Metoda elementów skończonych w 2D, elementy trójkątne, liniowe funkcje kształtu. *

5 listopada 2015

Problem modelowy

Zajmiemy się rozwiązaniem równania Poissona w dwóch wymiarach na potencjał elektrostatyczny $u(x, y)$, pochodzący od pewnego rozkładu ładunku $\rho(x, y)$

$$-\nabla^2 u(x, y) = \rho(x, y), \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi na znikanie potencjału na brzegach pudła, rozkład ładunku przyjmiemy w postaci:

$$\rho(x, y) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right). \tag{2}$$

Pracujemy na pudle obliczeniowym o boku równym $L = 10$, pudło obliczeniowe proszę umieścić na środku układu współrzędnych, wtedy zakresy współrzędnych to $x \in [-5, 5]$ oraz $y \in [-5, 5]$.

Metoda

Zadanie rozwiążemy przy pomocy metody elementów skończonych. W metodzie tej, rozwiązuje się słabą postać równania (1) daną przez:

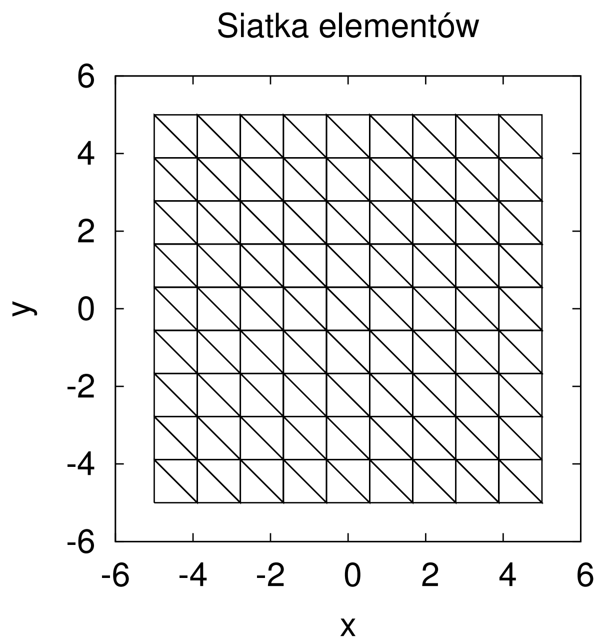
$$\int_{-5}^{5}\int_{-5}^{5} \nabla u(x, y)\nabla w(x, y)dxdy = \int_{-5}^{5}\int_{-5}^{5} w(x, y)\rho(x, y)dxdy. \tag{3}$$

Wykorzystamy trójkątne elementy oraz liniowe funkcje kształtu. Etapy rozwiązania zadania:

1. Podział obszaru na elementy - przestrzeń fizyczna

Równomiernie rozłożyć $N = 100$ węzłów. Sworzyć następnie siatkę trójkątnych elementów. Siatka jest strukturyzowana, wystarczy połączyć odpowiednie węzły (patrz rys.1).

*Laboratorium z inżynierskich metod numerycznych, Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH 2015/2016



Rysunek 1: Siatka trójkątnych elementów. Do uzyskania w zadaniu 1.

Narysować siatkę elementów -30pkt.

2. Przestrzeń referencyjna - zdefiniowanie funkcji kształtu

Każdy element w przestrzeni fizycznej mapujemy do przestrzeni referencyjnej która jest trójkątem o wierzchołkach: $(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$(patrz rys. 2). Z każdym węzłem w przestrzeni referencyjnej związana jest jedna funkcja kształtu, zgodnie ze wzorami:

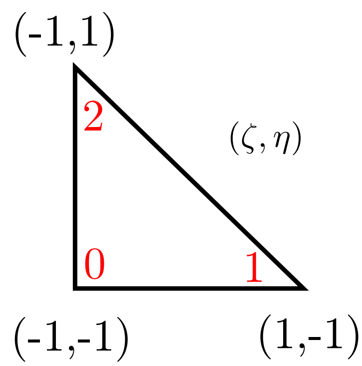
$$\phi_0 = -\frac{1}{2}(\eta + \zeta), \tag{4}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 + \zeta), \tag{5}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta). \tag{6}$$

Mapowanie punktu z przestrzeni referencyjnej do przestrzeni fizycznej dane jest wzorem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{2} \begin{pmatrix} x_i^m \\ y_i^m \end{pmatrix} \phi_i(\zeta, \eta). \tag{7}$$



Rysunek 2: Element referencyjny, czerwone liczby to lokalna numeracja węzłów.

3. Macierz sztywności pojedynczego elementu

Rozwiązanie równania (3) w obrębie jednego elementu dane jest wzorem:

$$u(\zeta,\eta)=\sum_{i=0}^{3}u_i^m\phi_i(\zeta,\eta). \tag{8}$$

Dla każdego elementu definiujemy lokalną macierz sztywności, daną przez:

$$E_{ij}^m=\int_{element(m)}\nabla\phi_i(x,y)\cdot\nabla\phi_j(x,y)dxdy. \tag{9}$$

Całkowanie w przestrzeni fizycznej jest niewygodne z numerycznego punktu widzenia, dlatego całkowanie przeprowadza się w przestrzeni referencyjnej (patrz. wykład), wtedy wyrażenie (9) zmieni się na:

$$E_{ij}^m=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-\zeta}J^m(\zeta,\eta)\left(\nabla\phi_i(\zeta,\eta)\cdot\nabla\phi_j(\zeta,\eta)\right)d\zeta d\eta, \tag{10}$$

gdzie gradient dany jest teraz przez:

$$\nabla\phi_k(\zeta,\eta)=\left(\frac{\partial\phi_k}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\phi_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\phi_k}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\phi_k}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right), \tag{11}$$

natomiast jakobian przekształcenia:

$$J^m(\zeta,\eta)=\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial x}{\partial\eta}. \tag{12}$$

Pochodne $(\frac{\partial x}{\partial\zeta},\frac{\partial x}{\partial\eta},\frac{\partial y}{\partial\zeta},\frac{\partial y}{\partial\eta})$ liczymy korzystając ze wzoru (7), natomiast pochodne odwrotne $(\frac{\partial\zeta}{\partial x},\frac{\partial\zeta}{\partial y},\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial\eta}{\partial y})$, korzystając z zależności:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{pmatrix}=\frac{1}{J^m(\zeta,\eta)}\begin{pmatrix}\frac{\partial y}{\partial\eta} & -\frac{\partial x}{\partial\eta}\\ -\frac{\partial y}{\partial\zeta} & \frac{\partial x}{\partial\zeta}\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Mając odpowiednie wzory możemy przeprowadzić całkowanie, można to zrobić analitycznie, ale wzory są bardzo skomplikowane, o wiele lepiej skorzystać z kwadratury gaussa, wtedy wyrażenie na lokalną macierz sztywności dane jest przez:

$$E_{ij}^m = \sum_{k=0}^{7} w_k J^m(\zeta_k, \eta_k) \left(\nabla\phi_i(\zeta_k, \eta_k) \cdot \nabla\phi_j(\zeta_k, \eta_k)\right), \tag{14}$$

gdzie $\zeta_k,\ \eta_k, w_k$ to odpowiednio punkty i wagi 7 punktowej kwadratury gaussa dla trójkąta (patrz wykład). Dla każdego elementu obliczyć lokalne macierze sztywności.

Wypisać macierz sztywności dla 4 dowolnych elementów -30pkt.

3. Wektor obciążeń pojedynczego elementu

Podobnie jak w przypadku macierzy sztywności, wektor obciążeń również liczymy w przestrzeni referencyjnej:

$$F_j^m = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-\zeta} J^m(\zeta,\eta)\phi_j(\zeta,\eta)\rho(x(\zeta,\eta), y(\zeta,\eta))d\zeta d\eta, \tag{15}$$

korzystając następnie z kwadratury gaussa, otrzymujemy:

$$F_j^{(m)} = \sum_{k=0}^{7} w_k J^m(\zeta_k, \eta_k) \left(\phi_j(\zeta_k,\eta_k)\rho(x(\zeta_k,\eta_k), y(\zeta_k,\eta_k))\right) \tag{16}$$

4. Składanie globalnej macierzy sztywności i globalnego wektora obciążeń

Aby złożyć macierz sztywności oraz wektor obciążeń należy stworzyć funkcję która zwróci numer globalny węzła na podstawie numeru elementu oraz lokalnego numeru węzła:

```
nr_globalny=nr(i,m),
```

wtedy składanie macierzy sztywności przebiega zgodnie ze wzorem:

$$S(nr(i,m), nr(j,m)) = S(nr(i,m), nr(j,m)) + E_{ij}^m, \tag{17}$$

natomiast składanie wektora obciążeń:

$$F(nr(j,m)) = F(nr(j,m)) + F_j^m. \tag{18}$$

5. Warunki brzegowe

Aby narzucić warunki brzegowe stawiamy jedynkę na diagonali i zerujemy pozostałe elementy w wierszach odpowiadających brzegowi. W wektorze obciążeń zerujemy odpowiedni element.

6. Rozwiązanie układu

Po zdefiniowaniu odpowiednich macierzy należy rozwiązać układ na współczynniki rozwinięcia (c):

$$Sc = F. \tag{19}$$

Następnie narysować rozwiązanie w postaci mapy $u(x, y)$ -40pkt.