Lista zagadnień na egzamin

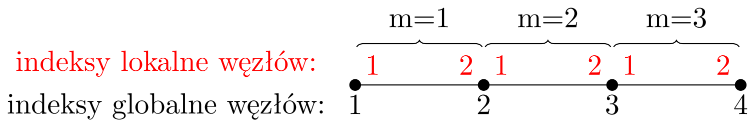
19 listopada 2023

1. Rozwiązywanie równań różniczkowych w bazie funkcyjnej:
   - Metody kolokacji, najmniejszych kwadratów, Galerkina, reszt ważonych. Wyznaczanie residuum i sposoby konstrukcji układu równań algebraicznych dla każdej z metod.
2. Metoda elementów skończonych 1D:
   - Konstrukcja funkcji kształtu (w przestrzeni fizycznej i przestrzeni odniesienia):
     - liniowe funkcje kształtu
     - kwadratowe funkcje kształtu (wielomiany węzłowe Lagrange'a)
     - funkcje kształtu Hermite'a
   - sposób konstrukcji macierzy sztywności i wektorów obciążeń (lokalnych i globalnych)
   - wprowadzanie warunków Dirichleta do układu równań
   - charakter wariacyjny MES: oszacowanie jakości otrzymanego rozwiązania przy znajomości wektora rozwiązań, globalnej macierzy sztywności i wektora obciążeń
3. MES 2D, elementy czworokątne:
   - konstrukcja biliniowych funkcji kształtu
   - mapowanie między przestrzenią referencyjną a przestrzenią fizyczną
4. MES 2D, elementy trójkątne:
   - definicja współrzędnych polowych (wyznaczniki)
   - konstrukcja liniowych i kwadratowych funkcji kształtu z wykorzystaniem współrzędnych polowych
   - mapowanie między przestrzenią referencyjną a przestrzenią fizyczną
   - generacja siatki elementów trójkątnych: diagram Woronoja a triangulacja Delaunaya
5. MES dla problemów zależnych od czasu:
   - konstrukcja schematów MES dla równań adwekcji, dyfuzji: dla jawnego i niejawnego Eulera oraz Crancka-Nicolson

Przykładowe pytania:

1. Chcemy rozwiązać numerycznie równanie różniczkowe $Lu(x) = f(x)$, gdzie: L jest operatorem różniczkowym, z danymi warunkami brzegowymi. Korzystamy z metody Galerkina w bazie funkcji $\{g_i(x)\},\ i = 1, 2, 3$ spełniających warunki brzegowe i poszukujemy przybliżonego rozwiązania $v(x)$. Korzystając z warunku na znikanie residuum w węzłach wygeneruj układ równań który należy rozwiązać aby wyznaczyć $v(x)$.

2. Zbudowaliśmy jednowymiarową siatkę 3 elementów jak na poniższym rysunku:



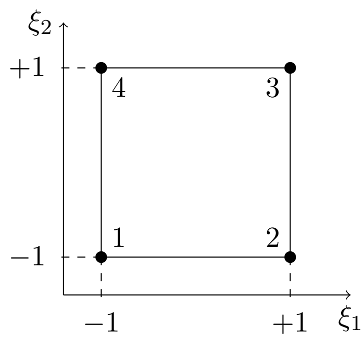
dla każdego elementu mamy zdefiniowane lokalną macierz sztywności i wektor obciążeń:

$$S^m = \begin{bmatrix} s_{11}^m & s_{12}^m \\ s_{21}^m & s_{22}^m \end{bmatrix} \quad P^m = \begin{bmatrix} p_1^m \\ p_2^m \end{bmatrix} \tag{1}$$

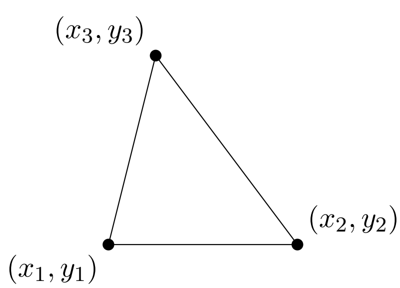
Skonstruuj globalną macierz sztywności i wektor obciążeń dla tych 3 elementów.

3. Dwie z czterech funkcji kształu Hermite'a zdefiniowanych w przestrzeni referencyjnej mają postać: $\phi_1 = (2 - 3\xi + \xi^3)/4$ oraz $\phi_2 = (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)/4$. Na podstawie zachowania na brzegach danego elementu, określ rolę jaką pełnią w MES.

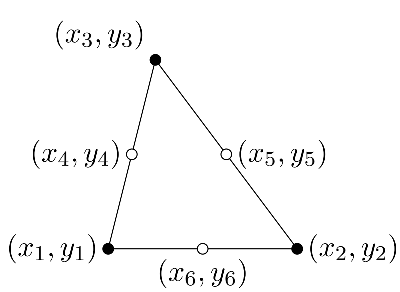
4. Podaj postać wszystkich biliniowych funkcji kształtu dla czworokątnego elementu w przestrzeni referencyjnej przedstawionego na rysunku poniżej:



5. Podaj współrzędne polowe dla elementu trójkątnego o podanych wierzchołkach przedstawionego poniżej:



6. Wykorzystując współrzędne polowe, skonstruuj kwadratowe funkcje kształtu dla trójkąta (po dodaniu węzłów na bokach jak poniżej).



7. Do rozwiązania równania adwekcji
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2}$$
zastosowano metodę elementów skończonych, stosując przybliżenie $u = \sum_i c_i(t)v_i(x)$ [c_i – współczynniki rozwinięcia w bazie, $v_i(x)$ – funkcje bazowe/kształtu], z wykorzystaniem schematu Crancka-Nicolson. Wygenerowało to układ równań na wektor współczynników $\vec{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$:
$$A\vec{c}(t + \Delta t) = B\vec{c}(t)$$
Oblicz elementy macierzowe $A_{i,j}$ oraz $B_{i,j}$ dla tego schematu.