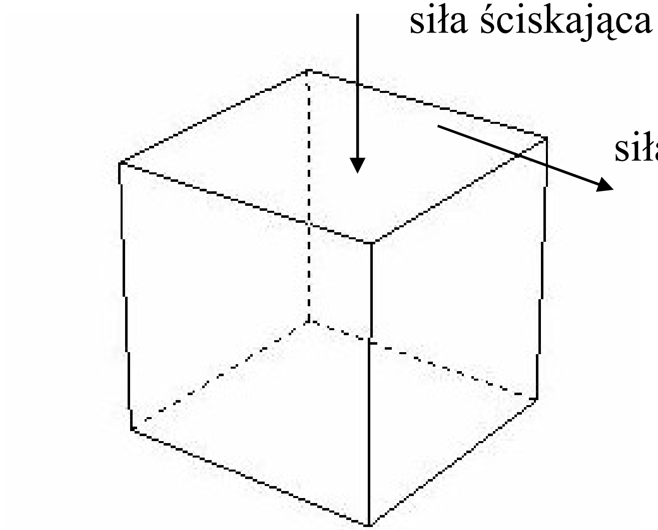
podstawowe równania hydrodynamiki
(równania Naviera-Stokesa rozwiązanie dla stacjonarnego przepływu cieczy lepkiej nieściśliwej)

ciała dzielimy na płyny oraz ciała stałe
Płyn: substancja, która odkształca się pod wpływem dowolnej siły (naprężenia),
dokładniej:
substancja, która pozostając w spoczynku nie może stawiać oporu naprężeniom ścinającym

siła ściskająca [normalna] (dąży do zmiany objętości)



siła ścinająca [styczna] (dąży do zmiany kształtu)

Siły działające na ciało stałe wywołują odkształcenia
(prawo Hooke'a - odkształcenie proporcjonalne do naprężeń).
Siły działające na płyny skutkują ich ruchem
(ciecze Newtonowskie - naprężenia proporcjonalne do gradientu prędkości).

Płyny: ciecze i gazy

ciecz – zajmuje w przybliżeniu stałą objętość,
wytwarza powierzchnię

gaz – zajmuje całą dostępną objętość,
powierzchnia nie występuje

bańka wody w stanie nieważkości
(zdjęcie z modułu mieszkalnego stacji MIR)

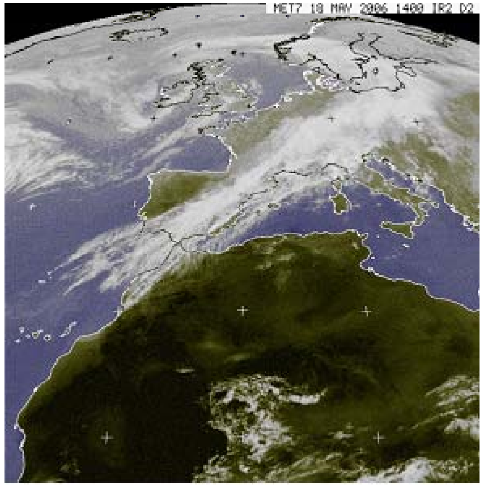
Opis ruchu płynów: mechanika + termodynamika
część termodynamiczna szczególnie ważna dla gazów i płynów ściśliwych
(zmienna gęstość, sprężanie i rozprężanie, zmiana temperatury, zmiana
własności płynu).
Na laboratorium ćwiczymy problem cieczy nieściśliwej (hydrodynamika)

Mechanika płynów: zastosowania

hydrodynamika

akustyka

meteorologia

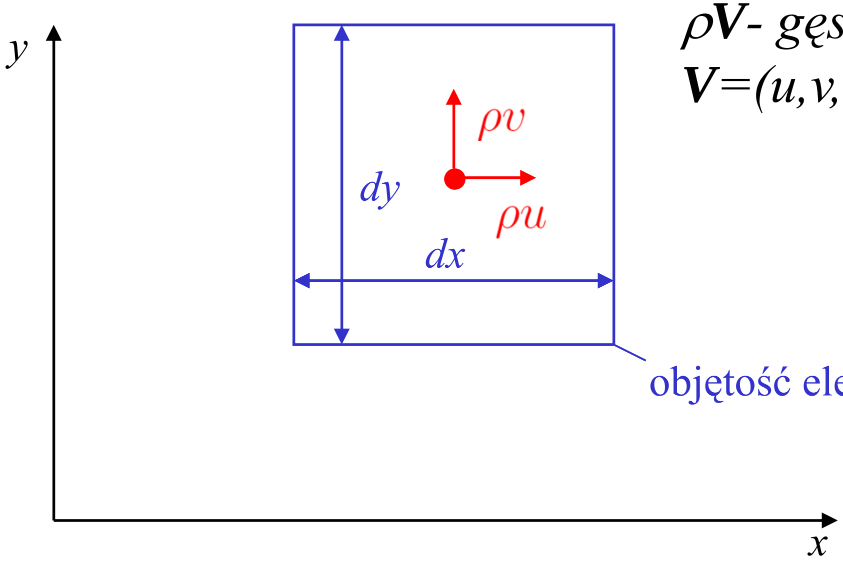


teoria lotu

itd.
ważnych zastosowań jest b.wiele
modelowanie realistyczne
ma zawsze ściśle numeryczny
charakter.

oparte na teorii opracowanej
w XVIII/XIX wieku.
(równania, które łatwiej napisać
niż rozwiązać)

zachowanie masy i równanie ciągłości



$\rho\mathbf{V}$*- gęstość prądu masy*
$\mathbf{V}=(u,v,w)$

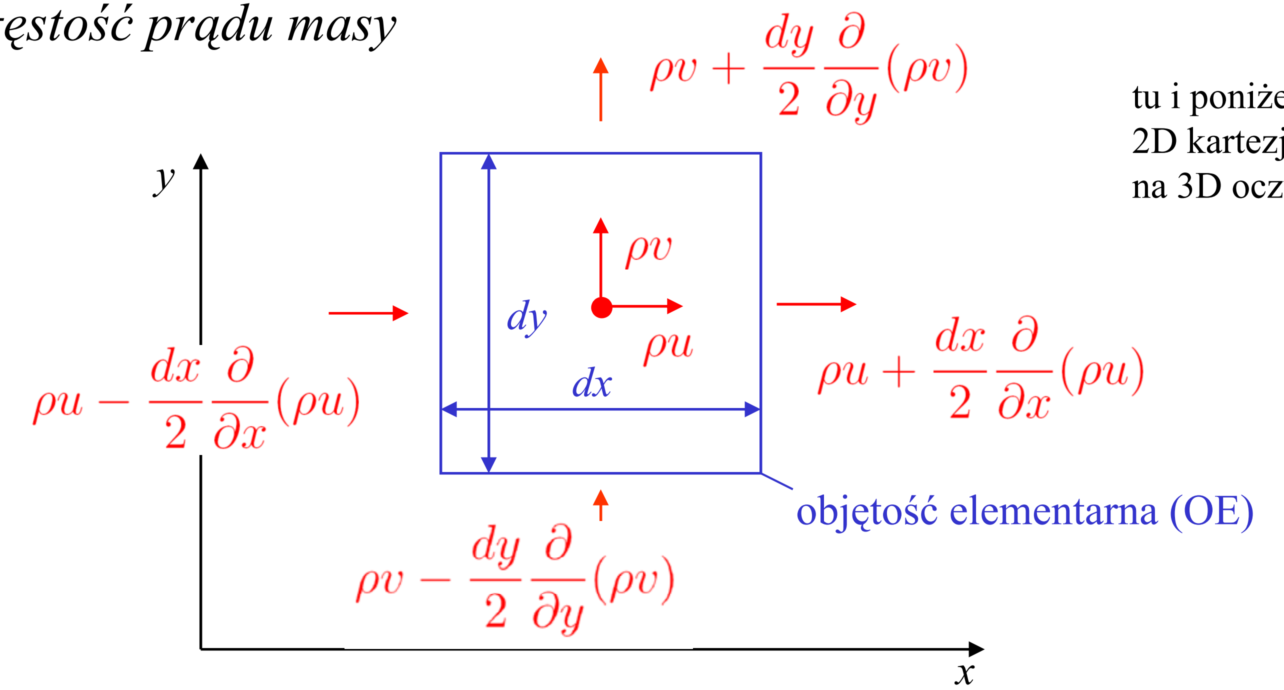
$\rho(x,y,z,t)$ - gęstość płynu w punkcie (x,y,z) w chwili t
$u(x,y,z,t)$ prędkość płynu w kierunku x.
$v(x,y,z,t)$ w kierunku y.
$w(x,y,z,t)$ w kierunku z

przyrost masy w OE = masa wpływająca do OE
– masa wypływająca z OE

Równanie ciągłości

*ρ**V**- gęstość prądu masy*

tu i poniżej
2D kartezjańskie, uogólnienie
na 3D oczywiste



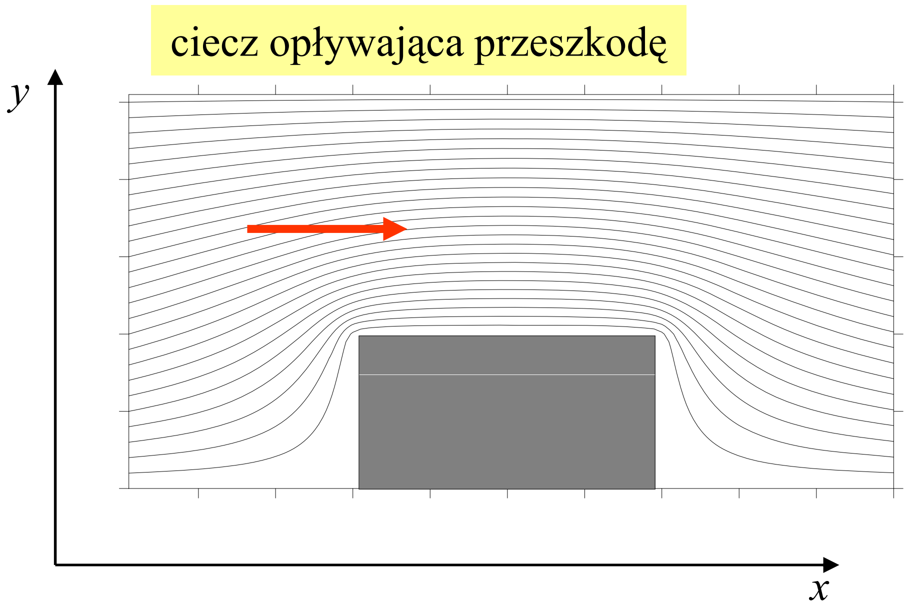
przyrost masy w OE = masa wpływająca do OE
– masa wypływająca z OE

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}dxdy = \left(\rho u - \frac{dx}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\right)dy + \left(\rho v - \frac{dy}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\right)dx$$
$$-\left(\rho u + \frac{dx}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)\right)dy - \left(\rho v + \frac{dy}{2}\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\right)dx$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

$$\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0}$$

Linie strumienia i funkcja strumienia



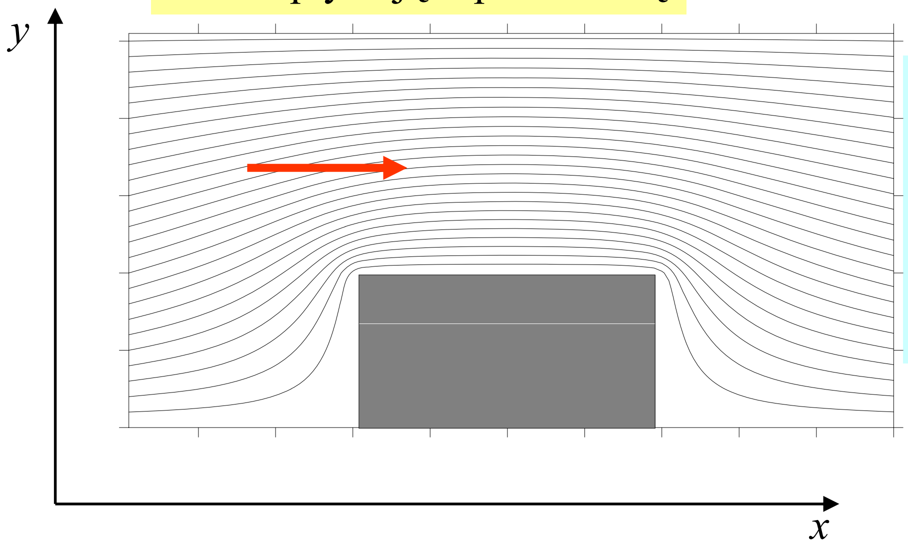
ogólne równanie ciągłości: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

ciecz nieściśliwa (ρ=const)

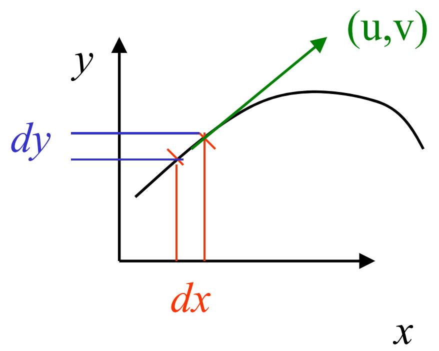
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot (\mathbf{V}) = 0$$

Linie strumienia

ciecz opływająca przeszkodę



linia strumienia
= krzywa wszędzie równoległa
do lokalnego wektora prędkości cieczy
[prędkość cieczy styczna
do linii strumienia *y(x)*]

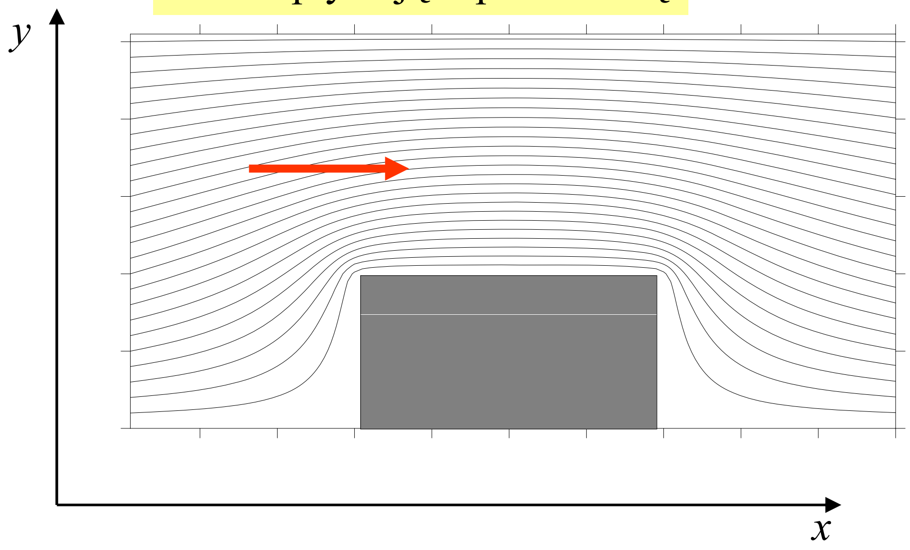


$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}}$$

granice przepływu są liniami strumienia (z definicji: ciecz płynie nie przekraczając granic).

Linie strumienia i funkcja strumienia

ciecz opływająca przeszkodę



równanie ciągłości
ciecz nieściśliwa,
przepływ stacjonarny

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot (\mathbf{V}) = 0$$

równanie ciągłości automatycznie spełnione dla pola prędkości danej przez pochodne pewnej funkcji

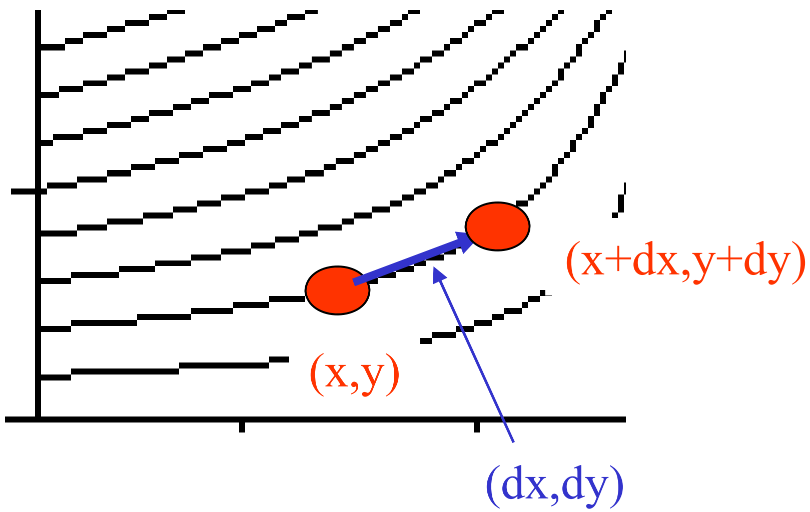
$$\psi(x, y)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Linie strumienia i funkcja strumienia

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



zmiana funkcji strumienia
między punktem (*x*,*y*) a (*x*+*dx*,*y*+*dy*)

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -v dx + u dy$$

(różniczka zupełna)

linia

$\psi = \text{const}$ czyli $d\psi = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

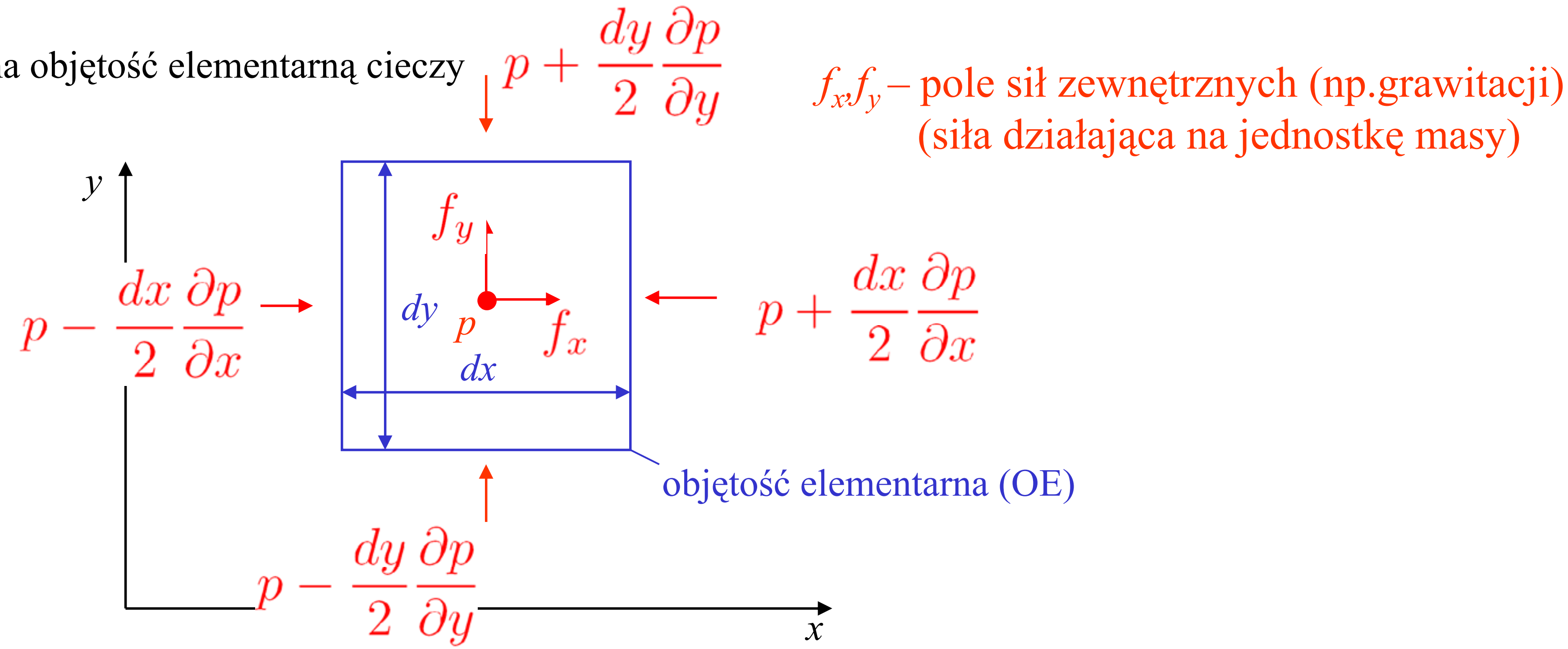
linia stałej psi: jest linią strumienia

ψ **- funkcja strumienia**

Równania ruchu z zaniedbaniem tarcia (lepkości)

Ciecz w 1) skalarnym polu ciśnienia
2) wektorowym polu sił zewnętrznych

Siły na objętość elementarną cieczy



Siła działająca na ciecz w OE: (p z lewej – p z prawej)*dy + siła zewnętrzna

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdy + \rho f_x dxdy$$

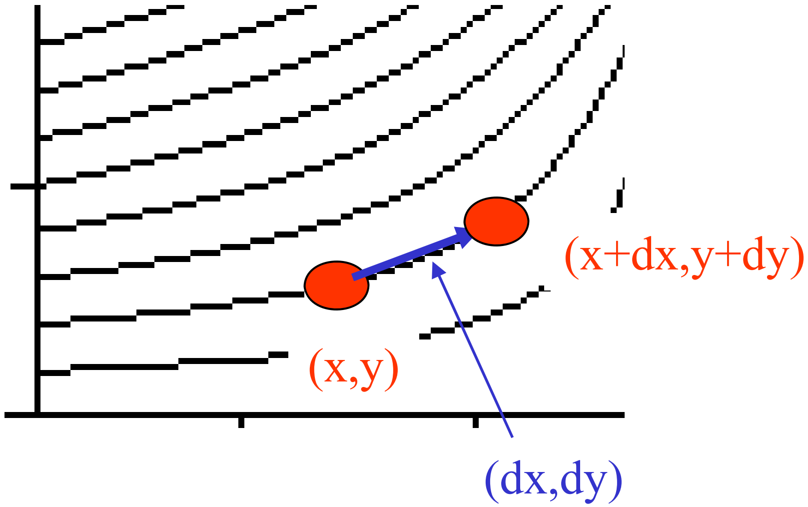
$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dxdy + \rho f_x dxdy$$

$$F_x = ma_x$$

II zasada Newtona

$$F_x = \rho dxdy \frac{du}{dt}$$

zmiana prędkości jednostkowej masy cieczy
w chwili dt, przy przemieszczeniu o wektor dx, dy:



$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v$$

tzw. pochodna konwekcyjna

II zasada Newtona dla cieczy nielepkiej (ciecz doskonała) → równania Eulera

Równania ruchu dla płynu doskonałego (bez strat energii)

$$F_x = ma_x \qquad F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}dxdy + \rho f_x dxdy$$

$$F_x = \rho dxdy\frac{du}{dt} \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - f_x = 0$$

(II zasada dynamiki Newtona)
zasada zachowania pędu dla f=0

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - f_y = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0$$

zasada zachowania masy

równania Eulera

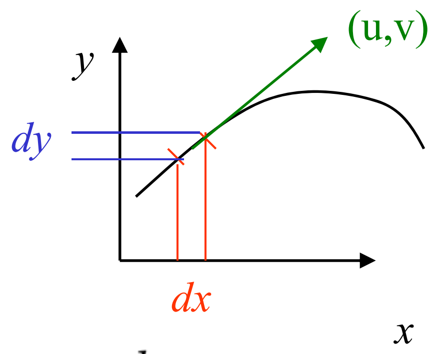
Przepływ bez lepkości – bez strat energii.
Opisuje *płyn idealny* (nadciekły hel – niemożliwa strata energii bo stan podstawowy).
równanie Eulera stosowalne jako model przybliżony, gdy: straty energii niewielkie.
Przybliżenie *warstwy granicznej*: ciecz traktowana jako nielepka,
poza warstwą na której ciecz dotyka brzegu (ciała stałego)

Równanie Bernoulliego – zasada zachowania energii dla cieczy nielepkiej

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \cancel{f_x} = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \cancel{f_y} = 0$$

Przepływ stacjonarny
Brak sił zewnętrznych



całkujemy równanie Eulera <u>wzdłuż linii strumienia</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

eliminujemy v

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

eliminujemy u

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{dy}{dx}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \times dx$$

$$+$$

$$v\frac{dx}{dy}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \times dy$$

przepisane

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{dy}{dx}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \times dx$$

$+$

$$v\frac{dx}{dy}\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \times dy$$

grupujemy *dx,dy*

$$dx\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + dy\left(u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)$$

czyli

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2)dx + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2)dy = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)$$

Różniczki zupełne po obydwu stronach równania:
(przepływ stacjonarny)

$$d(\frac{V^2}{2}) = -\frac{1}{\rho}dp$$

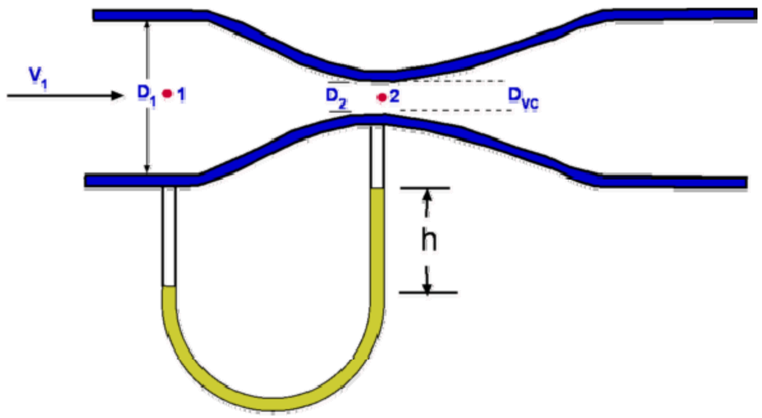
Dla cieczy nieściśliwej ρ=*const*

$$d(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho}) = 0 \longrightarrow \frac{\rho V^2}{2} + p = const$$

Równanie Bernoulliego dla cieczy nieważkiej, nielepkiej p.stac, wzdłuż linii s.

Równanie Bernoulliego i rurka Venturiego (XIXw urządzenie do pomiaru prędkości przepływu)

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = const$$



Mierzona różnica ciśnień przy przekrojach o powierzchniach D_1 i D_2.

Równanie ciągłości $V_1 D_1 = V_2 D_2 = Q$ + równanie Bernoulliego

$$(p_1 - p_2) = \frac{\rho}{2} \frac{Q^2}{D_2^2} \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 \right]$$ zmierz zmianę ciśnienia, obliczysz Q

Równanie Bernoulliego dla zewnętrznych sił zachowawczych

$$f_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$f_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\frac{\rho V^2}{2} + p + \rho U = const$$

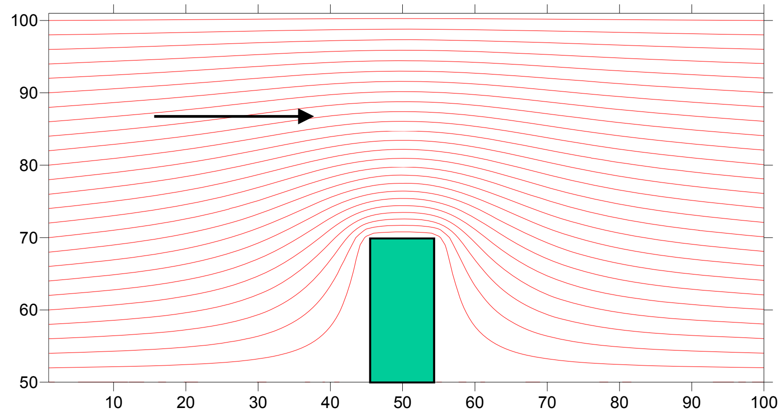
Np. grawitacja: $U = gy$

Przepływ bezwirowy cieczy nielepkiej w dwóch wymiarach

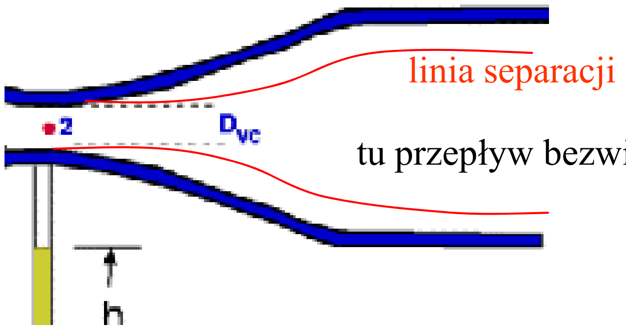
$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

(z-owa składowa)

v rośnie w kierunku *x* o tak jak *u* maleje w *y*



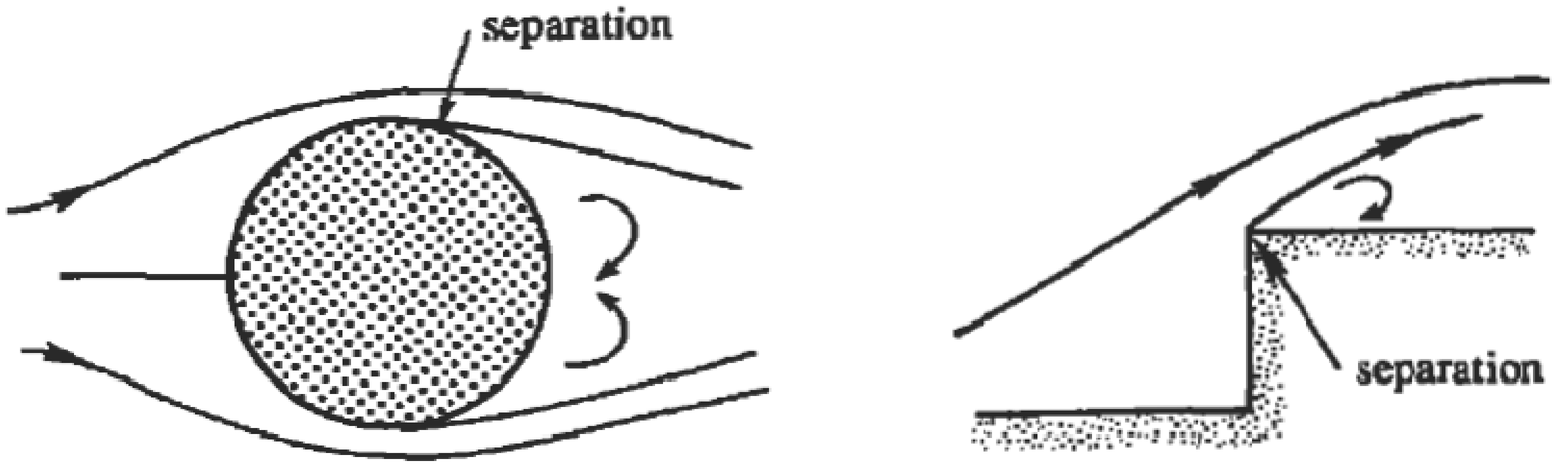
Idealny bezwirowy przepływ cieczy nielepkiej



wiry, jakie obserwujemy niekiedy przy realnych przepływach są konsekwencją lepkości

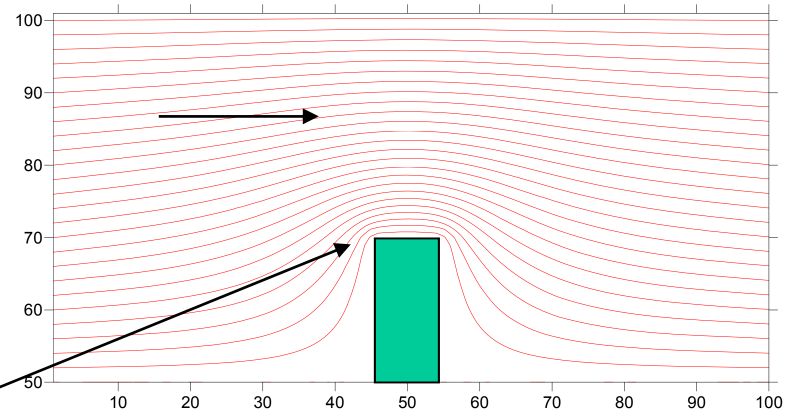
ta ważna przy kontakcie z brzegami przepływu występuje przy tym tzw. zjawisko separacji – obszaru gdzie występują wiry i gdzie ich nie ma

Kundu, Cohen „Fluid Mechanics”,
ilustracje nt. zjawiska separacji



linie separacji dla przepływu lepkiego – wyznaczymy sobie na najbliższym laboratorium

Przepływ bezwirowy cieczy nielepkiej w dwóch wymiarach



Idealny bezwirowy przepływ cieczy nielepkiej

prędkość jest maksymalna na kontakcie z przeszkodą

dla cieczy lepkiej – na kontakcie prędkość styczna ściśle zero

Równanie na funkcję strumienia dla przepływu bezwirowego

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\nabla^2 \psi(x, y) = 0,$$

równanie Laplace'a

ponieważ równania Laplace'a: stosuje się zasada superpozycji, metoda obrazów itd. jak w elekrostatyce

jeśli funkcja strumienia spełnia równanie Laplace'a to przepływ jest bezwirowy
stosowalność funkcji strumienia nie ogranicza jednak do przepływów bezwirowych
-dla wirowych inne równanie (zobaczymy i rozwiążemy je)

równanie Laplace'a zapisać można również dla innej funkcji o węższym zastosowaniu ..

Przepływ bezwirowy cd. Potencjał przepływu ϕ

Prędkość – gradient funkcji skalarnej (potencjału przepływu)

$$\mathbf{V} = \nabla\phi$$

czyli:

$$u = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y}.$$

jest na pewno bezwirowy $\nabla \times \mathbf{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Równanie na potencjał: wstawić *u* i *v* do równania ciągłości

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot (\mathbf{V}) = 0$$

Dostajemy

$$\nabla^2\phi(x,y) = 0.$$

Równanie Laplace'a na potencjał przepływu

uwaga: funkcja strumienia automatycznie spełnia równanie ciągłości, a potencjał przepływu ma wbudowane spełnianie warunku bezwirowości

Potencjał przepływu ϕ i funkcja strumienia ψ

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$+$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

równania Cauchy-Riemanna: pozwalają na obliczenie jednej funkcji przy znajomości drugiej

---

Skąd je znamy? spełniają je części rzeczywiste i urojone funkcji holomorficznych

$f(z=x+iy) = \phi + i\psi$

jest analityczna (holomorficzna), jeśli posiada pochodną

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Linie strumienia a linie ekwipotencjalne

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy = udx + vdy$$ [iloczyn skalarny (u,v) oraz (dx,dy)]

Linie stałego potencjału: $d\phi = 0$ lokalnie prostopadłe do (*u,v*).

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = -vdx + udy$$

Linie strumienia $d\psi = 0$ lokalnie prostopadłe do (-*v,u*).

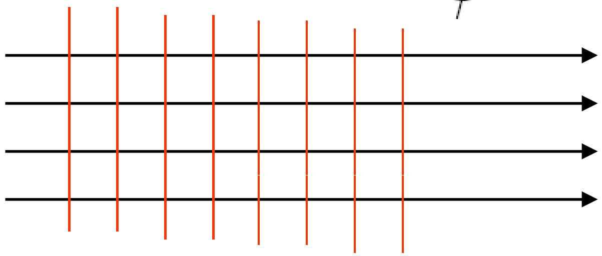
Linie strumienia są prostopadłe do linii stałego potencjału.
Linie strumienia – styczne do prędkości
prędkości normalne do linii ekwipotencjalnych

linie strumienia są ortogonalne do linii ekwipotencjalnych

Przykład 1. Przepływ jednorodny

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = A$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$



$$\psi = Ay$$

$$\phi = Ax$$

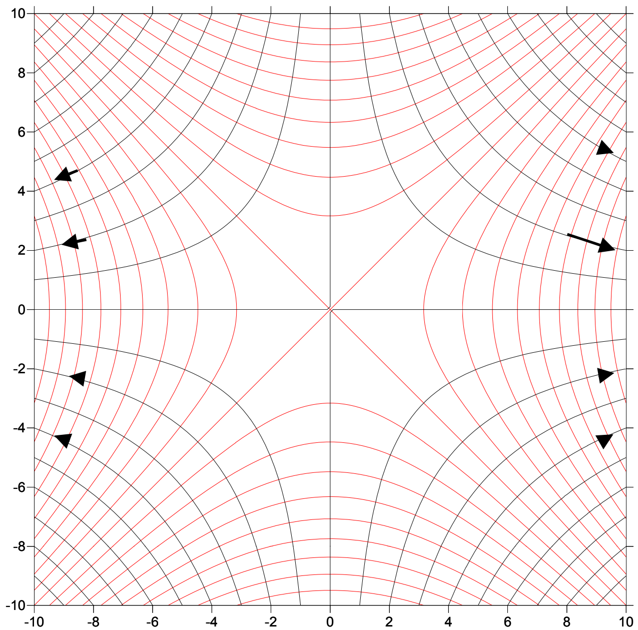
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Przykład 2. Przepływ stagnacyjny (*flow in the corner*)

$$u = 2x$$

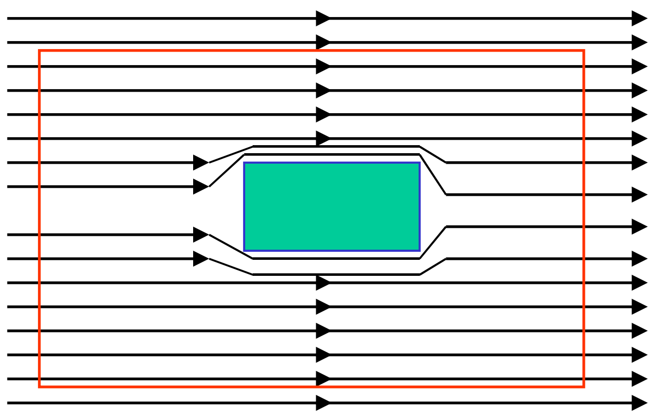
$$v = -2y$$



$$\phi = x^2 - y^2$$

$$\psi = 2xy$$

Przykład 3. Ciecz opływa przeszkodę (zadanie z laboratorium)



Równanie na potencjał

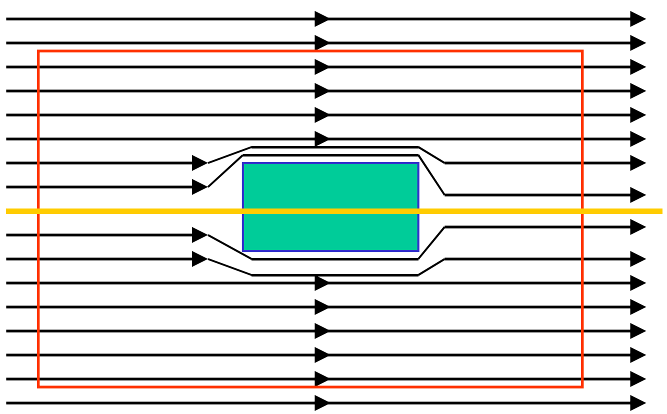
$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0.$$

Warunki brzegowe:

1) Daleko od przeszkody przepływ jednorodny jak bez przeszkody (co to znaczy daleko?)

$$\phi = Ax$$

Rozwiązanie w połówce



2) Ciecz nie wpływa w przeszkodę

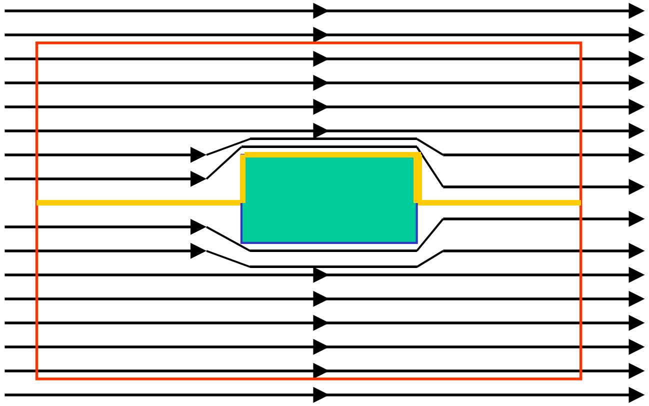
$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$ na poziomych krawędziach przeszkody

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$ **na pionowych krawędziach**

wskazać część brzegu, gdzie obowiązują warunki Dirichleta i część Neumanna na rysunku

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$ **Warunek na osi (z symetrii)**

Równanie na funkcję strumienia



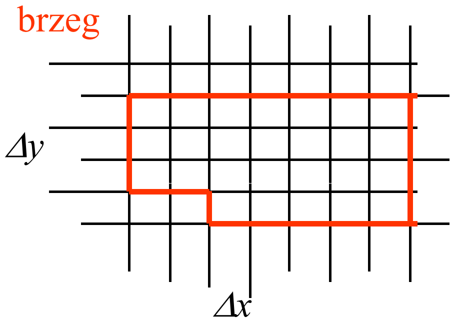
$$\nabla^2\psi(x,y) = 0,$$

Warunki brzegowe:

1) **Daleko od przeszkody przepływ jednorodny jak bez przeszkody** $\psi = Ay$

2) **Oś symetrii i brzegi przeszkody są linią strumienia (składowa normalna prędkości do tej linii znika)**

Rozwiązanie metodą różnic skończonych



funkcja ψ określona na zbiorze punktów dyskretnych

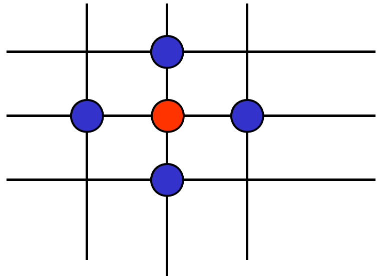
$$\psi_{ij} = \psi(x_i, y_j)$$

$$x_i = i\Delta x$$

$$y_j = j\Delta y$$

2D

$$\nabla^2\psi(x_0,y_0) \simeq \frac{\psi(x_0+\Delta x,y_0)+\psi(x_0-\Delta x,y_0)-2\psi(x_0,y_0)}{\Delta x^2} + \frac{\psi(x_0,y_0+\Delta y)+\psi(x_0,y_0-\Delta y)-2\psi(x_0,y_0)}{\Delta y^2}$$



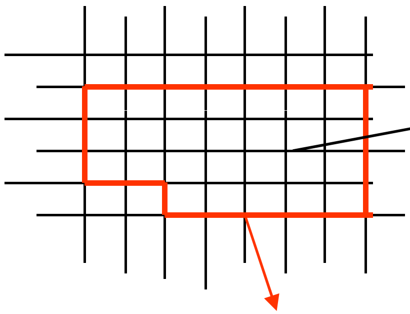
Dla $\Delta x = \Delta y$ $\quad \nabla^2\psi = 0$

$$\underline{\psi(x_0,y_0)} = \underline{(\psi(x_0-\Delta x,y)+\psi(x_0+\Delta x,y)+\psi(x_0,y_0+\Delta y)+\psi(x_0,y_0-\Delta y))}\,/4$$

wartość funkcji spełniającej równanie Laplace'a w każdym punkcie siatki (poza brzegiem) jest średnią arytmetyczną wartości z punktów sąsiednich

---

Iteracyjna metoda relaksacji



Numer iteracji

$$\psi^{(n)}(i,j) = (\psi^{(n-1)}(i-1,j)+\psi^{(n-1)}(i,j-1)+ \psi^{(n-1)}(i+1,j)+\psi^{(n-1)}(i,j+1))/4,$$

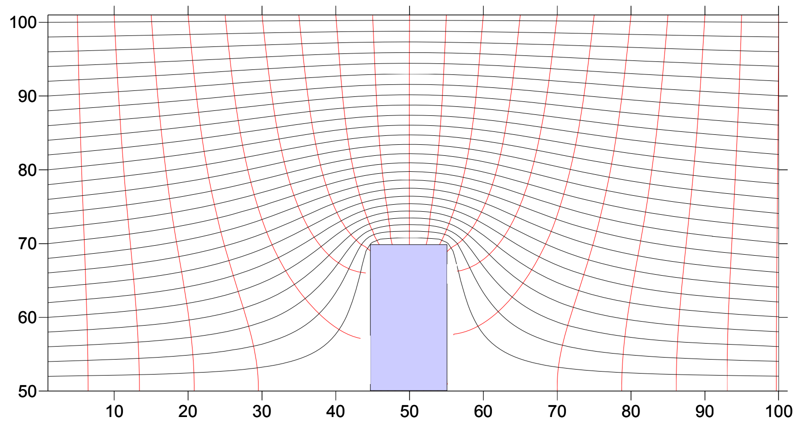
Iteracja prowadzona
aż iterowana funkcja przestanie się zmieniać

Taki przepis iteracyjny odpowiada metodzie Jacobiego, lub Gaussa-Seidla (patrz wykład poprzedni)

Na brzegu trzymamy zadane wartości ψ

Wyniki

$\psi \quad \phi$



$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

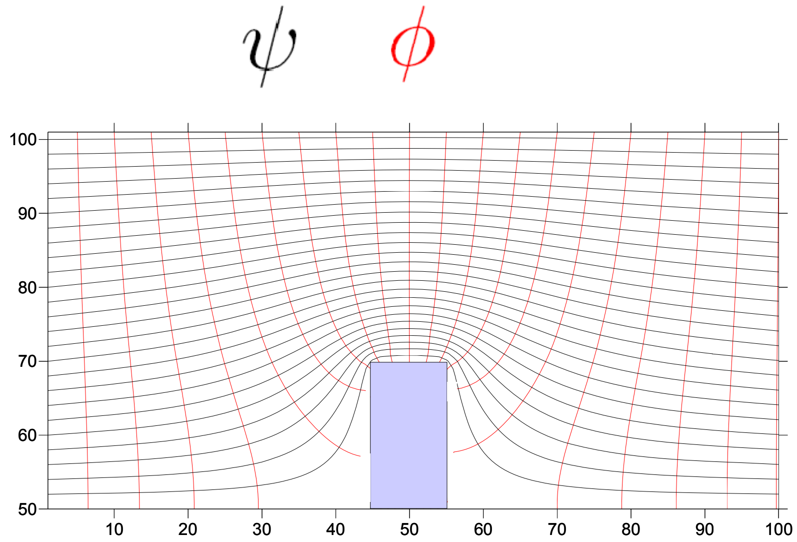
Jak odczytać rozkład prędkości?

Ciśnienie: daleko od przeszkody prędkość $(A,0)$.
Równanie Bernoulliego $p+\rho V^2/2=C$.

Daleko od przeszkody – ciśnienie takie samo po lewej i po prawej stronie przeszkody (przepływ wymuszony ciągłością, nie ciśnieniem, brak oporów ruchu)

Równanie Bernoulliego – spełnione dla cieczy nielepkiej wzdłuż każdej linii strumienia – w naszym przypadku spełnione w całej objętości.

Wyniki



$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Jak odczytać rozkład prędkości?

daleko od przeszkody – przepływ swobodny.
co to znaczy daleko, co to znaczy dość daleko
powiększamy pudło obliczenowe,
postępujemy jak wyżej,
sprawdzamy czy wyniki w interesującym
nas obszarze nie ulegają zmianie.

Ciśnienie: daleko od przeszkody prędkość $(A,0)$.
Równanie Bernoulliego $p+\rho V^2/2=C$.

Daleko od przeszkody – ciśnienie takie samo po lewej i po prawej stronie przeszkody (przepływ wymuszony ciągłością, nie ciśnieniem, brak oporów ruchu)

Równanie Bernoulliego – spełnione dla cieczy nielepkiej wzdłuż każdej linii strumienia – w naszym przypadku spełnione w całej objętości.

maksymalna prędkość styczna na kontakcie – ciecz nielepka

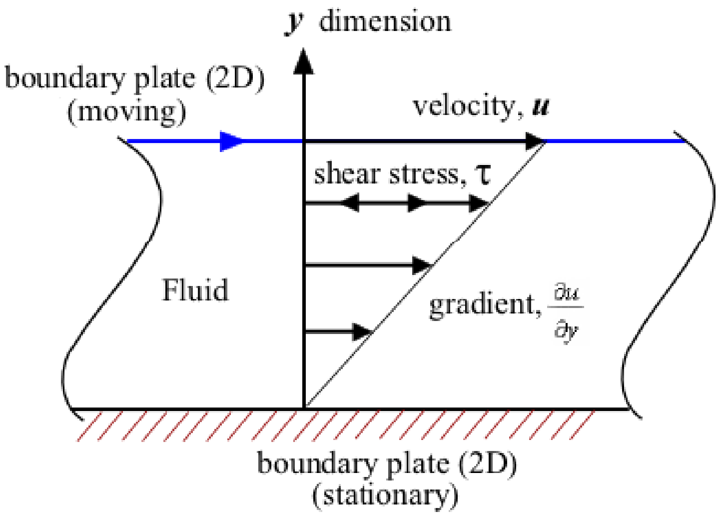
Lepkość:

Miara oporu jaki ciecz stawia płynięciu (tarcie wewnętrzne).
Zdolność do przenoszenia naprężeń ścinających przez poruszającą się ciecz
(w tym do stawiania oporu naprężeniom ścinającym)

Rutherford: statek raz rozpędzony w nielepkiej wodzie nigdy się nie zatrzyma.
Turbina ani wiosło statku jednak w nielepkiej wodzie nie rozpędzi.

Ciecz między dwoma okładkami, górna jest ruchoma.
Ciecz lepka przywiera do granic (*no-slip boundary condition*):
warstwa cieczy w bezpośrednim kontakcie z ciałem stałym jest względem niego nieruchoma.

Napędzając górną okładkę napędzamy całą ciecz.



Siła, którą należy podziałać na górną okładkę jest miarą lepkości cieczy.

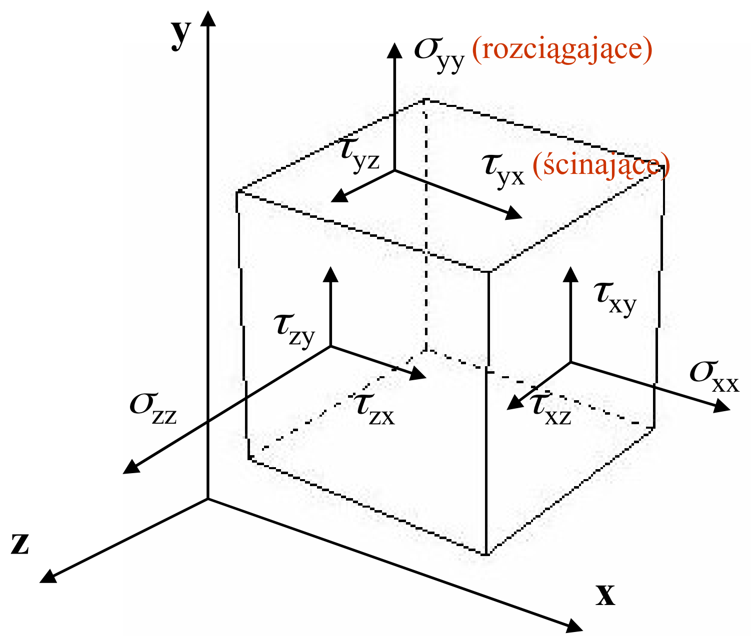
naprężenie ścinające proporcjonalne do gradientu prędkości (prawo Newtona)

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

współczynnik proporcjonalności μ – wsp. lepkości

Sabersky, fluid flow: a first course in fluid dynamics

Naprężenia [wymiar ciśnienia N/m^2] na elementarną objętość cieczy



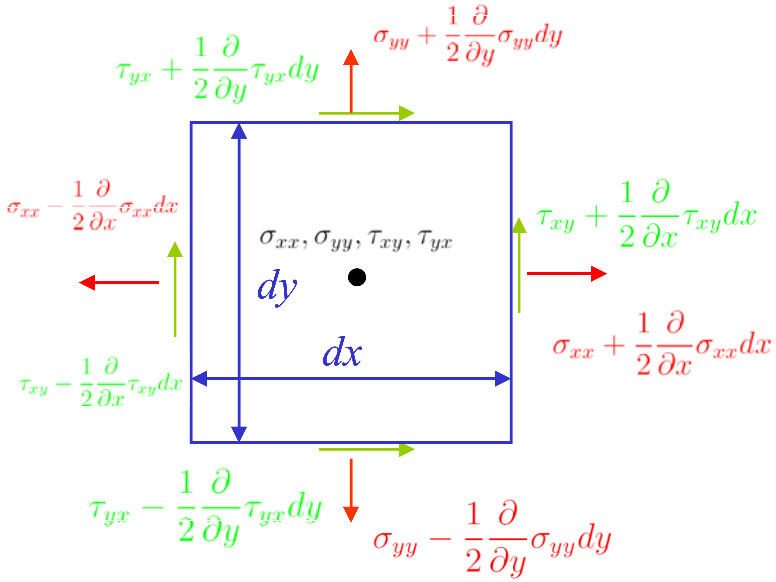
W porównaniu do cieczy nielepkiej pojawiają się naprężenia ścinające.

[Dla cieczy nieściśliwej ciśnienie jest średnim naprężeniem normalnym:

$p = -(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})/3$]

τ_{xy} – naprężenie ścinające dwa indeksy
pierwszy: normalny do powierzchni na którą działa naprężenie,
drugi – kierunek, w którym działa naprężenie

Naprężenia na powierzchni objętości elementarnej



$$F_x = ma_x \qquad F_x = \rho\, dx dy dz \frac{du}{dt}$$

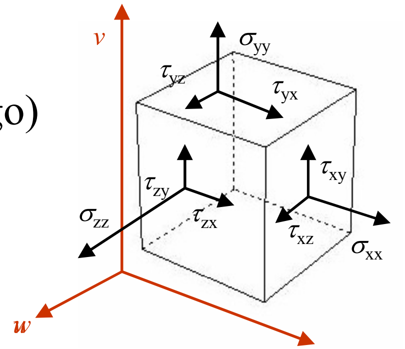
$$F_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dx dy dz$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

Ciecz Newtonowska – naprężenia proporcjonalne do gradientów prędkości

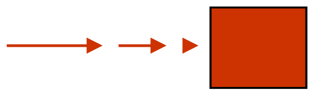
Prędkość: (u,v,w)

Relacje dla cieczy **nieściśliwej**



$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + A$$

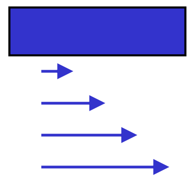
(rozciągające z „hamowania” czołowego)



$$\sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + A$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + A$$

(ścinające gradient poprzeczny)



$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

symetria zapewnia zachowanie momentu pędu
tam gdzie geometria układu nie wyróżnia żadnego kierunku

Naprężenia rozciągające a ciśnienie

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + A$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + A$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + A$$

przypadek statyczny, lub ruchu jednorodnego

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = A = -p_{\mathrm{termod}}$$

$p_{\mathrm{termod}} = \rho RT$

dla gazu doskonałego

w obecności gradientów:

$$A = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 = -p = -p_{\mathrm{termod}}$$

Równania Naviera-Stokesa: ciecz lepka, nieściśliwa, newtonowska

kierunek x

$$\rho\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

siły zewnętrzne jeśli przyjdą to tu $+\rho f_x$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - p\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Naprężenia rozciągające a ciśnienie

$$\sigma_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + A$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + A$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + A$$

przypadek statyczny, lub ruchu jednorodnego

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = A = -p_{\mathrm{termod}}$$

$p_{\mathrm{termod}} = \rho RT$

dla gazu doskonałego

w obecności gradientów:

$$A = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 = -p = -p_{\mathrm{termod}}$$

Równania Naviera-Stokesa: ciecz lepka, nieściśliwa, newtonowska

kierunek x

$$\rho\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)$$

siły zewnętrzne
jeśli przyjdą to tu $+\rho f_x$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - p\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\cancel{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

równanie ciągłości
dla cieczy nieściśliwej

czyli

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u$$

Przepływ Poiseuille: stacjonarny cieczy lepkiej w kanale 2D

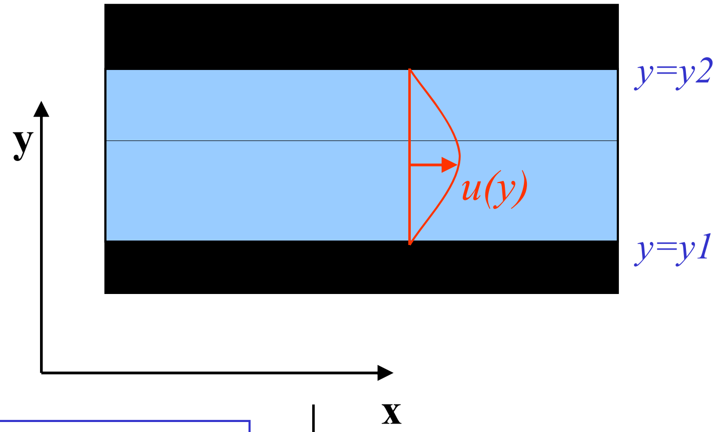
μ=0 dają (równania Eulera)

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w$$

V=(*u*,*v*=0,*w*=0)



$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial u^2}{\partial y^2}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$0=\frac{\partial u}{\partial x}$$

równanie ciągłości
u nie jest funkcją *x*

p=*p*(*x*)

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\quad \boxed{=\mathrm{Q}}$$

więc

Q jest stałą separacji

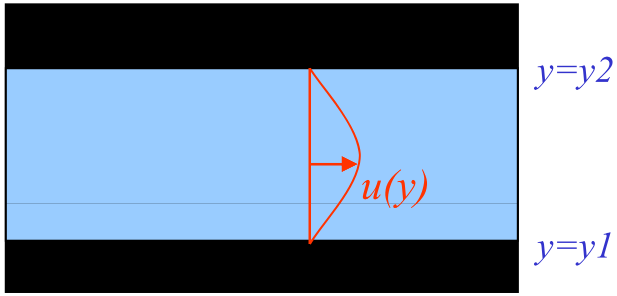
$u=(Q/2\mu)\,y^2+By+D$

warunki brzegowe **no-slip**
$u(y=0)=0$, $u(y=d)=0$

$u=(Q/2\mu)\,(y-y1)(y-y2)$
z Q=grad p

przepływ cieczy lepkiej wymaga gradientu ciśnienia.

Czy można zasymulować taki rozkład prędkości w przepływie potencjalnym ?



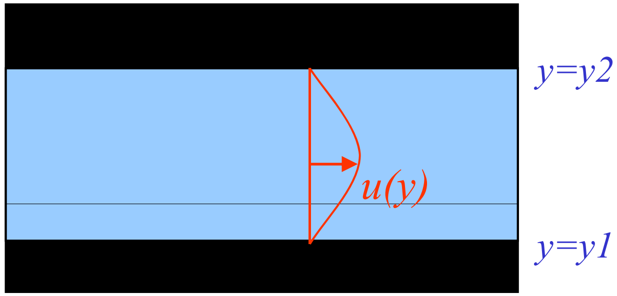
$\mathbf{V}=(u,v=0,w=0)$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \longrightarrow \phi = \phi(x) \longrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d\phi}{dx} = u = const$$ .. i nie zależy od y

Czy można zasymulować taki rozkład prędkości w przepływie potencjalnym ?



V=(u,v=0,w=0)

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \longrightarrow \phi = \phi(x) \longrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{d\phi}{dx} = u = const$$ .. i nie zależy od y

---

w czym problem z $u=(Q/2\mu)\,(y-y1)(y-y2)$??

$$\nabla \times \mathbf{V}|_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{Q}{2\mu}(2y - y2 - y1) \neq 0$$

mimo, że linie strumienia są równoległe do osi rury – przepływ NIE jest bezwirowy

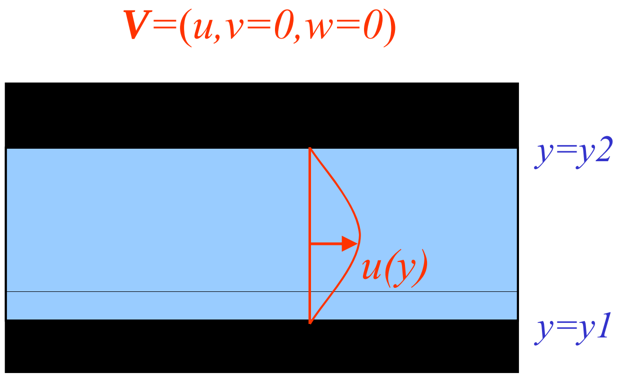
Stacjonarny przepływ pod wpływem gradientu ciśnienia dla cieczy nielepkiej?

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial u^2}{\partial y^2}$$



Dla cieczy nielepkiej:
nie istnieje przepływ stacjonarny przy niezerowym gradiencie ciśnienia!

W stronę laboratorium: stacjonarne równania NS wyrażone przez funkcję strumienia i wirowość

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u$$

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v$$

\+ równanie ciągłości $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Jeśli wyrazimy prędkości przez funkcje strumienia, równanie ciągłości spełnione automatycznie

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(mimo, że potencjał przepływu jest dla cieczy lepkiej funkcja strumienia pozostaje użyteczna)

i, jak już wiemy, funkcja strumienia jest i) wygodna dla narzucenia warunków brzegowych. ii) zapewnia spełnienie równania ciągłości oraz iii) ma jasną i bezspośrednią interpretację fizyczną.

Druga funkcja – wirowość $$\zeta = -\nabla \times (u, v) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Związek wirowość – funkcja strumienia $$\boxed{\zeta = \nabla^2 \psi}$$

Drugie równanie

$$\zeta = -\nabla \times (u, v) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\times \qquad \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\times \qquad \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v$$

stronami zróżniczkować, i odjąć

$$\rho\left(\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \mu\ \nabla^2\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\rho\left(\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \mu\ \nabla^2\frac{\partial v}{\partial x}$$

Drugie równanie

$$\zeta = -\nabla \times (u,v) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\times \qquad \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\times \qquad \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\nabla^2 v$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

stronami zróżniczkować, i odjąć

$$\rho\left(\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} + \mu\ \nabla^2\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\rho\left(\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y} + \mu\ \nabla^2\frac{\partial v}{\partial x}$$

0 – z równania ciągłości

$$\rho\left(u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) = \mu\nabla^2\zeta$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \mu\nabla^2\zeta}$$

Komplet równań:

$$\nabla^2\Psi = \zeta$$

$$\mu\nabla^2\zeta = \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

Tylko pierwsze równanie ma formę równania Poissona.
Drugie jest wciąż eliptyczne, ale Poissona już nie jest.

Wirowość wchodzi jako niejednorodność równania Poissona na funkcję strumienia.

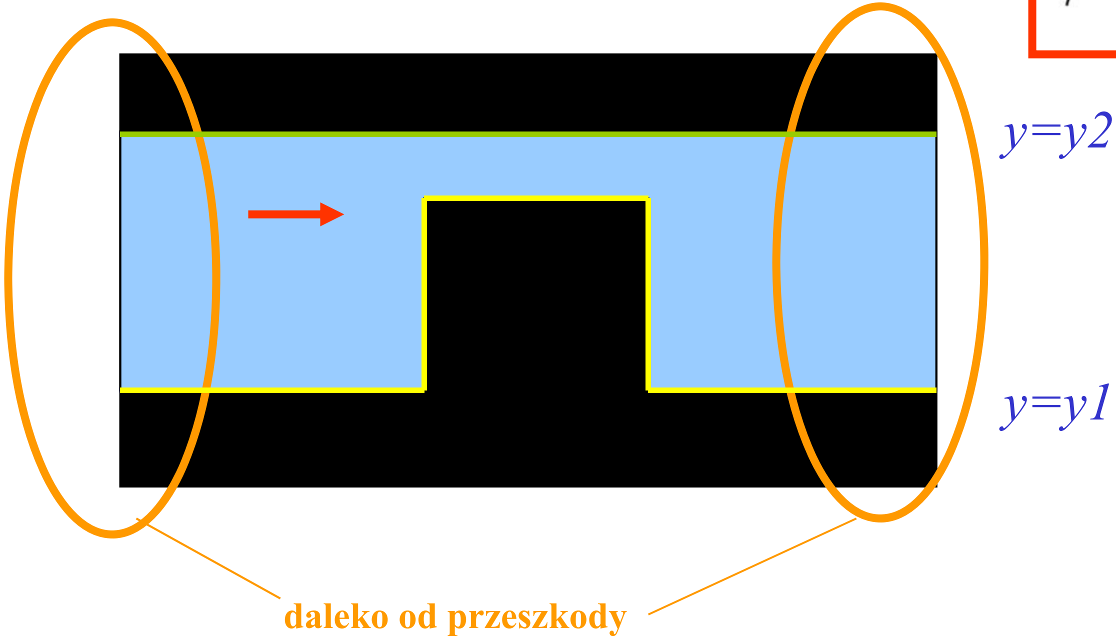
Pochodne funkcji strumienia pojawiają się przy pierwszych pochodnych wirowości w drugim równaniu.

Rura z przewężeniem

zakładamy $Q=dp/dx<0$, żeby przepływ w prawo

$$\nabla^2 \Psi = \zeta$$

$$\mu \nabla^2 \zeta = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)$$



$u=(Q/2\mu)\,(y-y1)(y-y2)$

$v=0$

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{Q}{2\mu}(2y - y2 - y1)$$

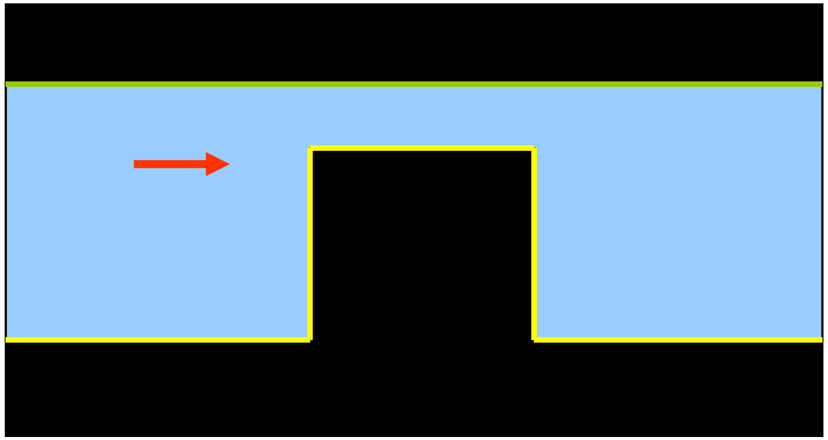
$$\Psi = \frac{Q}{2\mu}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}(y1 + y2) + y(y1)(y2) \right)$$

Górny i dolny brzeg: linie strumienia $\psi(y2)$, $\psi(y1)$ odpowiednio

Warunki na wirowość – górny i dolny brzeg + przeszkoda

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla^2\Psi = \zeta \\ \mu\nabla^2\zeta = \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\end{gathered}}$$

$$\zeta = -\nabla\times(u,v) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$



y=y2

y=y1

nie tylko prędkość normalna do powierzchni (jak w potencjalnym), ale i styczna znika (no-slip c.).

Granica: linie strumienia równoległe do granicy.
Np. dla górnego brzegu w pobliżu *y=y2*,
ψ= ψ(y) – tylko funkcja współrzędnej normalnej
Nie tylko pierwsza, ale i wyższe pochodne po *x* znikają

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

czyli: $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$

Pozostaje określić $\zeta(y=y2) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}|_{y=y2} \rightarrow$ $\boxed{\zeta(granica) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial n^2}}$

Wirowość na granicy = druga pochodna normalna funkcji strumienia

Taylor

$$\psi(x,y2-\Delta) = \psi(x,y2) - \cancel{\Delta\frac{\partial\psi}{\partial y}}|_{y=y2} + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}|_{y=y2} \longrightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{2}{\Delta^2}\left(\Psi(x,y2-\Delta) - \Psi(x,y2)\right)$$

u(y2)=0

Metoda relaksacyjna dla przepływu cieczy lepkiej

$$\nabla^2\Psi = \zeta$$

$$\mu\nabla^2\zeta = \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

jeden krok iteracyjny (primowane wartości – nowe)

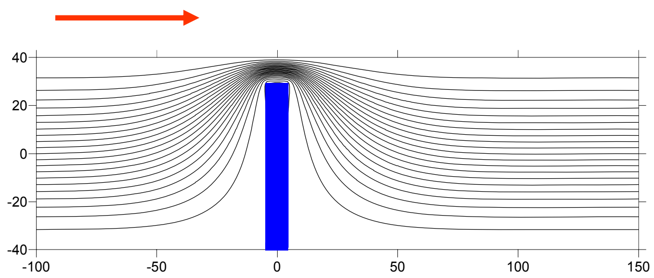
0) Wyliczyć warunki brzegowe na wirowość $\zeta(granica) = \frac{\partial^2\Psi}{\partial n^2}$ (warunki na f.strumienia określone przed iteracją)

1)
$$\zeta'(i,j) = \frac{\zeta(i+1,j)+\zeta(i-1,j)+\zeta(i,j-1)+\zeta(i,j+1)}{4} - \frac{\rho}{16\mu}\times$$
$$\times[(\psi(i,j+1)-\psi(i,j-1))(\zeta(i+1,j)-\zeta(i-1,j))$$
$$-(\psi(i+1,j)-\psi(i-1,j))(\zeta(i,j+1)-\zeta(i,j-1))].$$

2)
$$\psi'(i,j) = \frac{\psi(i+1,j)+\psi(i-1,j)+\psi(i,j-1)+\psi(i,j+1)}{4} - \frac{\zeta(i,j)}{4}dz^2$$

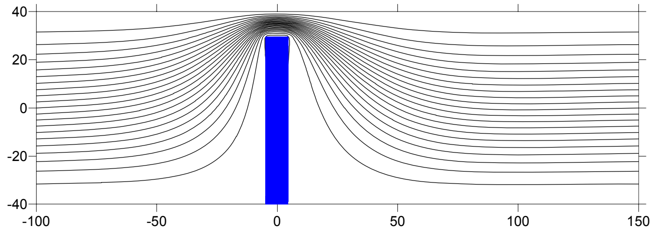
Wyniki – linie strumienia

$dp/dx=Q_0$



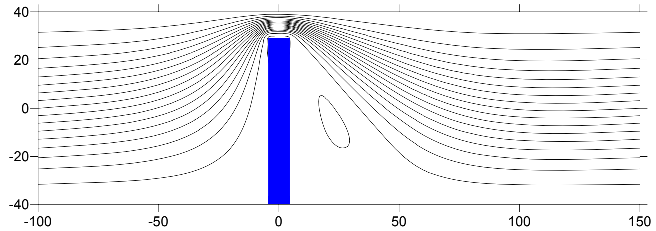
niskie ciśnienie (niskie prędkości)
linie strumienia symetryczne względem przeszkody

$10Q_0$



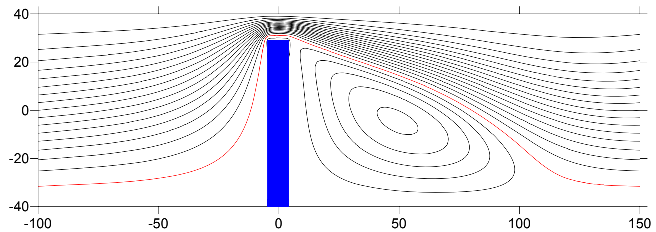
pojawia się asymetria

$20Q_0$



pojawia się wir za przeszkodą

$30Q_0$



wir narasta
czerwonym kolorem pokazana linia separacji

Widzimy, że linie strumienia **przed** przeszkodą mają kształt prawie niezależny od gradientu ciśnienia