_{12}\mathbf{f}(t_{n-1}, c_2dt, \mathbf{U}_2)]$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{u}_{n-1} + dt [a_{21}\mathbf{f}(t_{n-1}, c_1dt, \mathbf{U}_1) + a_{22}\mathbf{f}(t_{n-1}, c_2dt, \mathbf{U}_2)]$$

na laboratorium -  $f$  liniowe więc układ równań liniowych

**Układ**  $m$  równań różniczkowych rozwiązywany niejawną metodą RK

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \longleftarrow \mathbf{u}, \mathbf{f}, \mathbf{U}_i \text{ wektory o } m \text{ zmiennych}$$

niejawny schemat RK: (wzory jak dla pojedynczego równania, ale z arytmetyką wektorową)

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(t_{n-1} + c_j \Delta t, \mathbf{U}_j) \longleftarrow \text{s równań predyktora to układ nieliniowy do rozwiązania}$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{f}(t_{n-1} + c_j \Delta t, \mathbf{U}_j) \longleftarrow \text{gdy już mamy } \mathbf{U} \text{ korektor ma formę podstawienia [jak w jawnych RK]}$$

predyktor zapisany w formie układu  $s$  równań nieliniowych:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_s) = \mathbf{U}_i - \mathbf{u}_{n-1} - \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(t_{n-1} + \Delta t c_j, \mathbf{U}_j) = 0$$

tyle równań nieliniowych  
ile etapów w RK ( $s$ )  
każde przybliżenie  $\mathbf{U}_i$   
ma  $m$  składowych

$$- \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_s} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{U}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{U}_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_1 \\ \Delta \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{U}_s \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \\ \text{s wektorów o } m \text{ składowych} \\ \updownarrow \\ \text{łącznie } ms \text{ niewiadomych} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{U}_l} = \mathbf{I} \delta_{kl} - \Delta t a_{kl} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(t_{n-1} + \Delta t c_l, \mathbf{U}_l) \longleftarrow \text{macierz } m \text{ na } m \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_j}$$

## Układ równań różniczkowych rozwiązywany niejawną metodą RK z iteracją Newtona

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial \mathbf{U}_s} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \mathbf{U}_s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{U}_1} & \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{U}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{U}_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_1 \\ \Delta \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{U}_s \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial \mathbf{U}_l} = \mathbf{I} \delta_{kl} - \Delta t a_{kl} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(t_{n-1} + \Delta t c_l, \mathbf{U}_l) \quad \text{macierz } m \text{ na } m \quad \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$$

z oznaczeniem:  
macierz Jakobianu  
policzona w  $l$ -tej odśłonie

$$\mathbf{J}_l = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(t_{n-1} + \Delta t c_l, \mathbf{U}_l) \quad (\text{macierz } m \text{ na } m)$$

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t a_{11} \mathbf{J}_1 & -\Delta t a_{12} \mathbf{J}_2 & \cdots & -\Delta t a_{1s} \mathbf{J}_s \\ -\Delta t a_{21} \mathbf{J}_1 & \mathbf{I} - \Delta t a_{22} \mathbf{J}_2 & \cdots & -\Delta t a_{2s} \mathbf{J}_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta t a_{s1} \mathbf{J}_1 & -\Delta t a_{s2} \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{I} - \Delta t a_{ss} \mathbf{J}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_1 \\ \Delta \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{U}_s \end{bmatrix}$$

to jest przepis na jeden krok iteracyjny, a iteracji może być wiele

dla układów wielu (setek-tysięcy) układów równań wyliczenie (oszacowanie) Jakobianu w  $s$  odślonach - nowych w każdej iteracji - może być kosztowne, wtedy rezygnujemy z liczenia  $\mathbf{J}$  w każdej odśłonie

pomysł: zastosować Jakobiany wyliczone w chwili początkowej  $\mathbf{u}_{n-1}$  i nie zmieniać ich w czasie iteracji

wtedy:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(t_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1})$$

przybliżony Jakobian nie zmienia rozwiązania gdy osiągniemy zbieżność może ją spowolnić albo uniemożliwić, ale przy dużych macierzach zazwyczaj się opłaca

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t a_{11} \mathbf{J}_1 & -\Delta t a_{12} \mathbf{J}_2 & \dots & -\Delta t a_{1s} \mathbf{J}_s \\ -\Delta t a_{21} \mathbf{J}_1 & \mathbf{I} - \Delta t a_{22} \mathbf{J}_2 & \dots & -\Delta t a_{2s} \mathbf{J}_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta t a_{s1} \mathbf{J}_1 & -\Delta t a_{s2} \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{I} - \Delta t a_{ss} \mathbf{J}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_1 \\ \Delta \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{U}_s \end{bmatrix}$$

odpadają indeksy przy  $\mathbf{J}$  i mamy

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t a_{11} \mathbf{J} & -\Delta t a_{12} \mathbf{J} & \dots & -\Delta t a_{1s} \mathbf{J} \\ -\Delta t a_{21} \mathbf{J} & \mathbf{I} - \Delta t a_{22} \mathbf{J} & \dots & -\Delta t a_{2s} \mathbf{J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta t a_{s1} \mathbf{J} & -\Delta t a_{s2} \mathbf{J} & \dots & \mathbf{I} - \Delta t a_{ss} \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_1 \\ \Delta \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{U}_s \end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}$  policzymy tylko raz, ale wykonamy więcej iteracji często opłaca się raczej dłużej iterować niż w każdej iteracji wyliczać s macierzy Jakobiego

Metody RK produkują się na zamówienie  
ze względu na

- 1) dokładność
- 2) A/L-stabilność
- 3) łatwość iterowania równań predyktora → SDIRK

DIRK: macierz  $\mathbf{A}$  jest dolnoprzekątniowa (diagonally implicit RK)

SDIRK: wszystkie wyrazy na diagonalu są identyczne (singly diagonally implicit ...)

metody DIRK: iteracja Newtona (układ równań) rozwiązywany blokowo

metody SDIRK: dodatkowo pojedyncza faktoryzacja macierzy  $m$  na  $m$  (nie  $sm$  na  $sm$ )

**[dokładność najwyżej  $s+1$  [zamiast maksymalnej ( $2s$ )]**

**ale tania iteracja Newtona]**

wtedy macierz układu równań pojedynczej iteracji Newtona  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & & & \\ a_{21} & a & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{s1} & a_{s2} & & a \end{bmatrix}$

wtedy macierz układu równań pojedynczej iteracji Newtona:

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t a_{11} \mathbf{J} & -\Delta t a_{12} \mathbf{J} & \dots & -\Delta t a_{1s} \mathbf{J} \\ -\Delta t a_{21} \mathbf{J} & \mathbf{I} - \Delta t a_{22} \mathbf{J} & \dots & -\Delta t a_{2s} \mathbf{J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta t a_{s1} \mathbf{J} & -\Delta t a_{s2} \mathbf{J} & \dots & \mathbf{I} - \Delta t a_{ss} \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_1 \\ \Delta \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{U}_s \end{bmatrix}$$

ma postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t a \mathbf{J} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\Delta t a_{21} \mathbf{J} & \mathbf{I} - \Delta t a \mathbf{J} & 0 & \dots & 0 \\ -\Delta t a_{31} \mathbf{J} & -\Delta t a_{32} \mathbf{J} & \mathbf{I} - \Delta t a \mathbf{J} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta t a_{s1} \mathbf{J} & -\Delta t a_{s2} \mathbf{J} & -\Delta t a_{s3} \mathbf{J} & \dots & \mathbf{I} - \Delta t a \mathbf{J} \end{bmatrix}$$

DIRK: macierz  $\mathbf{A}$  jest dolnoprzekątniowa (diagonally implicit RK)

SDIRK: wszystkie wyrazy na diagonalu są identyczne (singly diagonally implicit ...)

metody DIRK: iteracja Newtona (układ równań) rozwiązywany blokowo

metody SDIRK: dodatkowo pojedyncza faktoryzacja macierzy  $m$  na  $m$  (nie  $sm$  na  $sm$ )

**[dokładność najwyżej  $s+1$  [zamiast maksymalnej ( $2s$ )]**

**ale tania iteracja Newtona]**

wtedy macierz układu równań  $-\mathbf{F} = \mathbf{M}\Delta\mathbf{U}$  pojedynczej iteracji Newtona:

ma postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} - \Delta t a \mathbf{J} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\Delta t a_{21} \mathbf{J} & \mathbf{I} - \Delta t a \mathbf{J} & 0 & \dots & 0 \\ -\Delta t a_{31} \mathbf{J} & -\Delta t a_{32} \mathbf{J} & \mathbf{I} - \Delta t a \mathbf{J} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Delta t a_{s1} \mathbf{J} & -\Delta t a_{s2} \mathbf{J} & -\Delta t a_{s3} \mathbf{J} & \dots & \mathbf{I} - \Delta t a \mathbf{J} \end{bmatrix}$$

zamiast faktoryzacji macierzy  $sm$  na  $sm$  (złożoność  $[sm]^3$ ) :

- 1) faktoryzujemy tylko jedną macierz  $m$  na  $m$  : blok diagonalny [złożoność  $[m]^3$ ] dla  $s=4$ : 64 x szybciej
- 2) rozwiązujemy równanie  $m$  na  $m$  na  $DU_1$  z pierwszego „wiersza blokowego” i przechodzimy do drugiego gdzie  $DU_1$  wykorzystana do złożenia prawej strony równania na  $DU_2$  itd..

skonstruujmy SDIRK dla  $s=2$ ,  $\max p=s+1$

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a & 0 \\ c_2 & \alpha & a \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$1 = b_1 + b_2$$

$$\frac{1}{2} = b_1 c_1 + b_2 c_2$$

$$\frac{1}{3} = b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2$$

$$c_1 = a$$

$$c_2 = \alpha + a$$

$$\frac{1}{6} = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{A} \mathbf{1} = \mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a c_1 \\ \alpha c_1 + a c_2 \end{bmatrix}$$

warunki konieczne na wsp RK:

$$\frac{1}{l} = \sum_{i=1}^s b_i (c_i)^{l-1} \quad k \leq p$$

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$$

$$\frac{1}{k!} = \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{1} \quad \begin{array}{l} \text{dla } k \leq p \\ \text{niezależne} \\ \text{dla } k > 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} a & a & 0 \\ 1-a & 1-2a & a \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

ta z minusem : A-stabilna  
ta z plusem - nie

$$a = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \right)$$