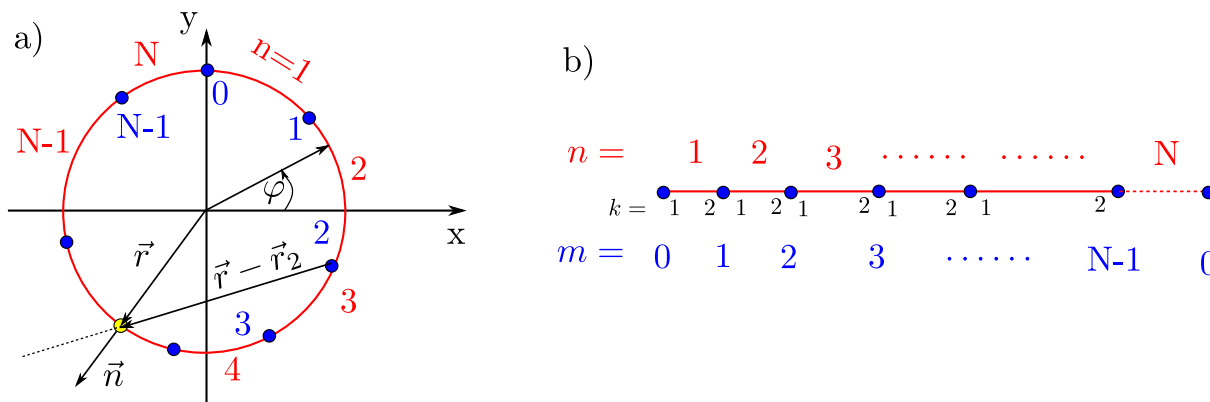


Metoda elementów brzegowych

Tomasz Chwiej, Alina Mreńca-Kolasińska

19 listopada 2018

1 Wstęp



Rysunek 1: a) Geometria układu z zaznaczonymi: elementami brzegu (czerwony), węzłami (niebieski). b) Numeracja: elementów (czerwony), lokalna węzłów (czarny) i globalna węzłów (niebieski)

Na zajęciach rozwiążemy równanie Poissona dla $\rho = 0$

$$\nabla^2 u = -\rho \quad (1)$$

używając metody elementów brzegowych. Geometria układu pokazana jest na rysunku 1(a). Obszar stanowi koło o promieniu R. Na brzegu (kolor czerwony) wprowadzamy węzły (niebieskie kropki), w których zadajemy warunek brzegowy (potencjał lub pochodne).

Punktem startowym będzie podstawowe równanie MEB w 2D

$$c_i u(\vec{r}_i) = \int_{\Gamma} [\dot{u}(\vec{r}, \vec{r}_i) \vec{q}(\vec{r}) - \vec{q}(\vec{r}, \vec{r}_i) u(\vec{r})] d\vec{\Gamma} - \int_{\Omega} \dot{u}(\vec{r}, \vec{r}_i) \rho(\vec{r}) d\Omega \quad (2)$$

w którym ostatni wyraz skreślamy bo w układzie nie mamy gęstości. Dla ułatwienia wprowadźmy jeszcze oznaczenia:

$$d\vec{\Gamma} = \vec{n} d\Gamma \quad (3)$$

$$\vec{q} = \nabla u|_{\Gamma} \quad \rightarrow \quad \vec{q} \cdot d\vec{\Gamma} = q d\Gamma \quad (q = \vec{n} \cdot \nabla u) \quad (4)$$

$$\dot{\vec{q}} = \nabla \dot{u}|_{\Gamma} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{q}} \cdot d\vec{\Gamma} = \dot{q} d\Gamma \quad (\dot{q} = \vec{n} \cdot \nabla \dot{u}) \quad (5)$$

gdzie: \vec{n} - wektor normalny do brzegu, $d\Gamma$ - element brzegu, \vec{q} - gradient potencjału na brzegu, $\dot{\vec{q}}$ - to gradient rozwiązania fundamentalnego (swobodna funkcja Greena \dot{u}) na brzegu.

Brzeg dzielimy na N elementów ($n = 1, 2, \dots, N$). Węzły wyznaczające ich krańce indeksujemy lokalnie $k = 1, 2$ wewnątrz elementu, oraz globalnie ($m = 0, 1, \dots, N - 1$)

$$m = [(n - 2) + k] \bmod N \quad (6)$$

Wprowadzamy bazę funkcji $\{\Phi_k(\vec{r})\}$ na brzegu, by wyrazić u i q

$$u(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 u_{n,k} \Phi_k(\vec{r}) \quad (7)$$

$$q(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 q_{n,k} \Phi_k(\vec{r}) \quad (8)$$

Równanie MEB możemy teraz zapisać przy użyciu nowych oznaczeń korzystając z elementów bazy

$$c_i u(\vec{r}_i) = \sum_n \sum_k q_{n,k} \int \dot{u}(\vec{r}, \vec{r}_i) \Phi_k(\vec{r}) d\Gamma_n - \sum_n \sum_k u_{n,k} \int \dot{q}(\vec{r}, \vec{r}_i) \Phi_k(\vec{r}) d\Gamma_n \quad (9)$$

$$= \sum_n \sum_k q_{n,k} g_{n,k}(\vec{r}_i) - \sum_n \sum_k u_{n,k} h_{n,k}(\vec{r}_i) \quad (10)$$

Z wykładu wiemy że jeśli za \vec{r}_i będziemy podstawiać kolejne położenia węzłów, to wygenerujemy układ równań liniowych

$$H \cdot \vec{u} = G \cdot \vec{q} \quad (11)$$

gdzie: elementy wektorów \vec{u} i \vec{q} są wartościami potencjału i jego pochodnej w kolejnych węzłach. Aby rozwiązać problem, należy określić elementy macierzy H i G oraz narzucić warunek brzegowy, a następnie rozwiązać układ równań.

1.1 Wyznaczanie elementów macierzowych H i G

Ustalając położenie źródła punktowego \vec{r}_i ustalamy wiersz macierzy i , natomiast para indeksów $(n, k) \rightarrow m$ określa numer kolumny (wzór 6). Zatem mamy (uwzględniając przeniesienie elementów $u_{n,k}$ na lewą stronę oraz biorąc $c_i = 1/2$, $\delta_{i,m}$ to delta Kroneckera)

$$H_{i,m} = \sum_{k=1}^2 h_{n,k}(\vec{r}_i) + \frac{\delta_{i,m}}{2} = \sum_{k=1}^2 \int \dot{q}(\vec{r}, \vec{r}_i) \Phi_k(\vec{r}) d\Gamma_n + \frac{\delta_{i,m}}{2} \quad (12)$$

Dla rozwiązania fundamentalnego w postaci

$$\dot{u}(\vec{r}, \vec{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{r} - \vec{r}_i| = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad (13)$$

oraz wektora normalnego do brzegu okręgu

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} x & y \\ r & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

mamy (patrz wzór 5)

$$\dot{q}(\vec{r}, \vec{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x - x_i) \cdot x + (y - y_i) \cdot y}{|\vec{r}| \cdot |\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \quad (15)$$

Całkowanie każdego elementu wykonamy po wycinku okręgu, który parametryzujemy przy użyciu kąta biegunowego φ

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi \quad (16)$$

Krańce każdego elementu wyznaczają kąty ($\Delta\varphi$ - odległość kątowa między węzłami)

$$\varphi_{n,1} = (n - 1) \cdot \Delta\varphi \quad (17)$$

$$\varphi_{n,2} = n \cdot \Delta\varphi \quad (18)$$

więc całkowanie możemy wykonać w przestrzeni referencyjnej, korzystając z transformacji

$$\varphi = \frac{\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2}}{2} + \frac{\varphi_{n,2} - \varphi_{n,1}}{2} \xi, \quad \xi \in [-1, 1] \quad (19)$$

i jakobianu

$$J_n = \frac{\text{rzeczywiste pole elementu}}{\text{pole elementu odniesienia}} = \frac{\varphi_{n,2} - \varphi_{n,1}}{2} \quad (20)$$

co daje

$$h_{n,k}(\vec{r}_i) = \int_{-1}^1 d\xi J_n \Phi_k(\xi) \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{(x-x_i) \cdot x + (y-y_i) \cdot y}{|\vec{r}| \cdot |\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \right) \quad (21)$$

gdzie:

$$\vec{r} = [x, y] \quad (22)$$

$$x = x(\varphi) = x(\varphi(\xi)) \quad (23)$$

$$y = y(\varphi) = y(\varphi(\xi)) \quad (24)$$

a funkcje bazowe $\{\Phi_k\}$ są liniowe

$$\Phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (25)$$

$$\Phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (26)$$

W podobny sposób otrzymujemy elementy $G_{i,m}$

$$G_{i,m} = \sum_{k=1}^2 g_{n,k}(\vec{r}_i) = \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 d\xi J_n \Phi_k(\xi) \left(-\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{r} - \vec{r}_i| \right) \quad (27)$$

1.2 Warunki brzegowe Dirichleta

Jeśli na całym brzegu tj. we wszystkich węzłach mamy określone wartości potencjału (wektor \vec{u})

$$H \cdot \vec{u} = \vec{b} \quad (28)$$

to wówczas pozostaje nam rozwiązać układ równań

$$G \cdot \vec{q} = \vec{b} \quad (29)$$

aby znaleźć wektor \vec{q} . Mając wektory \vec{u} i \vec{q} możemy wyznaczyć wartość potencjału w dowolnym punkcie wewnątrz koła (patrz punkt 1.4).

1.3 Warunki Dirichleta i von Neumanna na brzegu

Na brzegu możemy zadać WB Dirichleta w części węzłów, a dla pozostałych zastosować warunki von Neumanna. Oznacza to że znamy tylko część wektora \vec{u} i część wektora \vec{q} . Aby uwzględnić takie WB, w macierzy H zastępujemy kolumny odpowiadające nieznanym wartościom wektora \vec{u} kolumnami (ze znakiem "minus") z macierzy G o znanych rozwiązaniach dla wektora \vec{q} i vice versa. Przetworzenia kolumn macierzy oraz elementów wektorów dla WB, dla których znamy u_0 oraz q_1, q_2, \dots, q_{N-1} pokazano na rys.2(b).

W takim przypadku najpierw wyznaczamy wszystkie elementy H i G , następnie konstruujemy macierze ($H_{i,*}$ to i-ta kolumna macierzy H)

$$H' = [H_{0,*}, -G_{1,*}, \dots, -G_{N-1,*}] \quad (30)$$

$$G' = [G_{0,*}, -H_{1,*}, \dots, -H_{N-1,*}] \quad (31)$$

oraz wektor pomocniczy

$$\vec{u}' = [u_0, q_1, \dots, q_{N-1}]^T \quad (32)$$

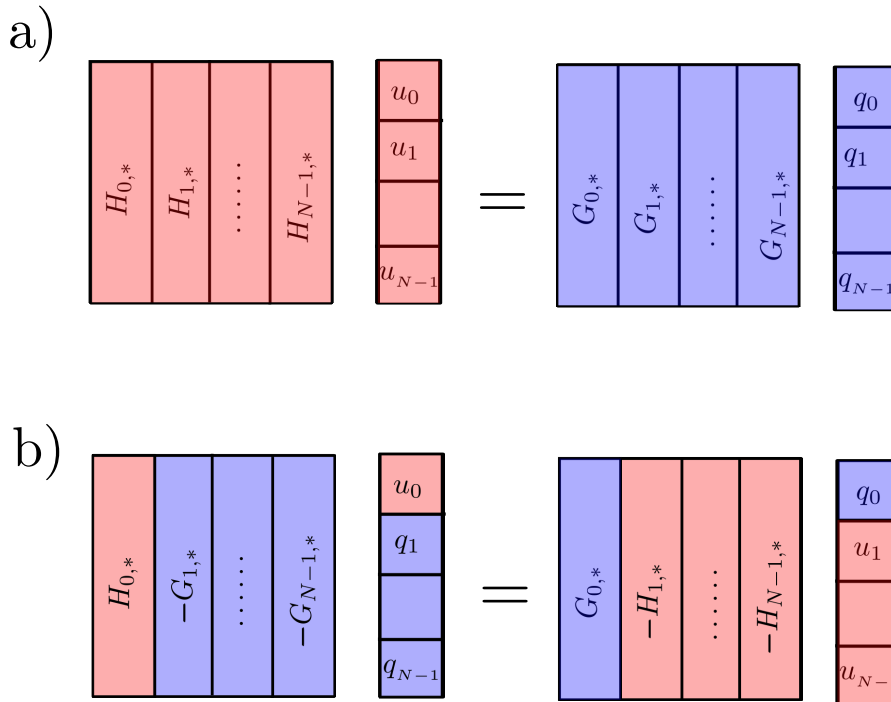
i liczymy

$$H' \cdot \vec{u}' = \vec{b}' \quad (33)$$

oraz

$$G' \cdot \vec{q}' = \vec{b}' \quad (34)$$

Rozwiązanie układu (34) stanowi wektor $\vec{q}' = [q_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T$. Znając \vec{u}' i \vec{q}' możemy odtworzyć \vec{u} i \vec{q} .



Rysunek 2: a) Zapis macierzowy równań MEB dla warunku Dirichleta we wszystkich węzłach brzegowych. b) Przystawienie kolumn macierzy oraz elementów wektorów \vec{u} i \vec{q} odpowiadające WB: Dirichleta w węźle $m = 0$ oraz von Neumanna dla węzłów $m = 1, 2, \dots, N - 1$.

1.4 Wizualizacja rozwiązania

Mając wektory \vec{u} i \vec{q} możemy narysować rozwiązanie (potencjał) wewnątrz okręgu ($|\vec{r}| < R$). Korzystamy z równania (10) kładąc $c_i = 1$ (źródło punktowe umieszczamy wewnątrz obszaru)

$$u(\vec{r}_i) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 q_{n,k} \cdot g_{n,k}(\vec{r}_i) - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^2 u_{n,k} \cdot h_{n,k}(\vec{r}_i) \quad (35)$$

Uwaga: Dla każdego położenia \vec{r}_i wewnątrz okręgu elementy $g_{n,k}(\vec{r}_i)$ oraz $h_{n,k}(\vec{r}_i)$ należy przeliczyć na nowo (wzory 21 i 27). Można to robić na bieżąco podczas sumowania.

1.5 Zadania do wykonania

1. Ustalamy wartości parametrów: $R = 5$, $N = 12$. Węzły rozmieszczamy równomiernie na obwodzie koła z $\Delta\varphi = 2\pi/N$.
2. Tworzymy tablice H i G i wypełniamy ich elementy zgodnie z wzorami (21) i (27). Całki liczymy numerycznie używając 10 węzłowej kwadratury Gaussa-Legendre'a. W GSL-u używamy funkcji:
`gsl_integration_glfixed_table_alloc`
 oraz
`gsl_integration_glfixed_point`

3. WB Dirichleta

- a) Ustalamy warunki brzegowe Dirichleta dla wszystkich węzłów w postaci (wypełniamy wektor \vec{u})

$$u(\varphi_i) = \sin(2\varphi_i), \quad \varphi_i = i \cdot \Delta\varphi, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (36)$$

- b) znajdujemy wektor \vec{b} (wzór 28) i rozwiązujemy układ równań (wzór 29)

- c) Sprawdzić działanie programu. Zgodnie z twierdzeniem Gaussa całkowity strumień przenikający powierzchnię zamkniętą musi być równy zero bo nie mamy ładunków w układzie. Czyli suma składowych \vec{q} zeruje się

$$\sum_{i=0}^{N-1} q_i = 0 \quad (37)$$

co jest testem poprawności wyniku.

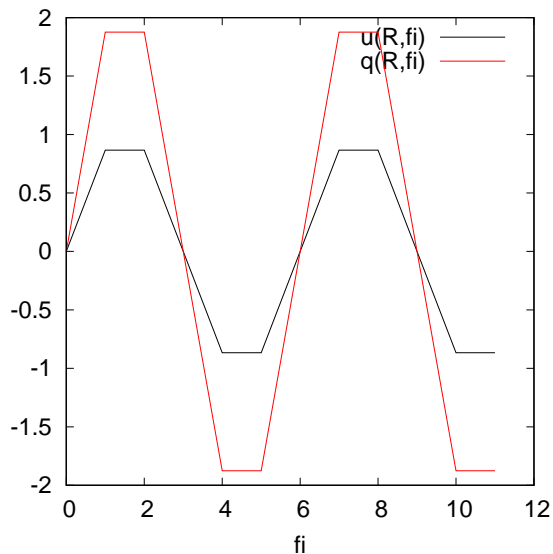
- d) Zapisać do pliku składowe \vec{u} i \vec{q} . Sporządzić wykresy wartości potencjału (\vec{u}) i pochodnej (\vec{q}) w węzłach na jednym rysunku. (40 pkt.)
- e) Sporządzić wykres rozkładu potencjału w postaci kolorowej mapy (wzór 35) korzystając z zależności (16) dla x_i i y_i . (40 pkt.)

4. Warunki WB Dirichleta i von Neumana.

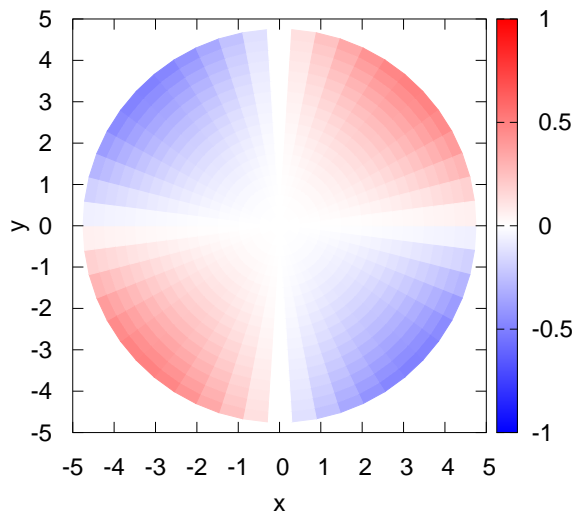
- a) Z poprzedniego zadania zachowujemy rozwiązania i zapisujemy jako \vec{u}_0 oraz \vec{q}_0 .
- b) Wprowadzamy warunek Dirichleta w węzle $m = 0$ oraz von Neumanna w pozostałych $m = 1, 2, \dots, N-1$, czyli tworzymy wektor \vec{u}' w postaci (32) korzystając ze znanych rozwiązań \vec{u}_0 i \vec{q}_0 . Następnie wyznaczamy \vec{b}' (wzór 33) i rozwiązujemy układ (wzór 34). Z wektorów \vec{u}' i \vec{q}' utworzyć wektory \vec{u} i \vec{q} i zapisać do pliku. 20 pkt.

1.6 Przykładowe wyniki

a)



b)



Rysunek 3: a) Zmiany \vec{u} i \vec{q} , b) rozkład potencjału