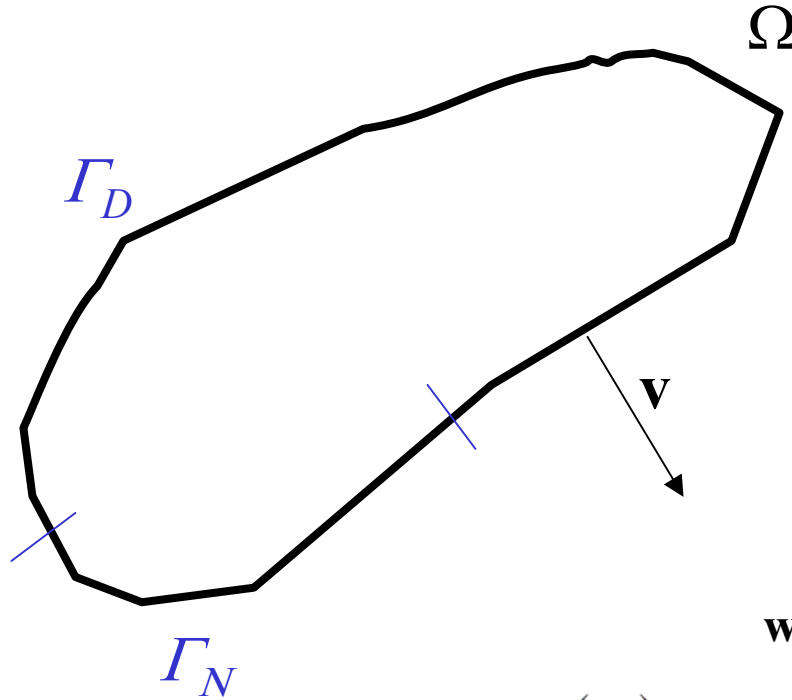


# Metoda elementów skończonych, problemy dwuwymiarowe



problem modelowy:

$$-\nabla^2 u + a_0 u = f \Big|_{\text{w } \Omega}$$

warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} u(x) &= g_D(x) \Big|_{\text{na } \Gamma_D} && \text{Dirichleta} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g_N(x) \Big|_{\text{na } \Gamma_N} && \text{Neumanna} \end{aligned}$$

problem ma jednoznaczne rozwiązanie, jeśli brzeg  $\Gamma_D$  nie ma zerowej długości.

gdyby na brzegu tylko warunek Neumanna (na pochodną):  
rozwiązanie będzie niejednoznaczne, bo stałą można  
dodać do  $u$  nie zmieniając wartości pochodnej

*układ równań z macierzą sztywności w której  
narzucono tylko warunek Neumanna - ? jak wygląda ?*

## stara folia

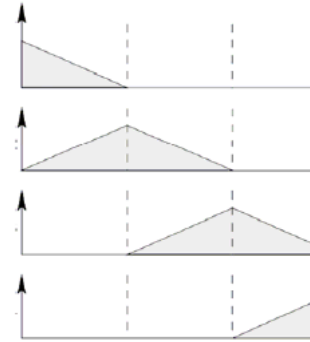
Warunki brzegowe: Neuman

$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i \Big|$$

$$v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$u'(x) = \sum_j y_j v'_j(x)$$

$$u'(x = x_1) = C \Big|$$



tylko  $v_1$  oraz  $v_2$  wnoszą przyczynek do pochodnej  
na lewym końcu:

$$u'(x_1) = -y_1 \frac{1}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Big|$$

pierwszy wiersz macierzy S

$(-1/h_2 \ 1/h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots)$  prawa strona pierwszy wiersz F : C

---

stara folia

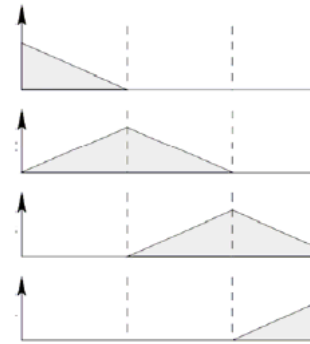
Warunki brzegowe: Neuman

$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i \Big|$$

$$v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$u'(x) = \sum_j y_j v'_j(x)$$

$$u'(x = x_1) = C \Big|$$



tylko  $v_1$  oraz  $v_2$  wnoszą przyczynek do pochodnej na lewym końcu:

$$u'(x_1) = -y_1 \frac{1}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Big|$$

taki pierwszy wiersz dostaniemy ze składania macierzy lokalnych w równaniu  $u''(x) = -\rho(x)$

pierwszy wiersz macierzy S  
 $(-1/h_2 \ 1/h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots)$  prawa strona pierwszy wiersz F : C

stara folia

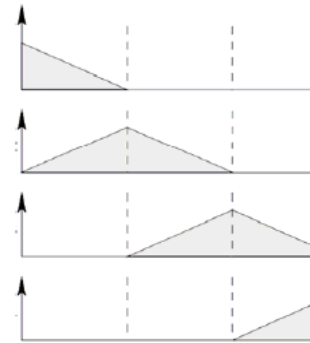
Warunki brzegowe: Neuman

$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i \Big|$$

$$v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$u'(x) = \sum_j y_j v'_j(x)$$

$$u'(x = x_1) = C \Big|$$



tylko  $v_1$  oraz  $v_2$  wnoszą przyczynek do pochodnej na lewym końcu:

$$u'(x_1) = -y_1 \frac{1}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Big|$$

taki pierwszy wiersz dostaniemy ze składania macierzy lokalnych w równaniu  $u''(x) = -\rho(x)$


pierwszy wiersz macierzy S  
 $(-1/h_2 \ 1/h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots)$  prawa strona pierwszy wiersz F : C

warunek Neumanna = tzw. naturalny wb (*natural bc*)

naturalny bo:  
nie zmienia macierzy sztywności

weźmy z lewej strony warunek naturalny, z prawej Dirichleta

macierz sztywności po złożeniu i narzuceniu war.b. dla funkcji liniowych i trzech węzłów w 1D :

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 \\ \frac{1}{h_2} & \left(-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \text{pochodna na lewym końcu} \\ F_2 \\ \text{wartość na prawym końcu} \end{pmatrix}$$


warunek Dirichleta wymaga interwencji w macierz sztywności  
w.D.= istotny warunek brzegowy (*essential BC*)

$$\det = 1/h_2 h_3$$

weźmy warunek naturalny, z obu stron

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 \\ \frac{1}{h_2} & \left(-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \text{pochodna na lewym końcu} \\ F_2 \\ \text{pochodna na prawym końcu} \end{pmatrix}$$

$$\det = -\frac{1}{h_2} \frac{1}{h_3} \left( \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \right) + \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_3} \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_3} \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_2}$$

weźmy warunek naturalny, z obu stron

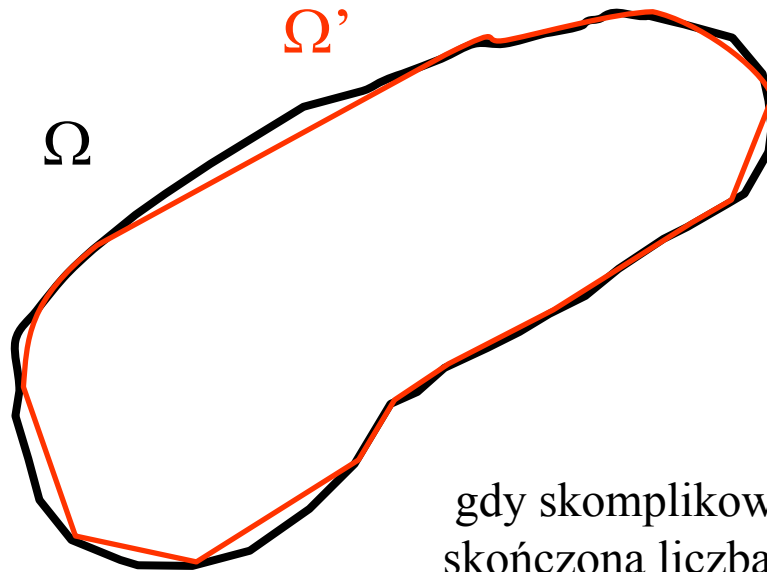
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 \\ \frac{1}{h_2} & \left(-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} \end{pmatrix}$$

$$\det = -\frac{1}{h_2} \frac{1}{h_3} \left( \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \right) + \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_3} \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_3} \frac{1}{h_2} \frac{1}{h_2}$$

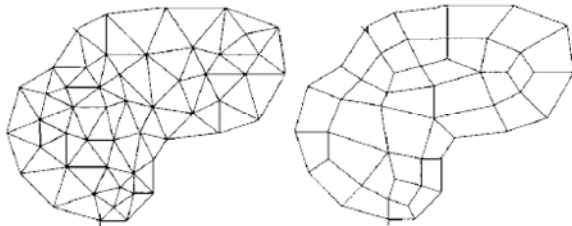
macierz sztywności po złożeniu jest osobliwa!  
UR nie ma jednoznacznego rozwiązania !



## Przybliżenie brzegu



gdy skomplikowany brzeg:  
skończona liczba elementów  
(trójkątów, czworokątów itp)  
opisuje problem tylko w sposób  
przybliżony  
= przybliżone warunki brzegowe



gdy brzeg opisany funkcją wielomianową  
problem można opisać przypisać za pomocą  
skończonej liczby elementów krzywoliniowych

$$-\nabla^2 u + a_0 u = f$$

**Słabe sformułowanie problemu z funkcją wagową  $w(x)$**

$$\int_{\Omega} (-\nabla^2 u + a_0 u) w(x) d\Omega = \int_{\Omega} f(x) w(x) d\Omega$$

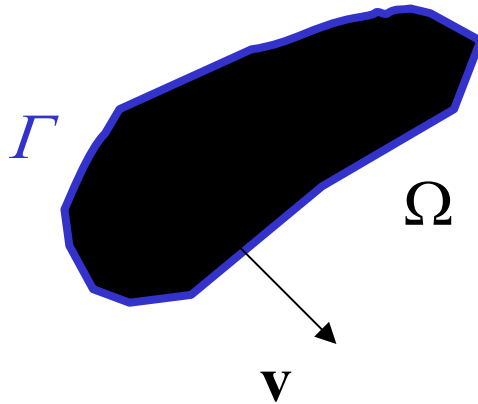
całkowanie macierzy sztywności

całkowanie przez części, 2 i więcej wymiary

**Tw. Gaussa**

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} d\Omega$$

strumień pola wektorowego przez zamkniętą powierzchnię = dywergencja pola wewnątrz objętości ograniczonej powierzchnią



a,b – dwie funkcje skalarne

tożsamość:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{A} d\Omega$$

$$\nabla \cdot (a \nabla b) = a \nabla^2 b + (\nabla a) \cdot (\nabla b)$$

scałkować po objętości

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (a \nabla b) d\Omega = \int_{\Gamma} a \nabla b d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma} a \nabla b d\Gamma = \int_{\Omega} a \nabla^2 b d\Omega + \int_{\Omega} \nabla a \cdot \nabla b d\Omega$$

całkowanie przez części  
w 2D

---

**W 1D**

$$a \frac{db}{dx} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a \frac{d^2 b}{dx^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{da}{dx} \frac{db}{dx} dx$$

całka brzegowa w 1D: brzeg składa się z dwóch punktów

wracamy do słabej formy równania różniczkowego

$$\int_{\Omega} \left( -\nabla^2 u + a_0 u \right) w(x) d\Omega = \int_{\Omega} f(x) w(x) d\Omega \quad \Big|$$

całkowanie przez części:

$$\int_{\Gamma} a \nabla b d\Gamma = \int_{\Omega} a \nabla^2 b d\Omega + \int_{\Omega} \nabla a \cdot \nabla b d\Omega \quad \Big|$$

$$- \int_{\Omega} (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla w) d\Omega - \int_{\Gamma} (\nabla u) w d\Gamma \quad \Big|$$

redukuje rząd pochodnych

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w + a_0 u w) d\Omega = \int_{\Omega} f w d\Omega + \int_{\Gamma} w \nabla u d\Gamma \quad \Big|$$

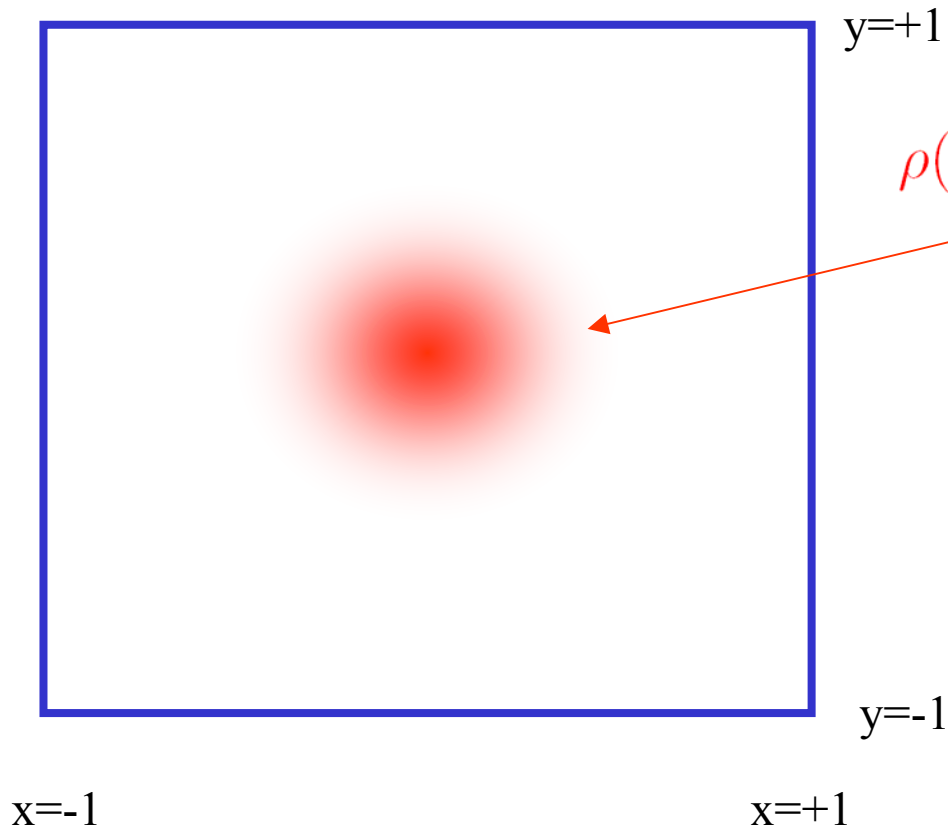
na części  $\Gamma$ : w. brzegowy na wartość  $u$ .

Całka po  $\Gamma$  znika jeśli  $w(\text{na } \Gamma)=0$ . U Galerkina – w takie jak funkcje bazowe.

Jeśli rozwiązanie  $u$  nie znika na brzegu, całka brzegowa istnieje i trzeba się z nią uporać. Z całkami tego typu walczyć będziemy w dalszej części wykładu, przy metodzie elementów brzegowych.

Pierwszy problem:

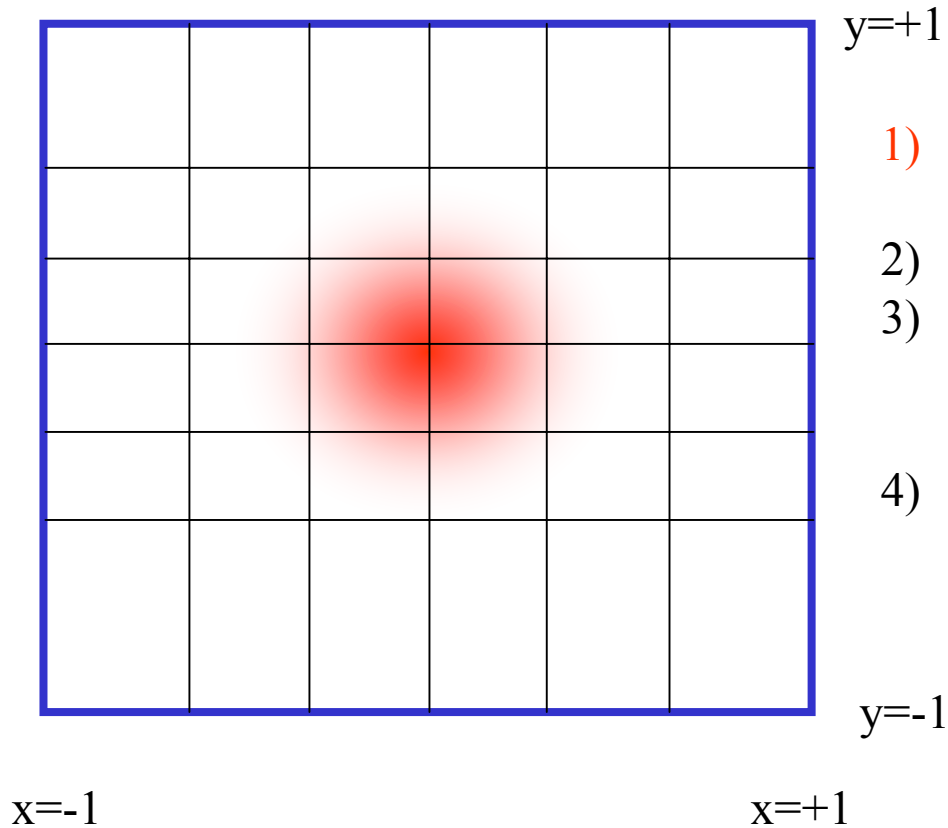
uziemiona skrzynka potencjał  $u=0$



$$\rho(x, y) = \exp(-50(x^2 + y^2))$$

$$\nabla^2 u = -\rho(x, y)$$

Pierwszy problem:

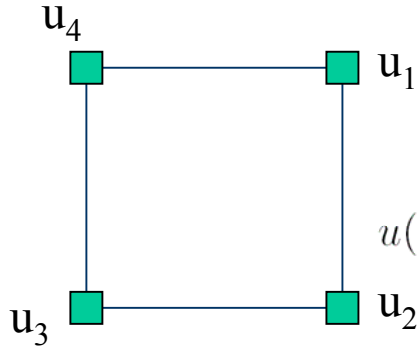


- 1) podzielić płaszczyznę na elementy (zaczniemy od czworokątnych el.)
- 2) wybrać funkcje kształtu
- 3) policzyć macierze sztywności i wektory obciążeń dla wszystkich elementów
- 4) złożyć globalną macierz sztywności i globalny wektor obciążeń

$$\nabla^2 u = -\rho(x, y)$$

## 2) wybrać funkcje kształtu

najniższy rząd na kwadratowym elemencie:  
biliniowe funkcje kształtu

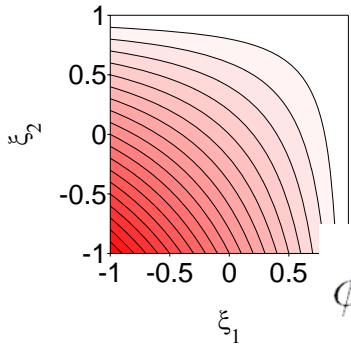


$$u(\xi_1, \xi_2) = u_1\phi_1(\xi_1, \xi_2) + u_2\phi_2(\xi_1, \xi_2) + u_3\phi_3(\xi_1, \xi_2) + u_4\phi_4(\xi_1, \xi_2)$$

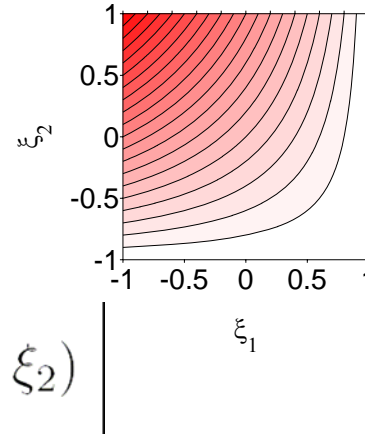
1D:  $\frac{x_{m-1} \quad x_m}{-1 \quad 1}$   
element

$$\phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi$$

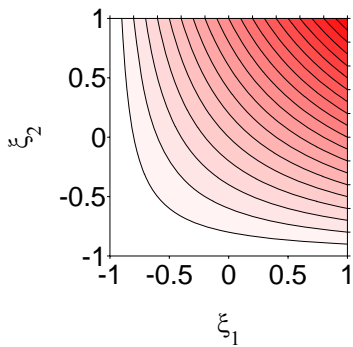
$$\phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi$$



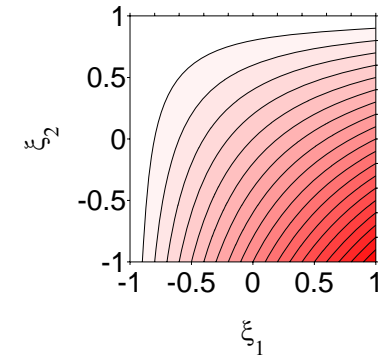
$$\phi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$



$$\phi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)$$

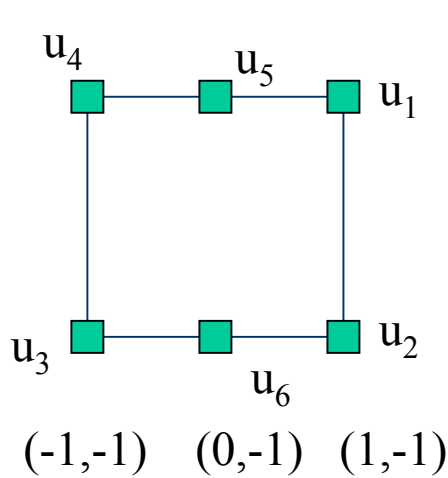


$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \quad \phi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)$$



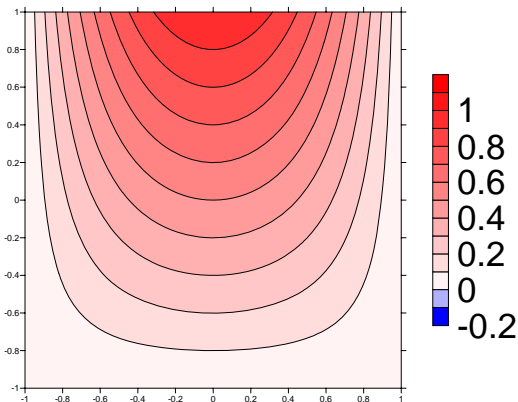
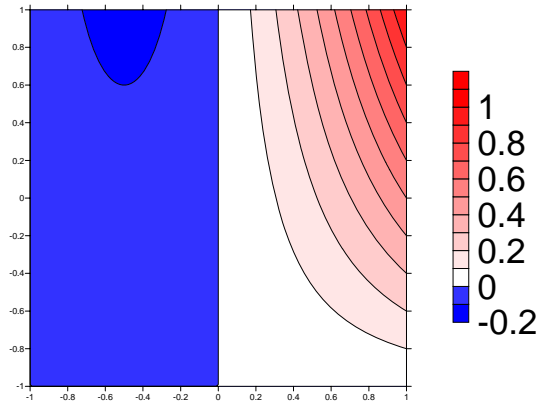
każda z funkcji kształtu:  
osiąga wartość 1 w jednym z narożników  
zeruje się w pozostałych

wyższego rzędu: iloczyny funkcji bazowych Lagrange'a w obydwu wymiarach  
 np. kwadratowe w x, liniowe w y



$$u(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^6 u_i \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(\xi_2 + 1) \times \frac{(\xi_1)(\xi_1 + 1)}{2}$$

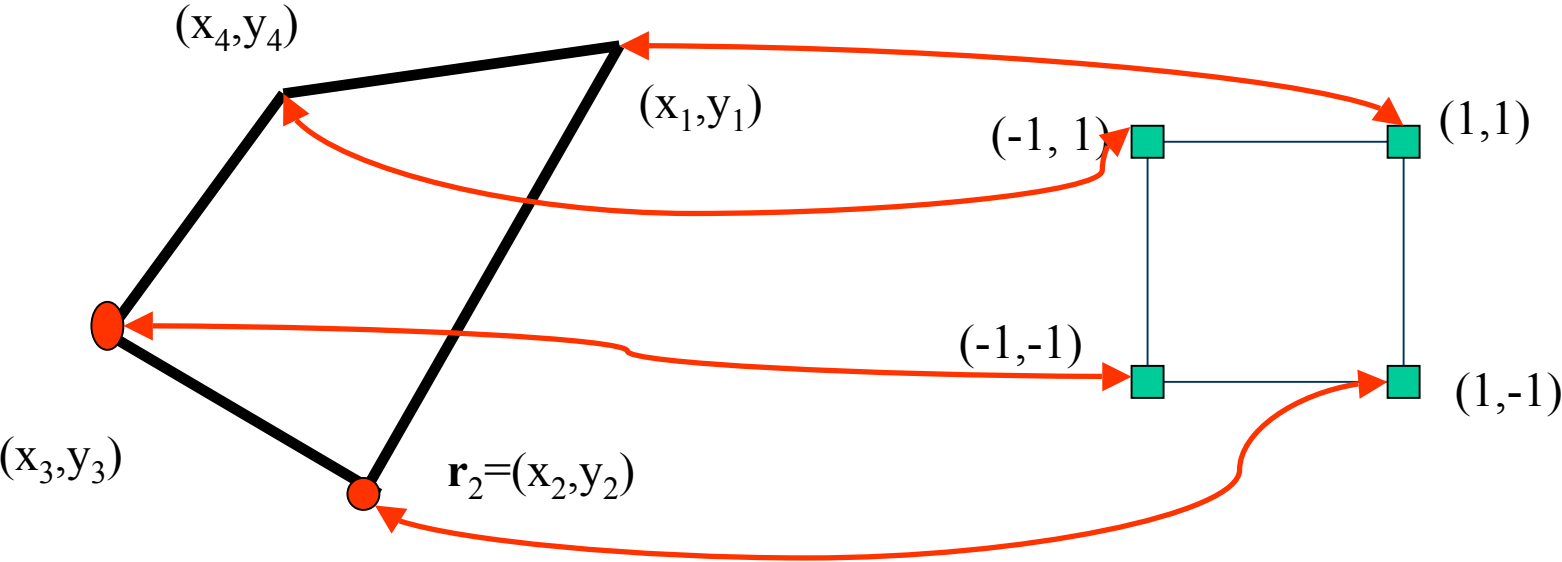


$$\phi_6(\xi_1, \xi_2) = -\frac{1}{2}(\xi_2 + 1) \times (\xi_1 - 1)(\xi_1 + 1)$$

itd.

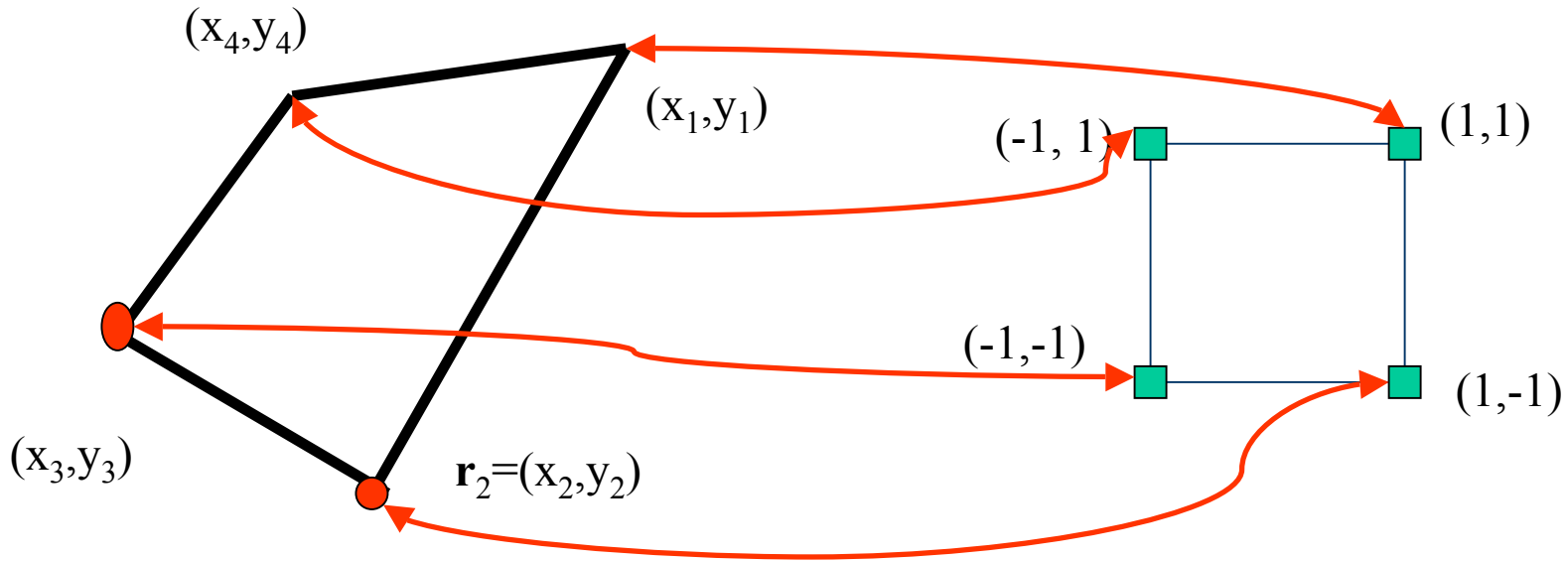


### 3) transformacja elementu z przestrzeni referencyjnej



wzajemnie jednoznaczne mapowanie ??? Jak to zrobić?

### 3) transformacja elementu z przestrzeni referencyjnej



wzajemnie jednoznaczne mapowanie:??? Jak to zrobić? - zaskakująco łatwo

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \phi_i(\xi) \quad \left| \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2) \right|$$

biliniowe funkcje kształtu (do mapowania zawsze, nawet gdy używane są później wyższe)

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)$$

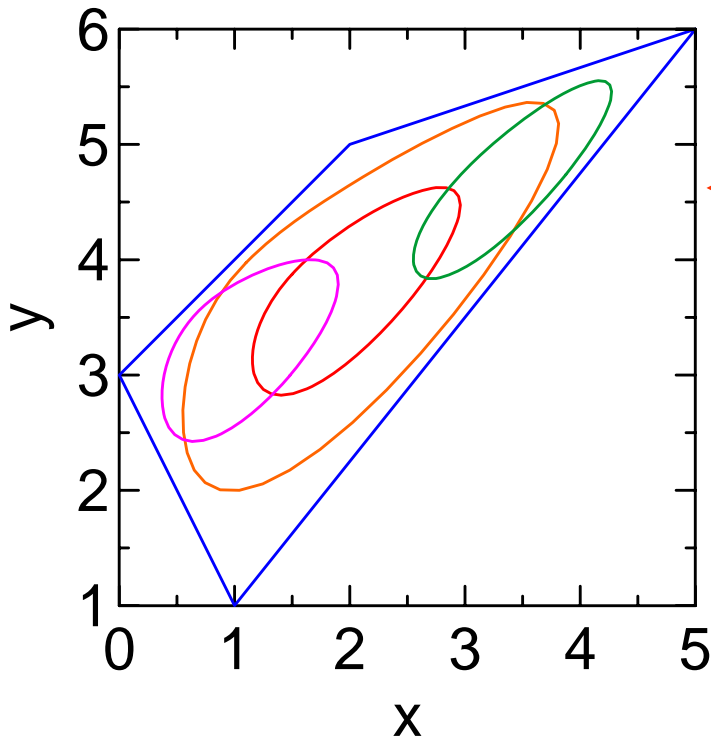
$$\phi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)$$

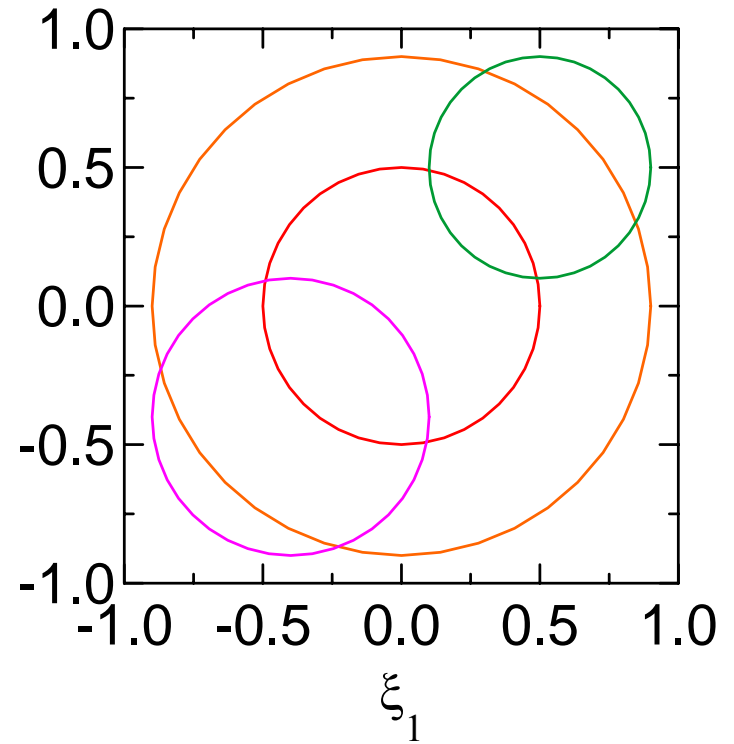
$$\phi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

składanie narożników  
: w każdym tylko 1 funkcja nie znika

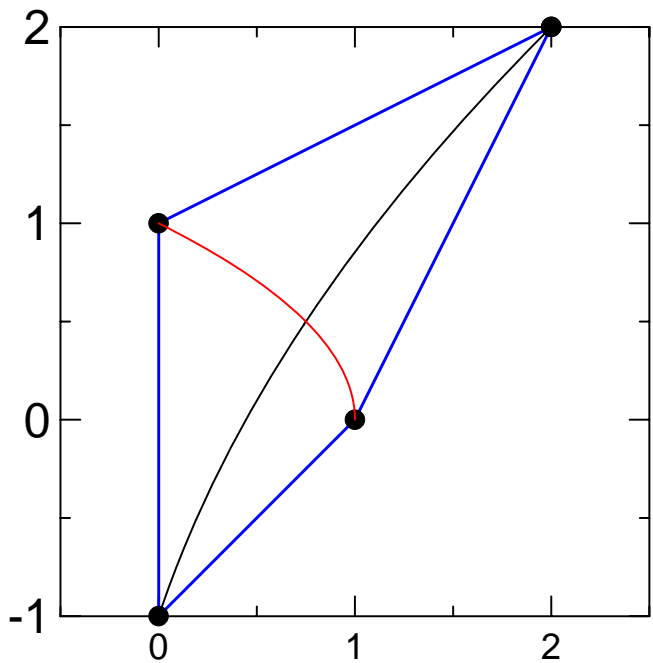


$\xi_2$

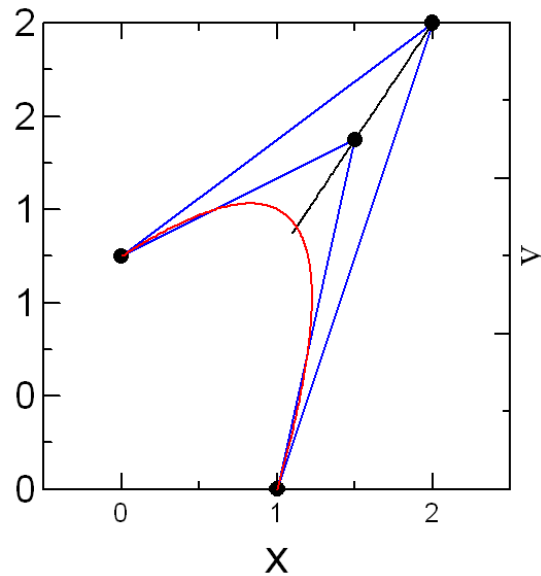
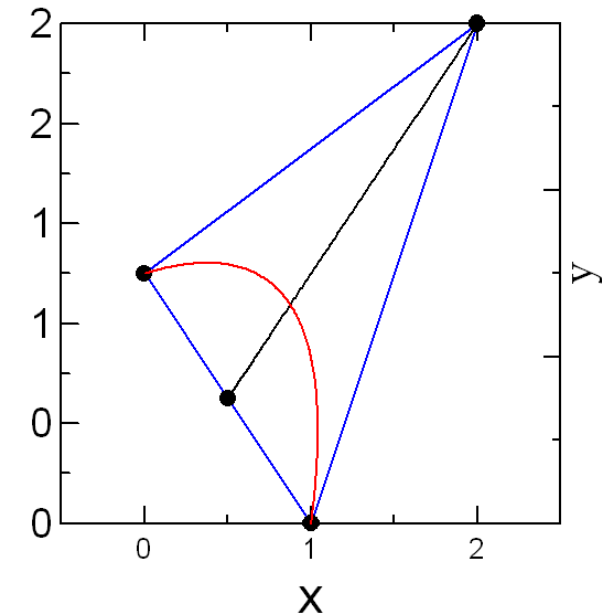
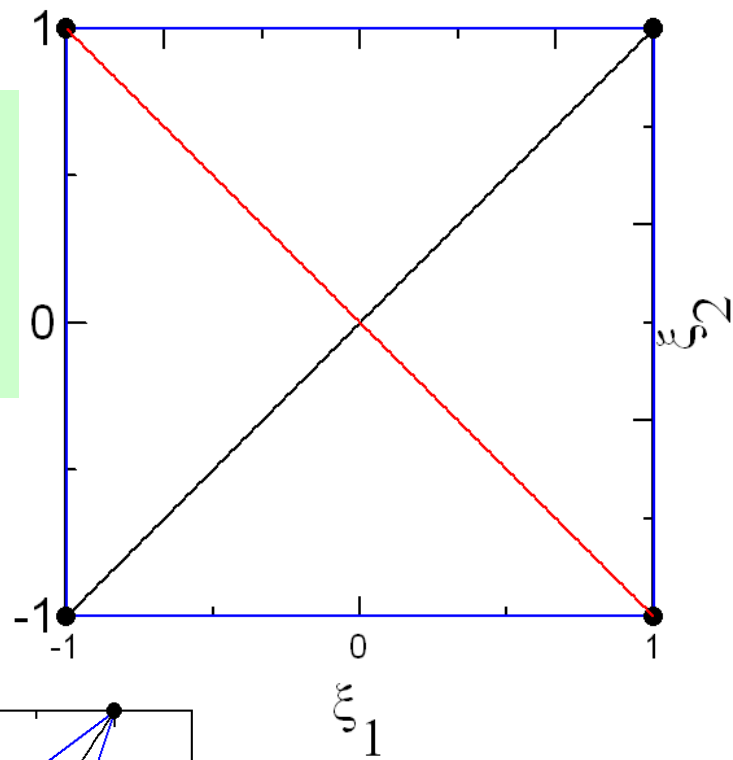


$\xi_1$

co się dzieje z przekątnymi? transformacja elementu do przestrzeni referencyjnej

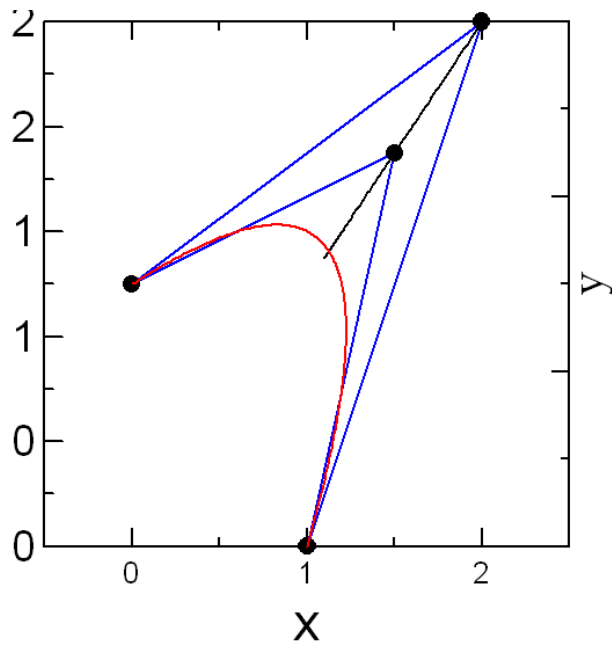
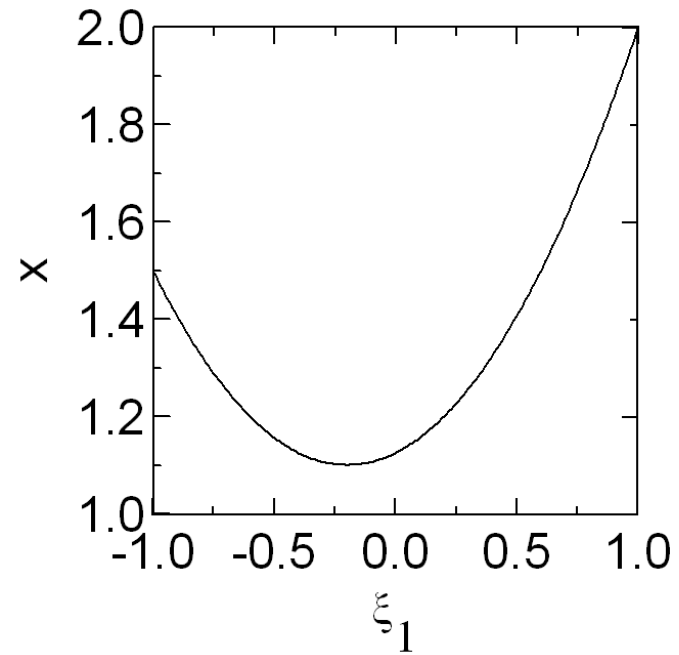
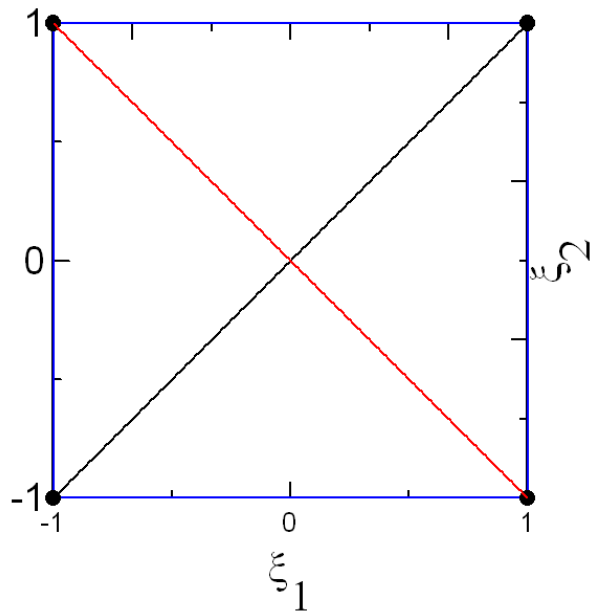


przekształcenie  
nie jest liniowe i  
nie zachowuje  
równoległości  
prostych



← element wklęsły  
wewnątrz mapowane  
na zewnątrz,  
nie chcemy takich  
elementów.  
mają być wypukłe

# element wkłesły niedobry -mapowanie nie jest bijekcją



liczone wzdłuż antydiagonali

# Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 1. tożsamość

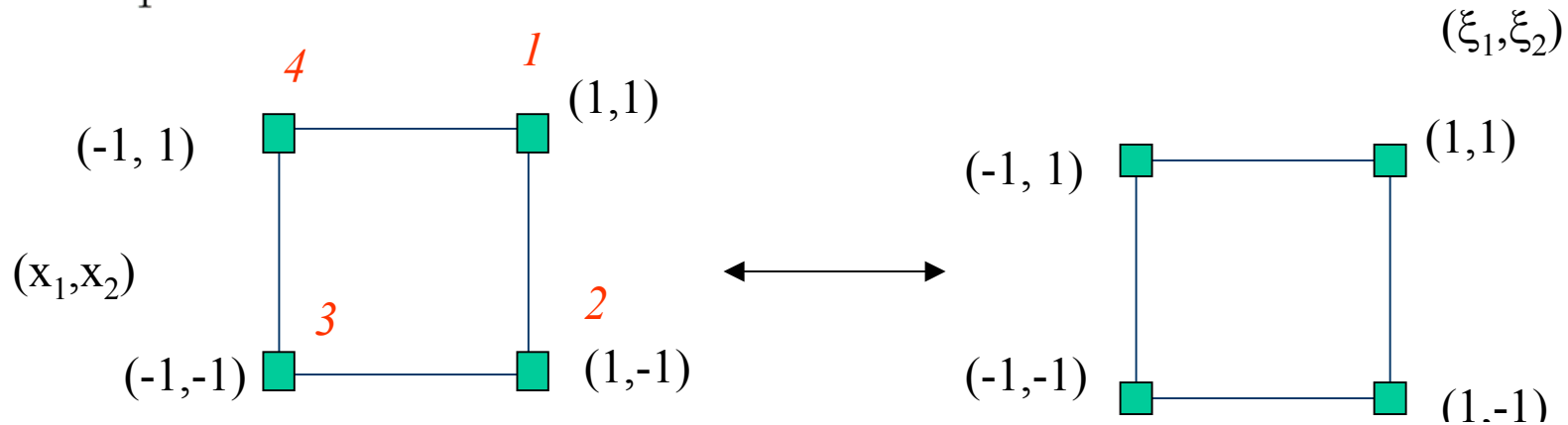
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2) \quad \Bigg|$$

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)$$

$$\phi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)$$

$$\phi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)$$



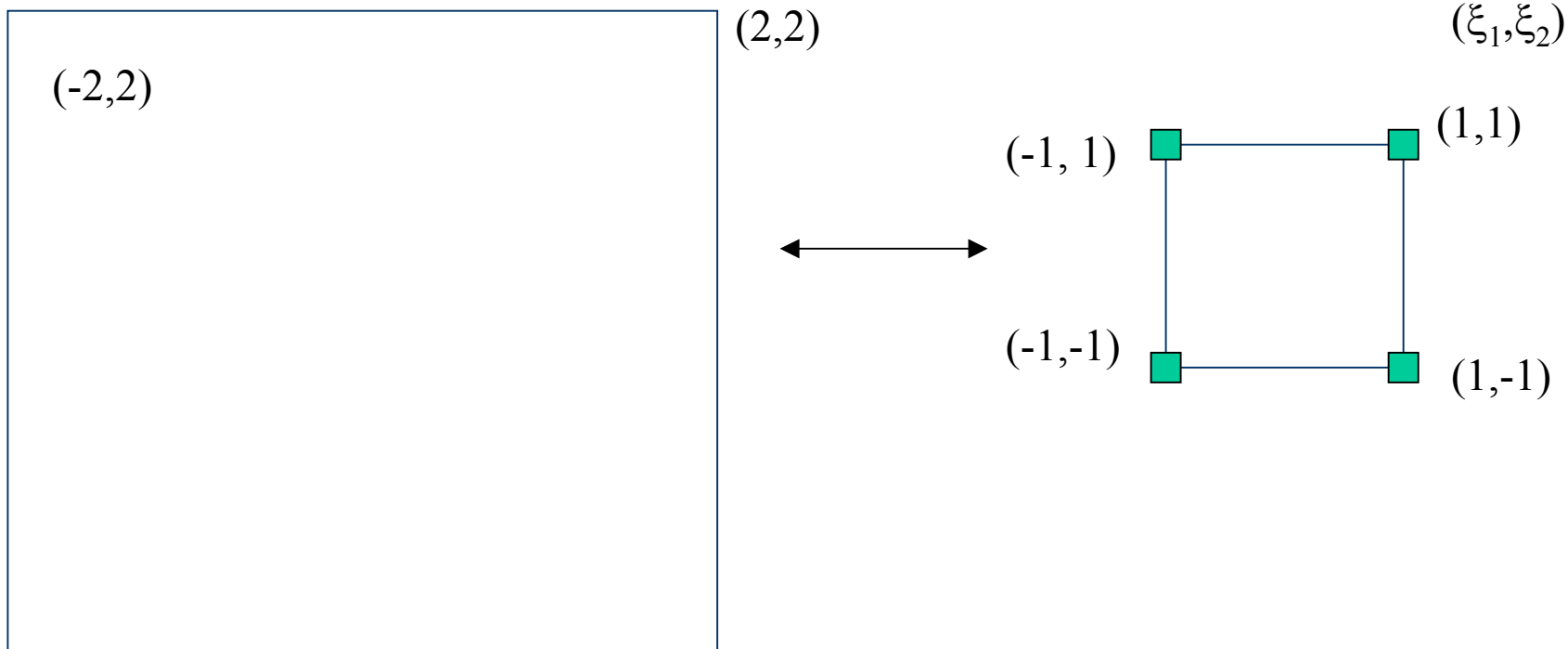
$$x = \frac{1}{4} [(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) + (1 + \xi_1)(1 - \xi_2) - (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) - (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)] \quad \Bigg|$$

$$x = \frac{1}{4} [2(1 + \xi_1) - 2(1 - \xi_1)] = \xi_1 \quad \Bigg|$$

$$y = \frac{1}{4} [(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) - (1 + \xi_1)(1 - \xi_2) - (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) + (1 - \xi_1)(1 + \xi_2)]$$

$$y = \frac{1}{4} [2(1 + \xi_2) - 2(1 - \xi_2)] = \xi_2 \quad \Bigg|$$

# Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 2 powiększenie

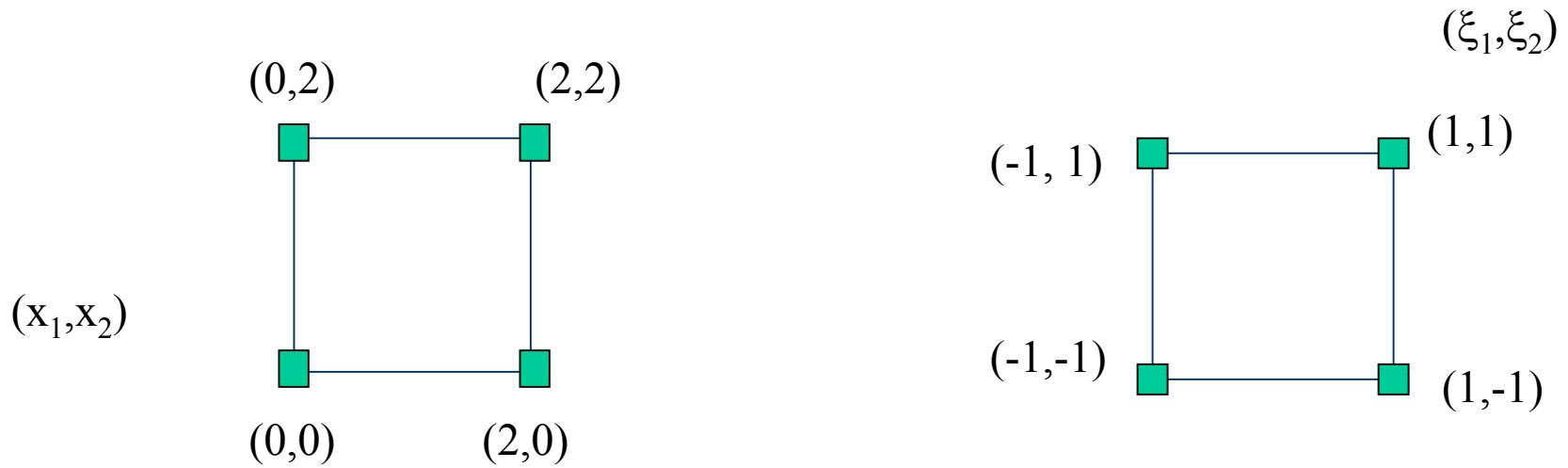


$(-2,-2)$   $(2,-2)$

$$\begin{aligned} x &= 2\xi_1 \\ y &= 2\xi_2 \end{aligned} \Big|$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2) \Big|$$

# Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 3 przesunięcie

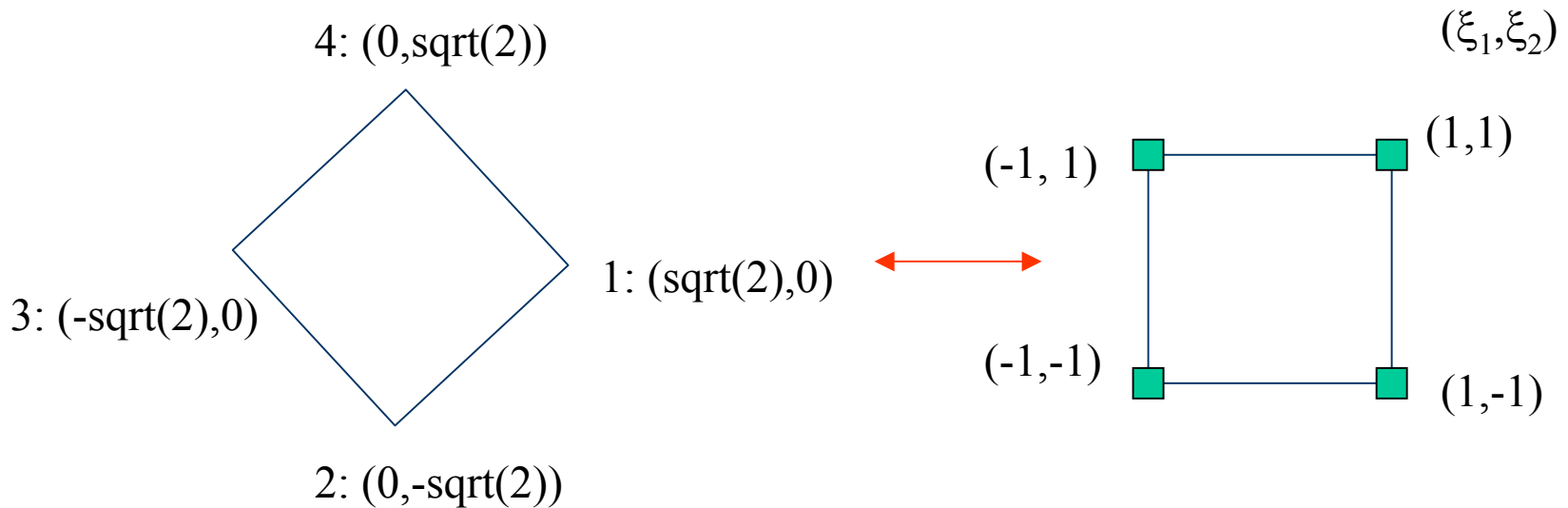


$$x = \frac{1}{4} [2(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) + 2(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)] = \xi_1 + 1$$

$$y = \frac{1}{4} [2(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) + 2(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)] = \xi_2 + 1$$



# Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 4 obrót



$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{4} \left( \sqrt{2}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) - \sqrt{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \right) & x &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\xi_1 + \xi_2) \\
 y &= \frac{1}{4} \left( -\sqrt{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) + \sqrt{2}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \right) & y &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-\xi_1 + \xi_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \theta = -\pi/4$$

Macierz sztywności-całkowanie w przestrzeni referencyjnej

$$f = -\rho(x, y)$$

bo warunki brzegowe

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w + a_{\theta} u w) d\Omega = \int_{\Omega} f w d\Omega + \int_{\Gamma} w \nabla u d\Gamma$$

bo tego wyrazu nie ma w równaniu (Poissona)

$$u(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^m u_i \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$\text{Galerkin: } w = \phi_j(\xi_1, \xi_2)$$

do macierzy sztywności

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x}$$

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \left( \sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) + \left( \sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \left( \sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) + \left( \sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right)$$

potrzebne

$$\left. \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right| \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \quad k=1,2 \quad \text{a mamy } x(\xi_1, \xi_2) \text{ i } y(\xi_1, \xi_2)$$

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{array} \right)^{-1}$$

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{array} \right) = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial x}{\partial \xi_2}} \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{array} \right)$$

Jakobian

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial x}{\partial \xi_2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \quad \phi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \quad \phi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)$$

$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}(1 + \xi_2)$	$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)$	$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \xi_2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4))$
$\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}(1 - \xi_2)$	$\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{4}(1 + \xi_1)$	$\frac{\partial x}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + \xi_1(x_1 - x_2 + x_3 - x_4))$
$\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{4}(1 - \xi_2)$	$\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)$	$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + \xi_2(y_1 - y_2 + y_3 - y_4))$
$\frac{\partial \phi_4}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{4}(1 + \xi_2)$	$\frac{\partial \phi_4}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)$	$\frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + \xi_1(y_1 - y_2 + y_3 - y_4))$

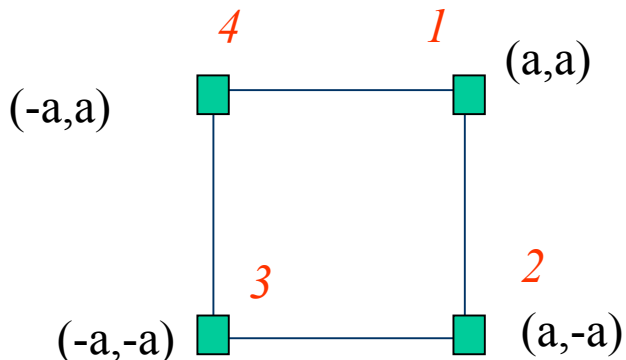
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial x}{\partial \xi_2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$$

Jakobian (mianownik)

$$J = \frac{1}{8} \xi_1 ((x_1 - x_4)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_1 - y_4)) + \frac{1}{8} \xi_2 ((x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)) + \frac{1}{8} ((x_1 - x_3)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_1 - y_3))$$

zależy od kształtu i rozmiaru elementu w przestrzeni fizycznej

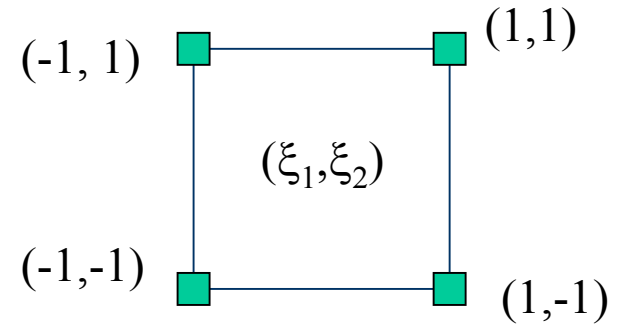
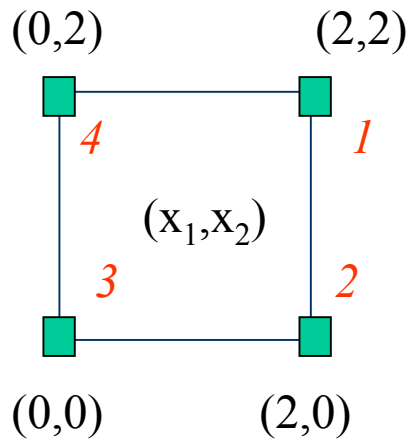
Jakobian dla powiększenia



$$J = \frac{1}{8} \xi_1 ((x_1 - x_4)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_1 - y_4)) + \frac{1}{8} \xi_2 ((x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)) + \frac{1}{8} ((x_1 - x_3)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_1 - y_3))$$

$$J = a^2$$

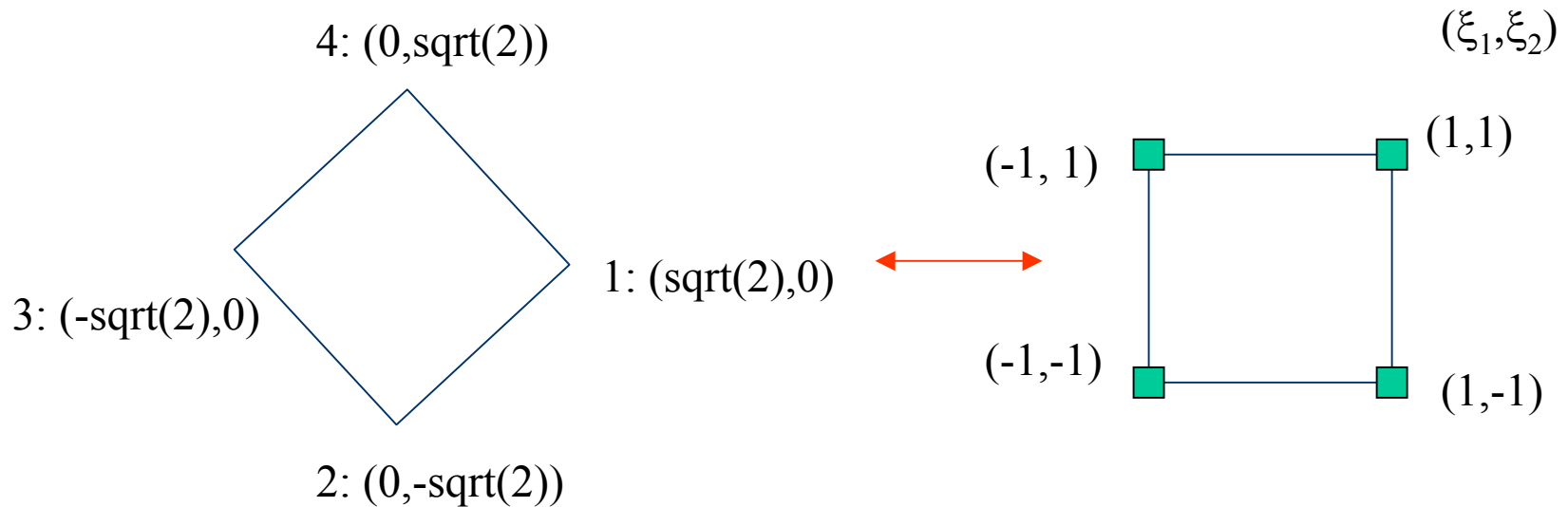
## Jakobian dla przesunięcia



$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{8} \xi_1 ((x_1 - x_4)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_1 - y_4)) \\ &\quad + \frac{1}{8} \xi_2 ((x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)) \\ &\quad + \frac{1}{8} ((x_1 - x_3)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_1 - y_3)) \end{aligned}$$

$$J=1$$

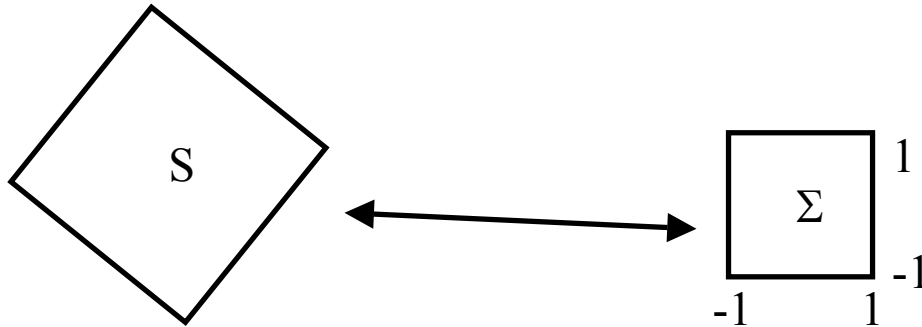
# Jakobian dla obrotu



$$J = \frac{1}{8} \xi_1 ((x_1 - x_4)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_1 - y_4)) \\ + \frac{1}{8} \xi_2 ((x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)) \\ + \frac{1}{8} ((x_1 - x_3)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_1 - y_3))$$

$$J=1$$

Ogólnie, przy transformacjach zachowujących kształt [kwadrat=kwadrat]  $J = \text{const}$



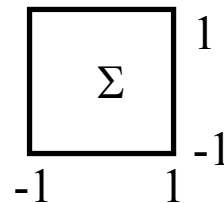
$$S = \int dS = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J(\xi_1, \xi_2) = 4J$$

$$J = S/4$$

stosunek pola elementu fizycznego  
do pola elementu odniesienia ( $J = \text{czynnik skali}$ )

---

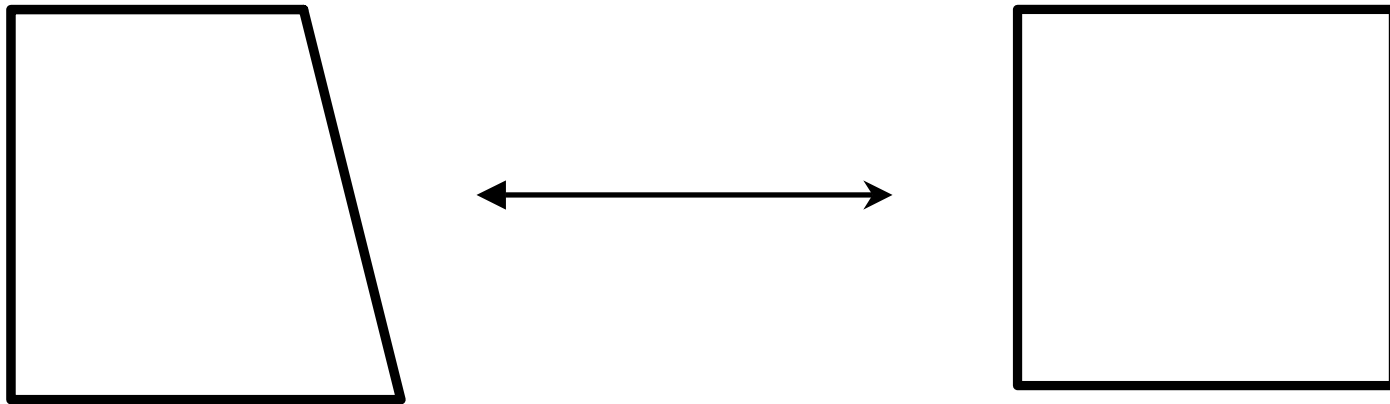
gdy transformacja = rozciągnięcie jednego z kierunków, powiedzmy  $x$  razy  $a$



również wtedy jacobian = const



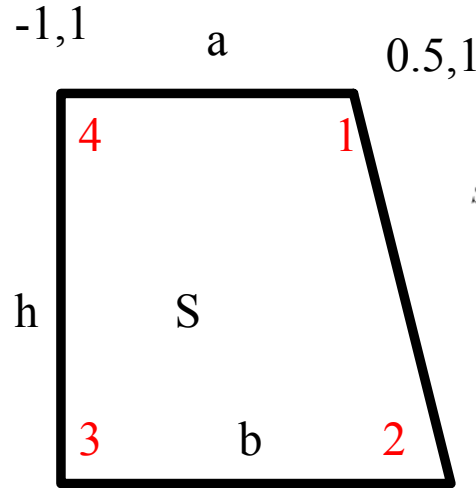
zależność  $J$  od współrzędnych referencyjnych  
gdy różne fragmenty elementu mają wchodzić  
do całki z różną wagą, tj.,  
gdy element fizyczny nie jest prostokątny



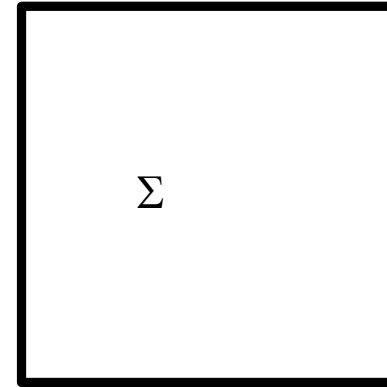
zawsze jest tak, że całka z  $J(\xi_1, \xi_2)$  po elemencie odniesienia  
= Pole elementu fizycznego

# Jakobian transformacji biliniowej która nie zachowuje kształtu

$$S = (a+b)/2 * h = 3.5/2 * 2$$

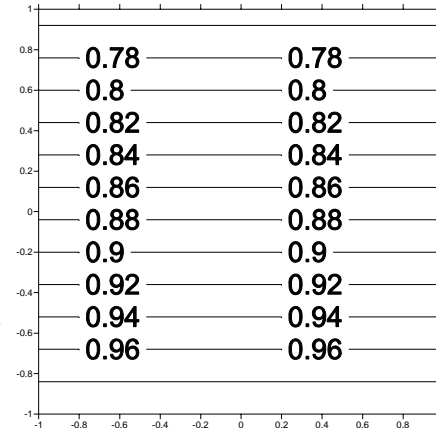


$$S = \int dS = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J(\xi_1, \xi_2) = 4J$$



$$-1, -1 \qquad 1, -1$$

$$J = \frac{1}{8} \xi_1 ((x_1 - x_4)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_1 - y_4)) + \frac{1}{8} \xi_2 ((x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (x_3 - x_4)(y_1 - y_2)) + \frac{1}{8} ((x_1 - x_3)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_1 - y_3))$$



mniejsza „waga” punktów z górnej części elementu referencyjnego

$$J = -\frac{1}{8} \xi_2 + \frac{7}{8}$$

$$\int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J(\xi_1, \xi_2) = \frac{7}{2}$$

## Macierz sztywności:

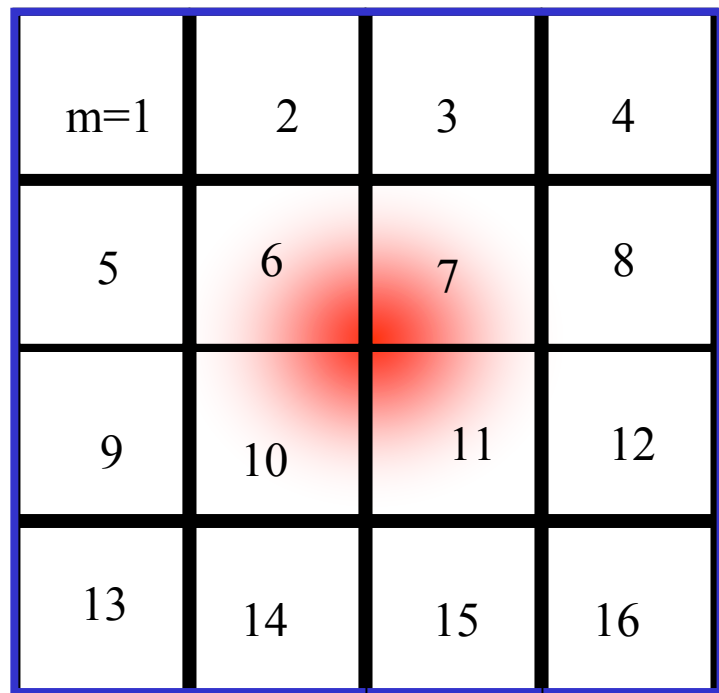
różniczkowanie w przestrzeni fizycznej zapisane  
we wsp. referencyjnych

$$\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j = \left( \sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial x} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial x} \right) + \left( \sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial y} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial y} \right)$$

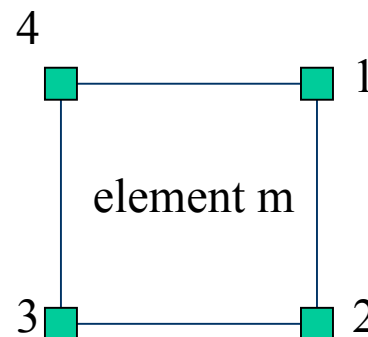
$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J_m \nabla\phi_i \nabla\phi_j$$

w całkowaniu : przy przejściu do współrzędnych referencyjnych uwzględniamy jacobian.

W naszym przykładzie  
weźmy szesnaście kwadratowych elementów:



Macierz sztywności 2D, kwadratowe  
elementy, biliniowe funkcje kształtu  
Lagrange'a



$$x_4^m = -1 + \text{mod}(m - 1, 4)\Delta x$$

$$y_4^m = 1 - \frac{m - 1}{4}\Delta x$$

$$x_3^m = x_4^m$$

$$y_1^m = y_4^m$$

dzielenie integerów  
(bez reszty)

$$x_1^m = x_4^m + \Delta x$$

$$y_3^m = y_4^m - \Delta x$$

$$x_2^m = x_1^m$$

$$y_2^m = y_3^m$$

(-1,-1)

$\Delta x$

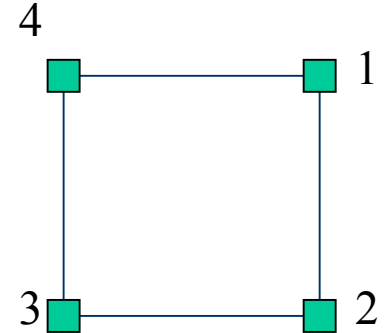
Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a

Macierz sztywności:

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \left( \sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) + \left( \sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$$

nie zależy od  $m$  (ten sam kształt i rozmiar)



podkreślam zera

$$J = \frac{1}{8} \xi_1 \left( (x_1 - x_4) \underline{(y_3 - y_2)} + (x_2 - x_3) \underline{(y_1 - y_4)} \right) + \frac{1}{8} \xi_2 \left( \underline{(x_1 - x_2)} (y_4 - y_3) + \underline{(x_3 - x_4)} (y_1 - y_2) \right) + \frac{1}{8} \left( (x_1 - x_3) (y_4 - y_2) - (x_4 - x_2) (y_1 - y_3) \right)$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \Delta x & \Delta x & -\Delta x & \Delta x \end{matrix}$

$$J = \Delta x^2 / 4$$

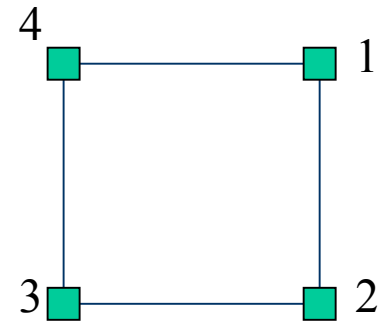
$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \xi_2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4))$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4} (x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + \xi_1(x_1 - x_2 + x_3 - x_4))$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + \xi_2(y_1 - y_2 + y_3 - y_4))$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4} (y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + \xi_1(y_1 - y_2 + y_3 - y_4))$$

Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu



$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4} (2\Delta x) \quad \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{array} \right) = \frac{1}{J} \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4} (2\Delta x) \quad \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{array} \right) = \frac{4}{\Delta x^2} \left( \begin{array}{cc} \frac{\Delta x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta x}{2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} \frac{2}{\Delta x} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta x} \end{array} \right)$$

$$\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j = \left( \sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial x} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial x} \right) + \left( \sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial y} \right) \times \left( \sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k} \frac{\partial\xi_k}{\partial y} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta x} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta x} \end{pmatrix}$$

Macierz sztywności 2D, **kwadratowe elementy**, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a

$$\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j = \left( \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_1} \right) \left( \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_1} \right) + \left( \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_2} \right) \left( \frac{2}{\Delta x} \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_2} \right)$$

$$\nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j = \frac{4}{\Delta x^2} \left( \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_1} \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_2} \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_2} \right)$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J_m \nabla\phi_i \nabla\phi_j$$

wszystkie elementy mają ten sam kształt i rozmiar

odpowiada im ten sam Jakobian

$$E_{ij} = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 \left( \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_1} \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_2} \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_2} \right)$$

wszystkie lokalne macierze sztywności są identyczne

Macierz sztywności 2D, kwadratowe  
elementy, biliniowe funkcje kształtu  
Lagrange'a

$$E_{ij} = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_2} \right)$$

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)$$

$$E_{11} = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 \left( \frac{1}{16} (1 + \xi_2)^2 + \frac{1}{16} (1 + \xi_1)^2 \right) = \frac{2}{3}$$

$$E_{22} = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 \left( \frac{1}{16} (1 - \xi_2)^2 + \frac{1}{16} (1 + \xi_1)^2 \right) = \frac{2}{3}$$

$$E_{33} = E_{44} = \frac{2}{3}$$

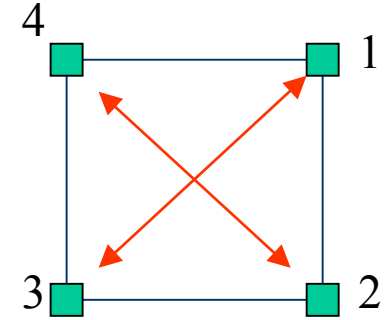
$$E_{12} = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 \left( \frac{1}{16} (1 - \xi_2^2) - \frac{1}{16} (1 + \xi_1)^2 \right) = -\frac{1}{6}$$

$$E_{13} = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 \left( -\frac{1}{16} (1 - \xi_2^2) - \frac{1}{16} (1 - \xi_1^2) \right) = -\frac{1}{3}$$



$$E = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

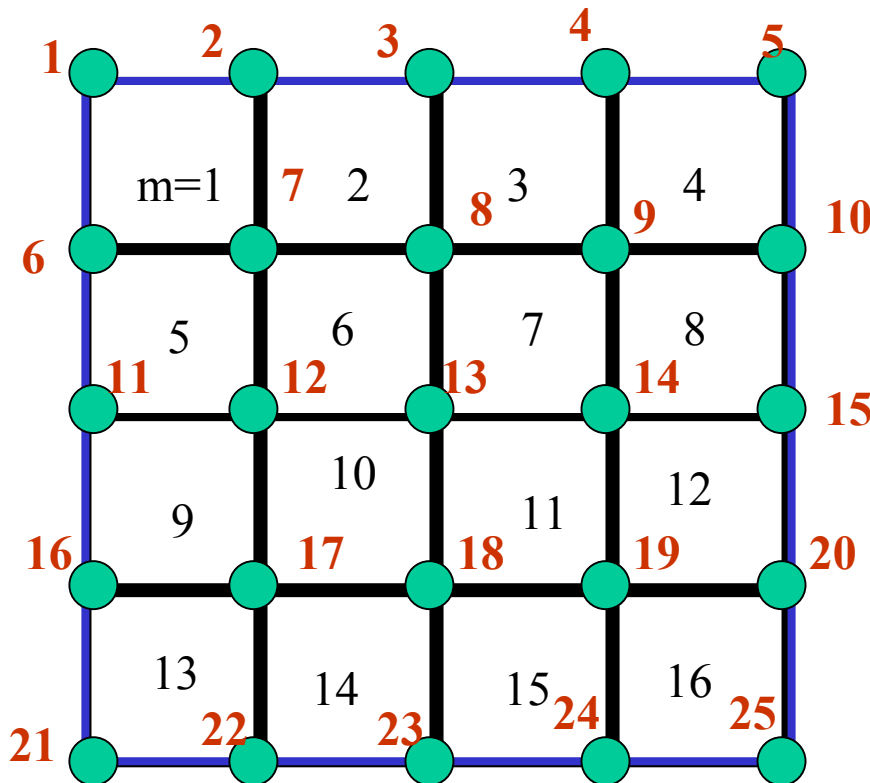
Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a



sąsiednie: -1  
naprzeciwległe -2

## składanie globalnej macierzy sztywności

### 1) globalna numeracja węzłów



Potrzebne funkcja nadająca węzłowi lokalnemu  $i$  z elementu  $m$  numer globalny  $nr(i,m)$

$$1 = nr(4, 1)$$

$$2 = nr(1, 1) = nr(4, 2)$$

$$3 = nr(2, 1) = nr(3, 4)$$

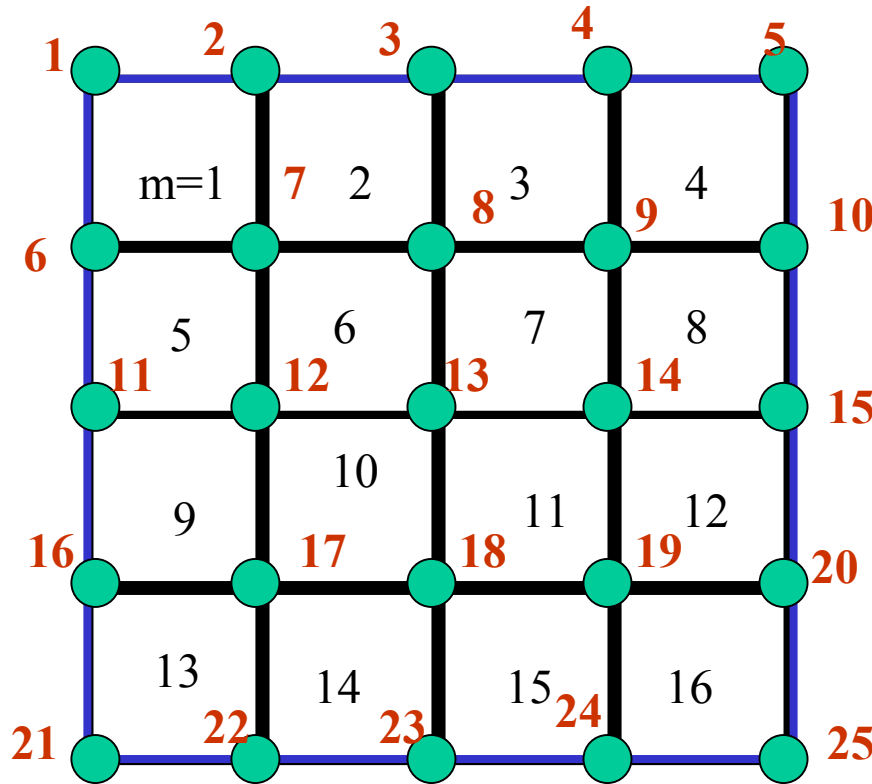
...

$$13 = nr(2, 6) = nr(3, 7) = nr(1, 10), nr(4, 11)$$

# składanie globalnej macierzy sztywności

Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a

## 1) globalna numeracja węzłów



$nr(i,m)$  funkcja nadająca węzłowi lokalnemu  $i$  z elementu  $m$  numer globalny

$$1 = nr(4, 1)$$

$$2 = nr(1, 1) = nr(2, 4)$$

$$3 = nr(2, 1) = nr(3, 4)$$

...

$$13 = nr(6, 2) = nr(7, 3) = nr(10, 1), nr(11, 4)$$

pętla po elementach  $m=1, 16$

pętla po węzłach lokalnych  $k=1, 4$

pętla po węzłach lokalnych  $l=1, 4$

identyfikacja numeru globalnego węzła

$$i = nr(k, m)$$

$$j = nr(l, m)$$

$$S(i, j) = S(i, j) + E(m, k, l)$$

$S=1/6 \times$

4	-1	0	0	0	-1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	8	-1	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	8	-1	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	8	-1	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-1	4	0	0	0	-2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	-2	0	0	0	8	-2	0	0	0	-1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2	-1	0	0	0	-2	8	0	0	0	-2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-1	-2	0	0	0	8	-2	0	0	0	-1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	0	0	0	-2	8	0	0	0	-2	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-2	0	0	0	8	-2	0	0	0	-1	-2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-2	16	-2	0	0	-2	-2	-2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	0	0	0	-2	8	0	0	0	-2	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-2	0	0	0	4	-1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-1	8	-1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-1	8	-1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	0	0	-1	8	-1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-1	0	0	0	-1	4

MES produkuje macierze rzadkie: liczba elementów niezerowych w macierzy  $N \times N$ : rzędu  $N$ .  
(przekrywanie tylko funkcji kształtu sąsiednich elementów)

macierz gęsta przy węzłach  $N=100\ 000 \rightarrow N^2 \times 8$  bajtów (double) = 80GB

# Prawa strona=całkowanie po elemencie w przestrzeni referencyjnej

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w + a_{\theta} u w) d\Omega = \int_{\Omega} f w d\Omega + \int_{\Gamma} w \nabla u d\Gamma$$

$$P_i^m = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J_m \rho(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

tu zależność od elementu m-ukryta

2) Całkowanie numeryczne po kwadracie

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} x_i^m \\ y_i^m \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$I = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 f(\xi_1, \xi_2) = \int_{-1}^1 d\xi_1 \sum_{k=1}^{N_2} w_k f(\xi_1, \xi_k) = \sum_{l=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_2} w_l w_k f(\xi_l, \xi_k)$$

3) Składanie prawych stron w globalną F

pętla po elementach m=1,16

pętla po węzłach lokalnych k=1,4

identyfikacja numeru globalnego węzła

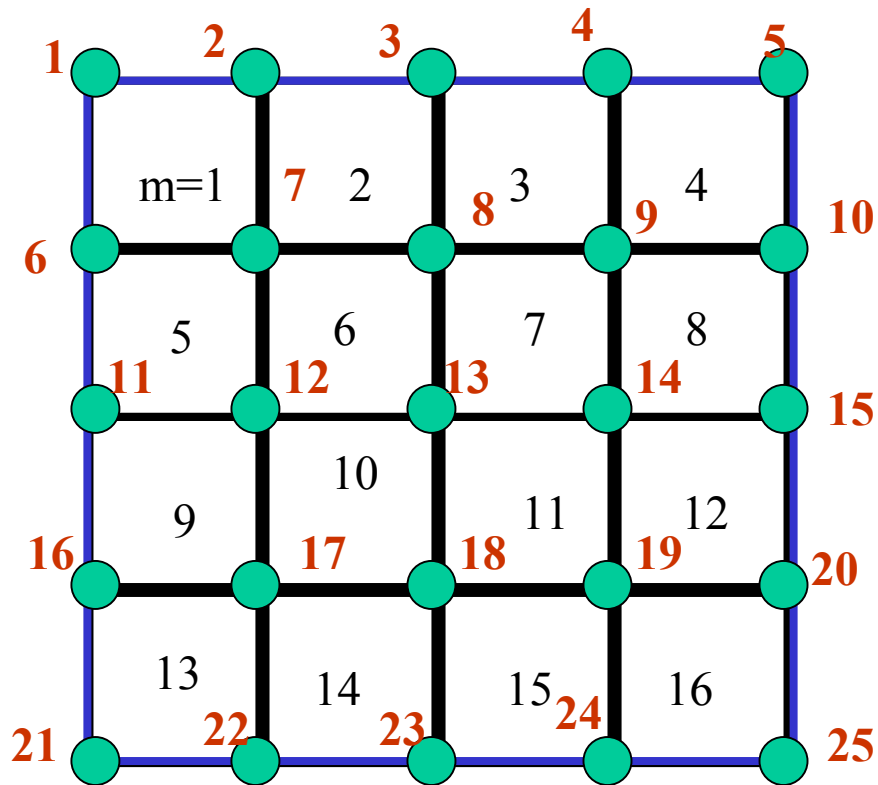
$$i = nr(k, m)$$

$$F(i) = F(i) + P(k, m)$$

Gaussa  $N_2$  punktowa

Gaussa  $N_1$  punktowa

4) jednorodne warunki brzegowe Dirichleta – wpisanie do układu równań

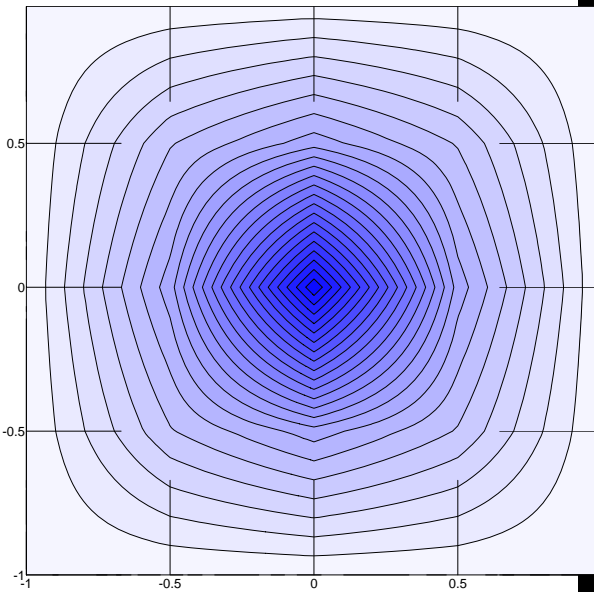


$$Su=F$$

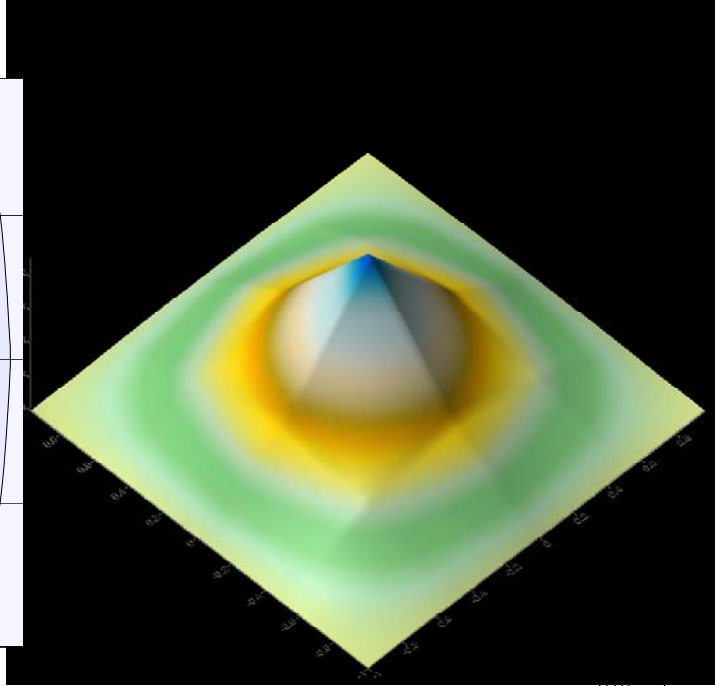
S-macierz 25x25

F-wektor 25

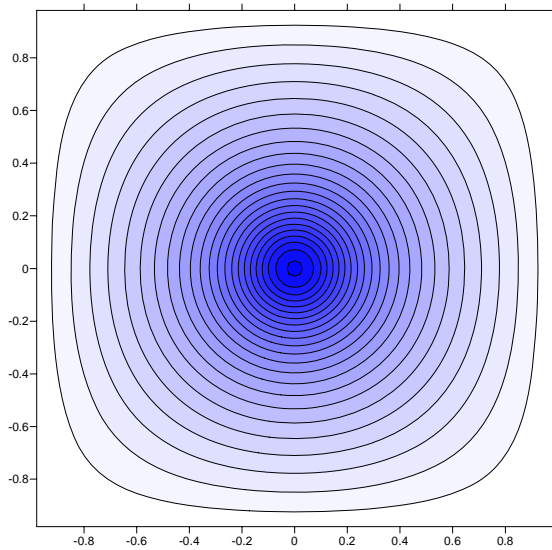
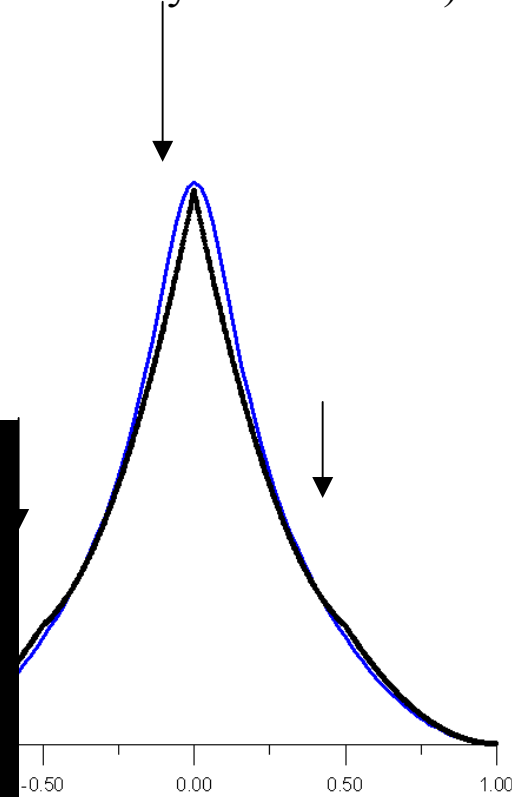
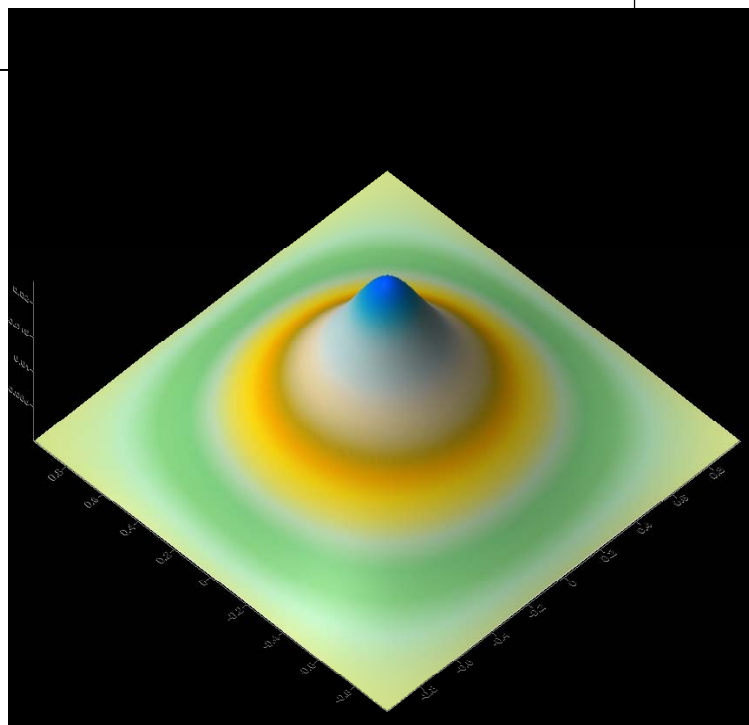
szukamy wierszy macierzy S  
 odpowiadających węzłom brzegowym  
 1-6, 10-11, 15-16, 20-25  
*[wiersze te mają 4/6 i 8/6 na diagonalu,  
 wspólne dla nie więcej niż 2 elementów]*  
 wpisujemy 1 na diagonalu,  
 zero – wpisujemy do macierzy F



MES



wydruk po diagonali  
(**dokładny** i MES  
z biliniowymi f. kształtu)

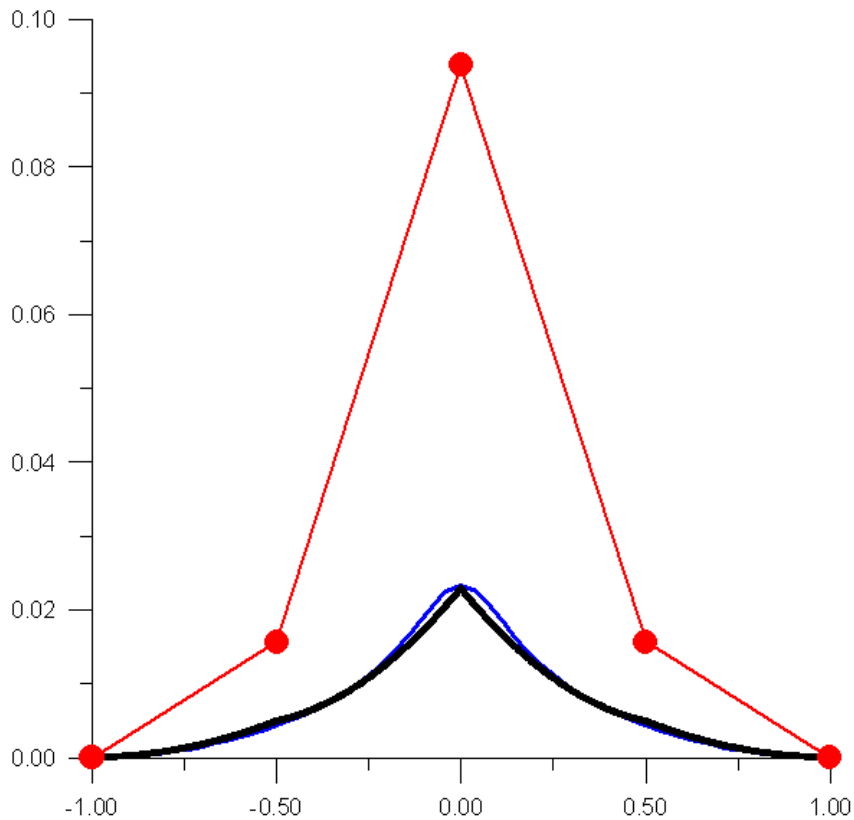


# MES (16 kwadratowych elementów z biliniowymi funkcjami kształtu) a MRS

**Dokładny**

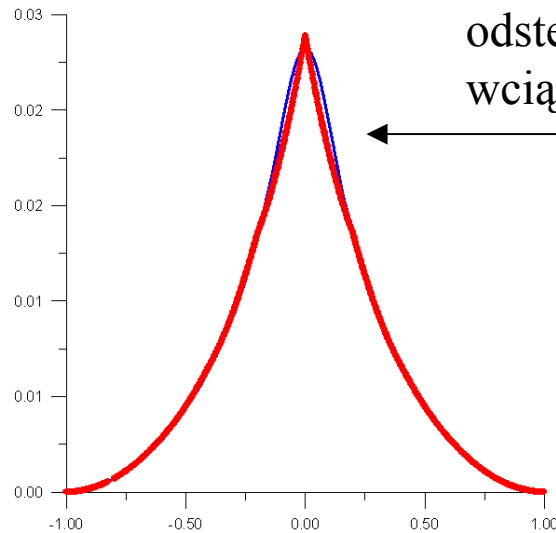
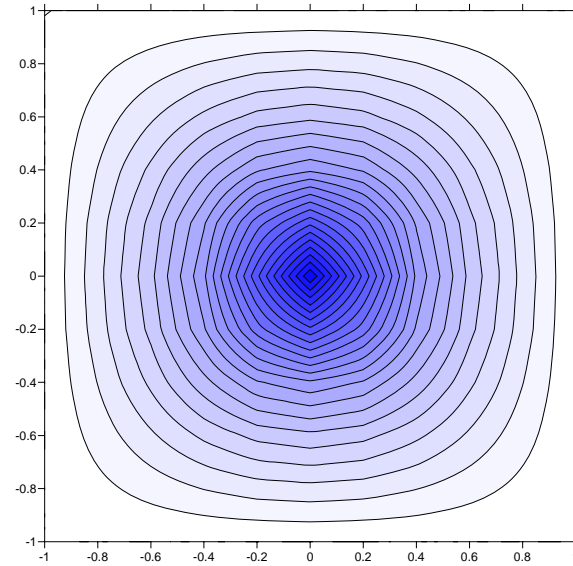
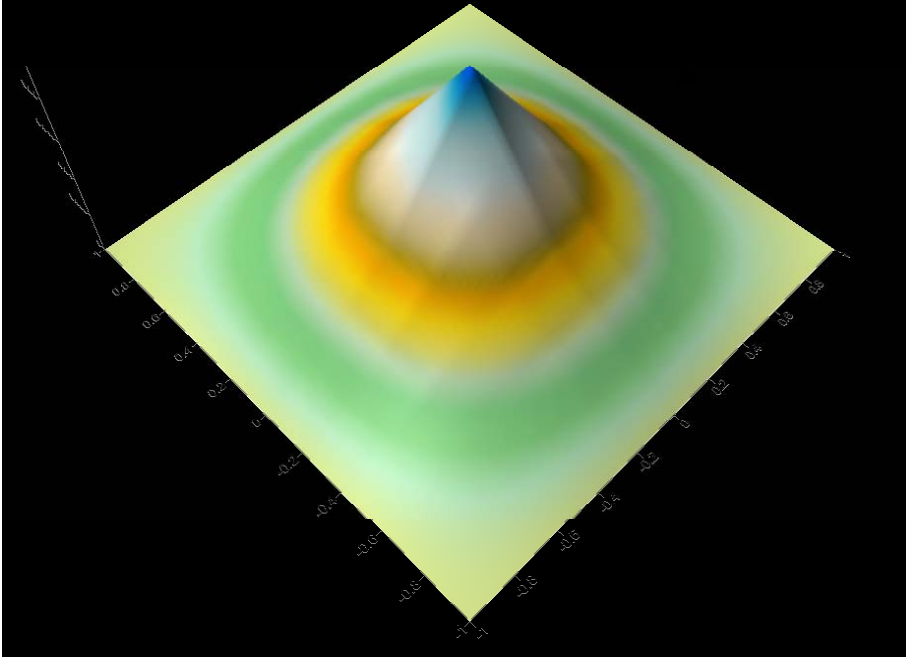
**MES – funkcje biliniowe 25 węzłów**

**MRS – 25 węzłów (dramat)**

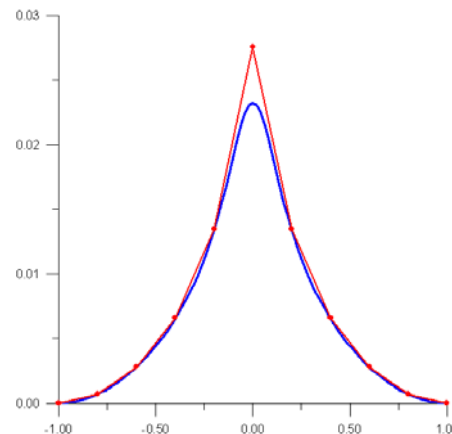
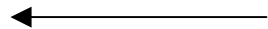


przekrój po diagonalu

al widoczne ścianki



odstępstwa **dokładny**/MES  
wciąż widoczne



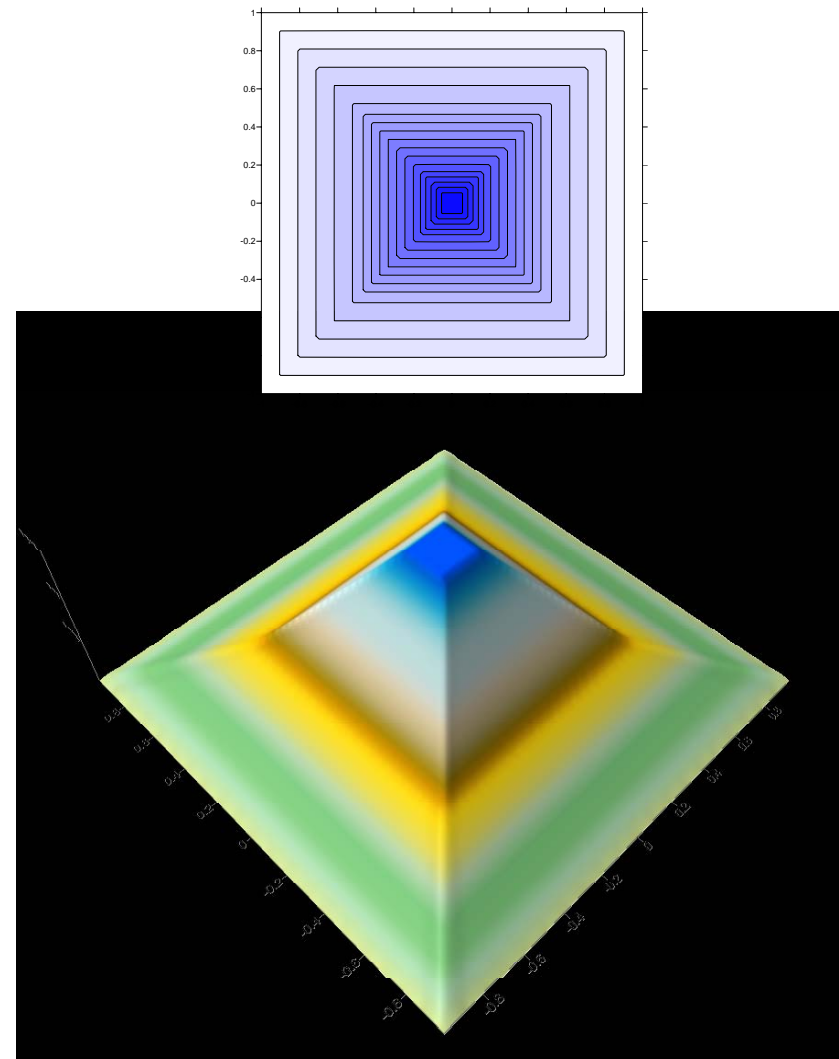
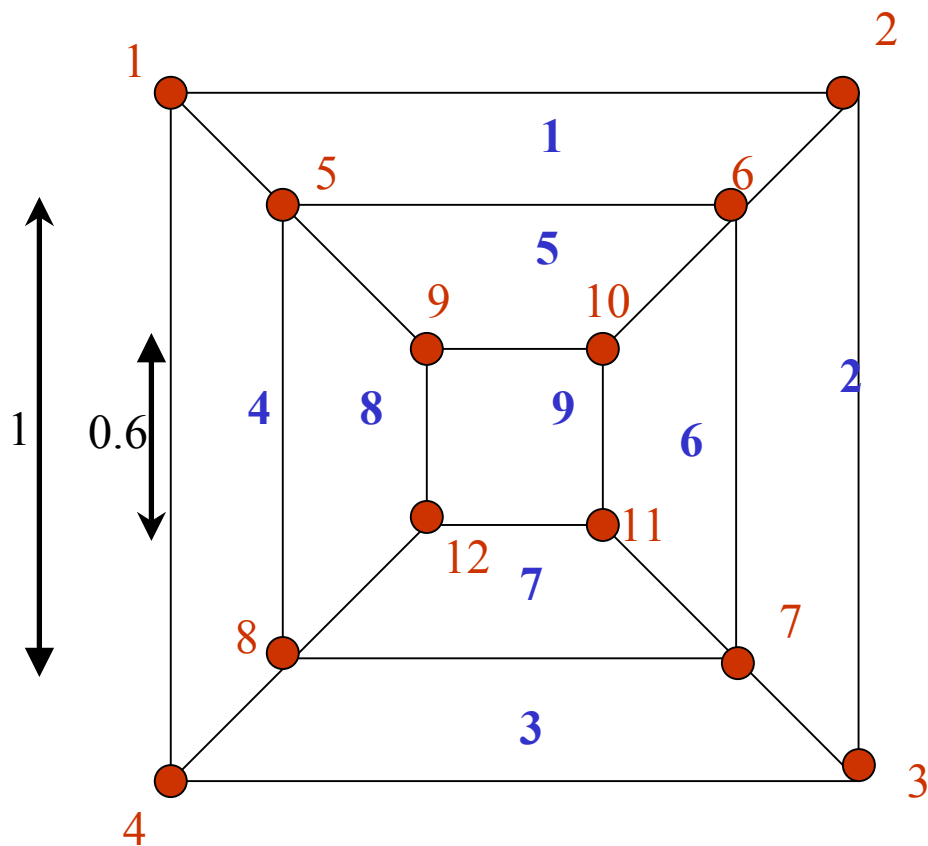
**MRS** przy tej samej liczbie  
węzłów

wyjście: zagęścić  
elementy w środku pudła  
lub zmienić funkcje kształtu  
na ciągłe z pochodną



# podział przestrzeni na nierówne elementy: domek z kart (płaskie ściany)

globalna numeracja węzłów:  
numeracja elementów



z góry wiadomo, że w rezultacie dostaniemy płaskie ściany

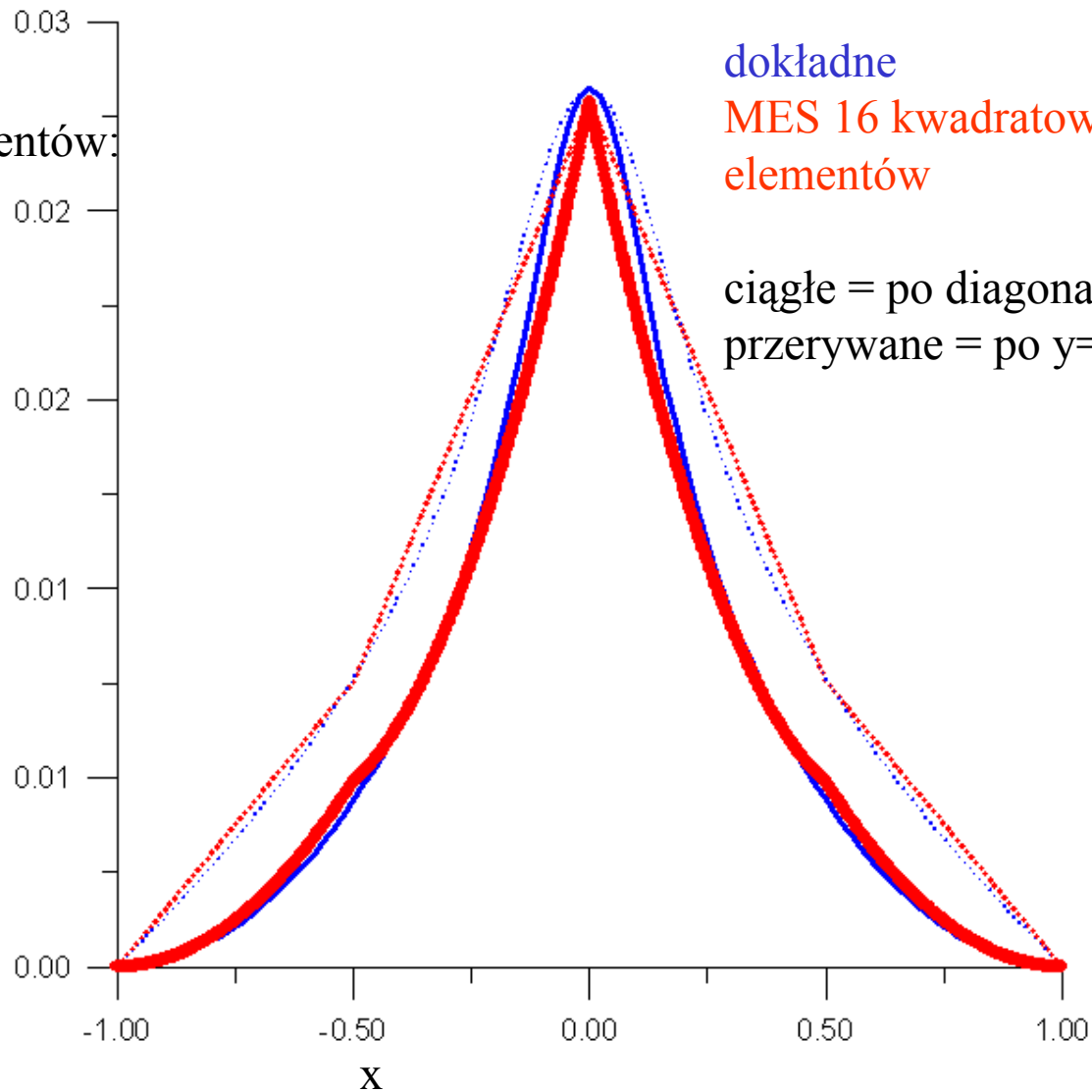
## problem z odwróceniem równania

Dla biliniowych funkcji  
kształtu, w każdym z elementów:

$$\left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = 0 \right|$$

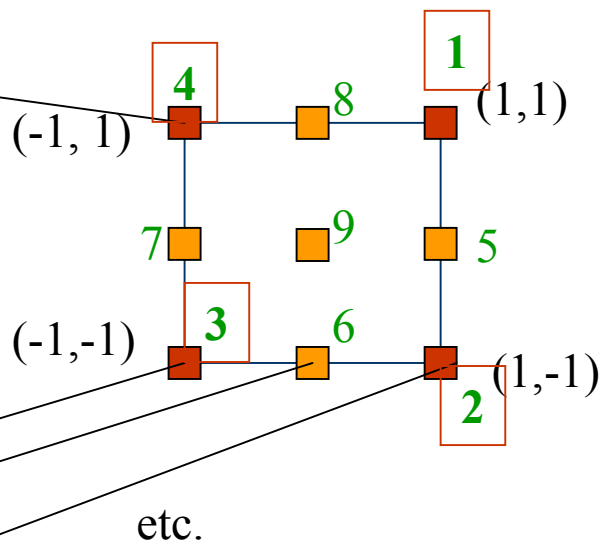
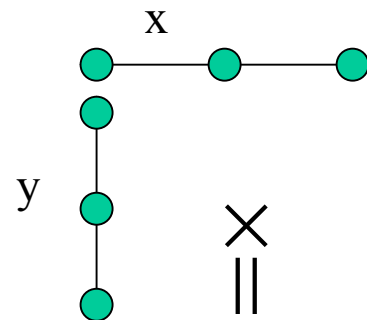
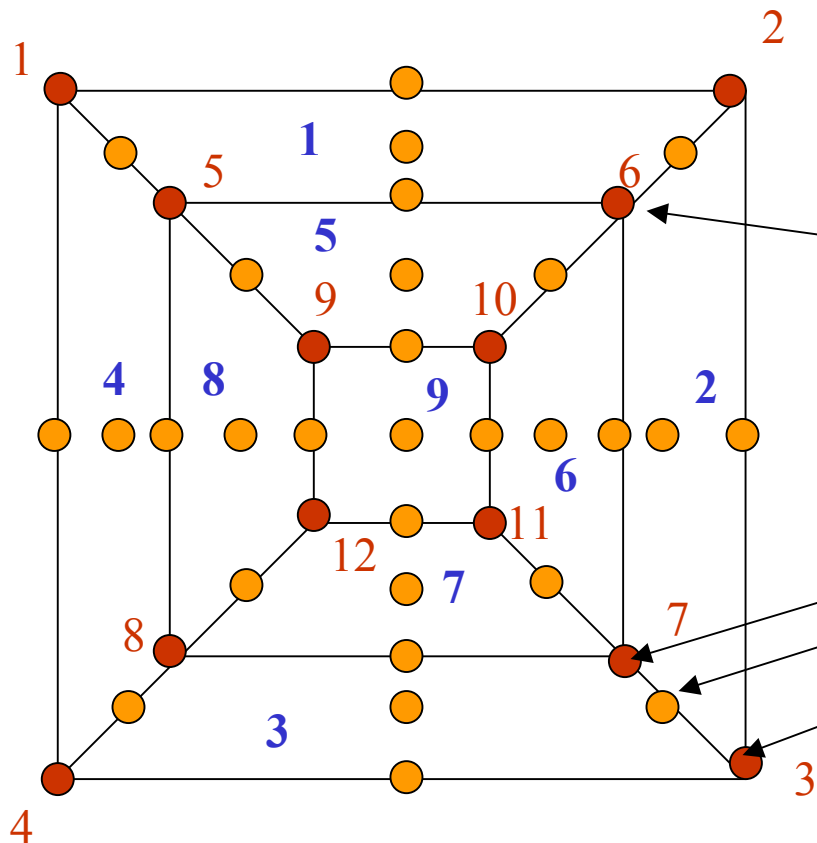
zamiast

$$\left. \nabla^2 u = -\rho(x, y) \right|$$



# Baza bikwadratowa: dodatkowe węzły

globalna numeracja węzłów narożnych`:  
numeracja elementów



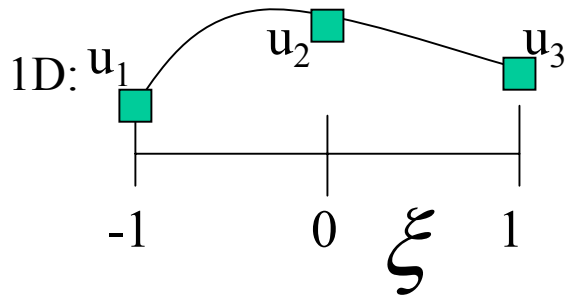
Węzły wierzchołkowe numerujemy jak poprzednio. Mapowanie wtedy bez zmian.

41 węzłów

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

mapowanie wciąż  
używa funkcji  
biliniowych

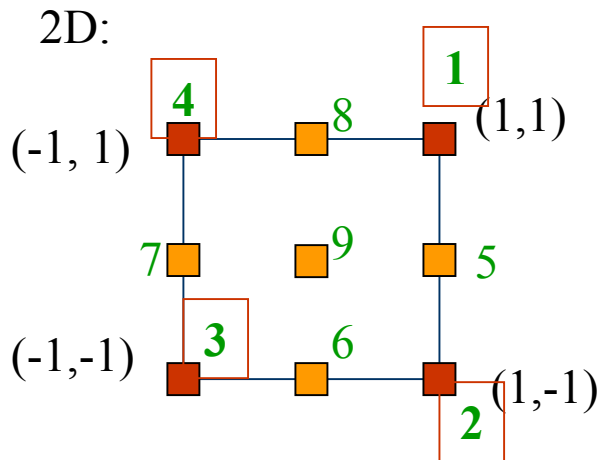
## bikwadratowe funkcje kształtu



$$u(\xi) = u_1 \Phi_1(\xi) + u_2 \Phi_2(\xi) + u_3 \Phi_3(\xi)$$

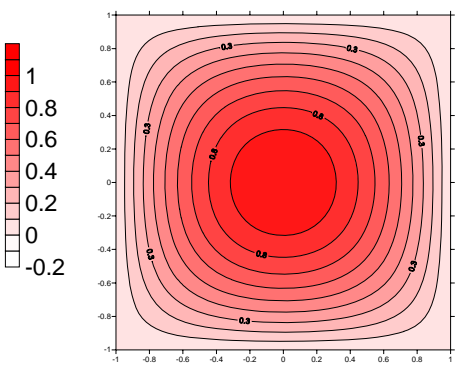
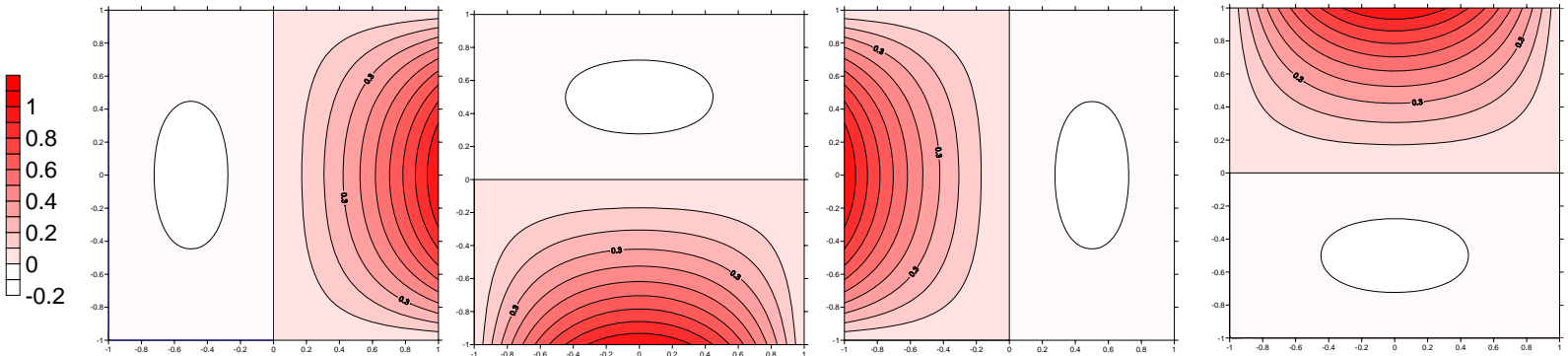
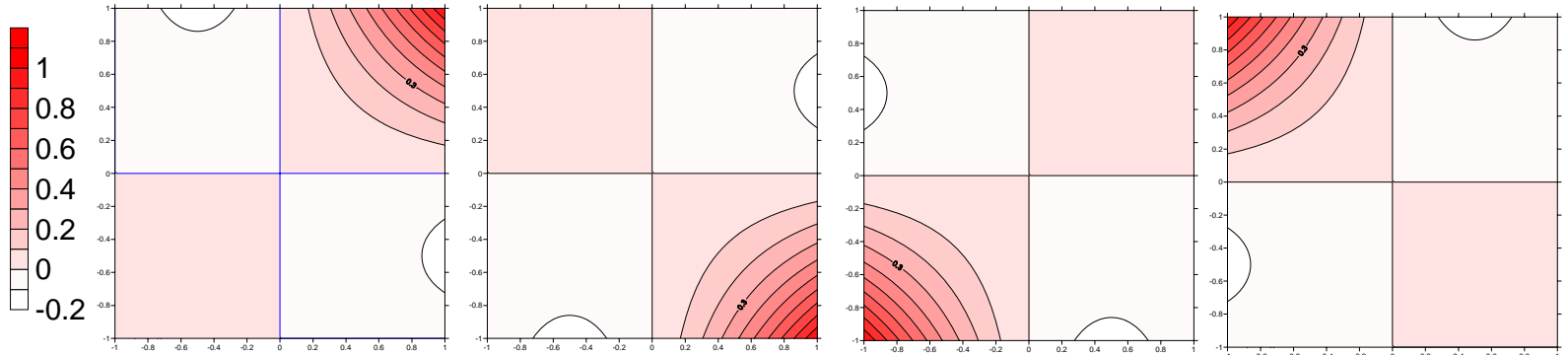
$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \xi(\xi - 1)/2 \\ \Phi_2 &= -(\xi - 1)(\xi + 1) \\ \Phi_3 &= \xi(\xi + 1)/2 \end{aligned}$$

## lista funkcji kształtu



$$\begin{aligned} g_1(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_3(\xi_1)\Phi_3(\xi_2) & g_6(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_2(\xi_1)\Phi_1(\xi_2) \\ g_2(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_3(\xi_1)\Phi_1(\xi_2) & g_7(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_1(\xi_1)\Phi_2(\xi_2) \\ g_3(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_1(\xi_1)\Phi_1(\xi_2) & g_8(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_2(\xi_1)\Phi_3(\xi_2) \\ g_4(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_1(\xi_1)\Phi_3(\xi_2) & g_9(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_2(\xi_1)\Phi_2(\xi_2) \\ g_5(\xi_1, \xi_2) &= \Phi_3(\xi_1)\Phi_2(\xi_2) & & \end{aligned}$$

# Bikwadratowe funkcje kształtu w elemencie odniesienia

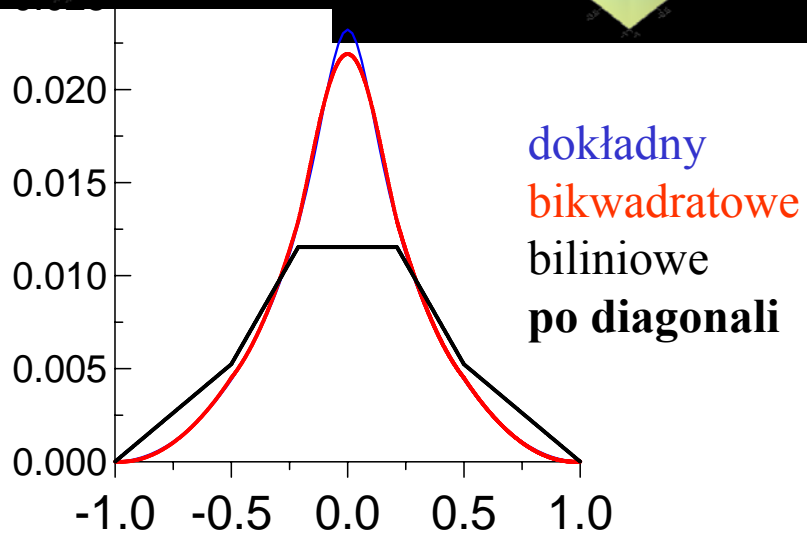
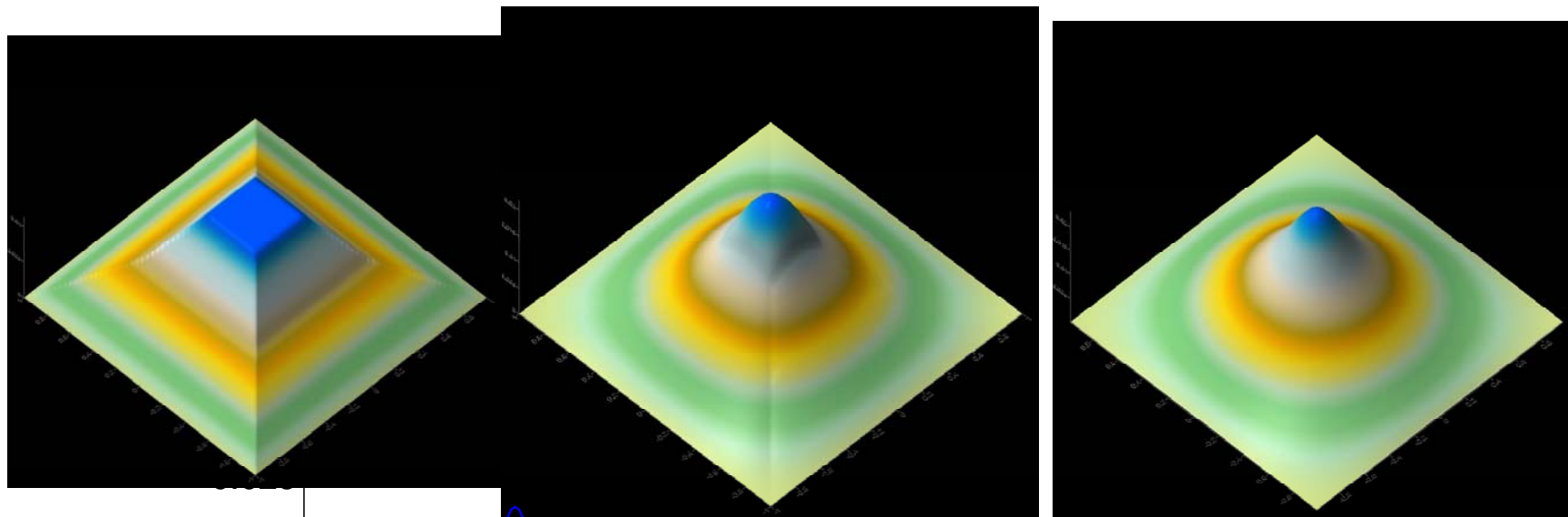
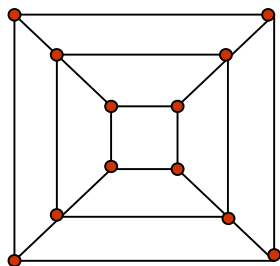


jakobian i transformacje  
pochodnych/całek bez zmian  
(mapowanie bez zmian)

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J^{(m)}(\xi_1, \xi_2) \nabla g_i \cdot \nabla g_j$$

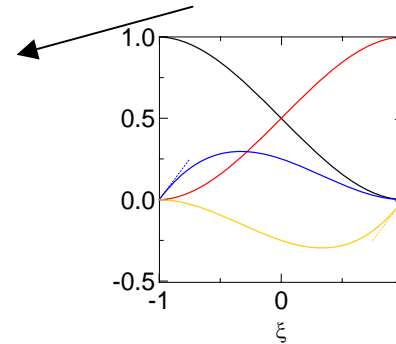
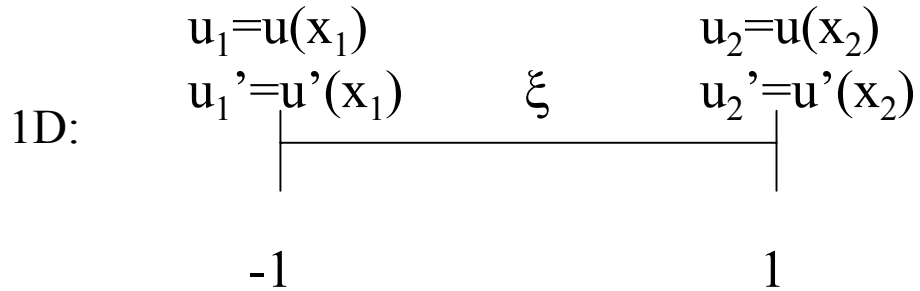
$$\nabla g_i \cdot \nabla g_j = \left( \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) \times \left( \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) + \left( \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right) \times \left( \sum_{k=1}^2 \frac{\partial g_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right)$$

**Wyniki:**



# Rozwiązanie ciągłe z pochodną: (bikubiczne) funkcje Hermita w dwóch wymiarach

2 parametry węzłowe na węzeł



$$\phi_1^0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3$$

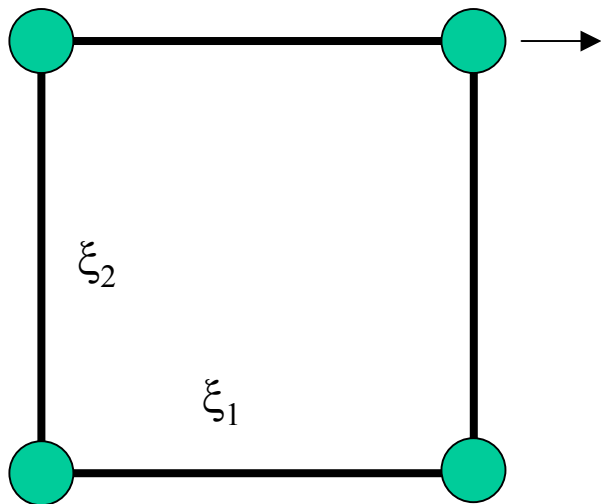
$$\phi_2^0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + u_2^1 \phi_2^1(\xi)$$

$$\phi_1^1 = \frac{J_m}{4} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

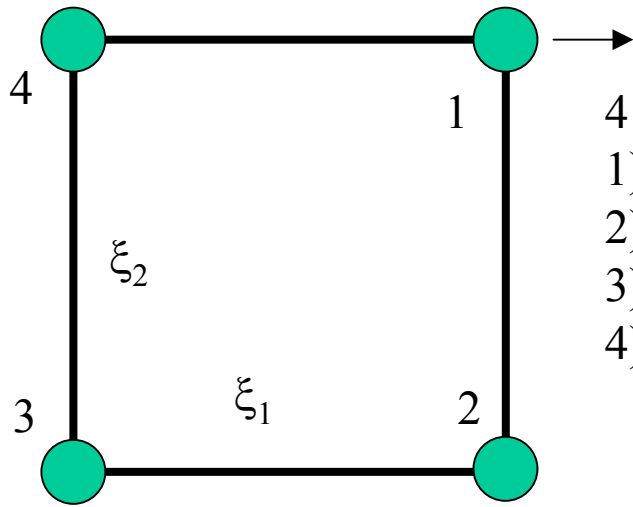
$$\phi_2^1 = \frac{J_m}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

$$J_m = dx/d\xi$$



4 parametry węzłowe na węzeł:

- 1) wartość funkcji
- 2) pierwsza pochodna w kierunku x
- 3) pierwsza pochodna w kierunku y
- 4) druga pochodna mieszana



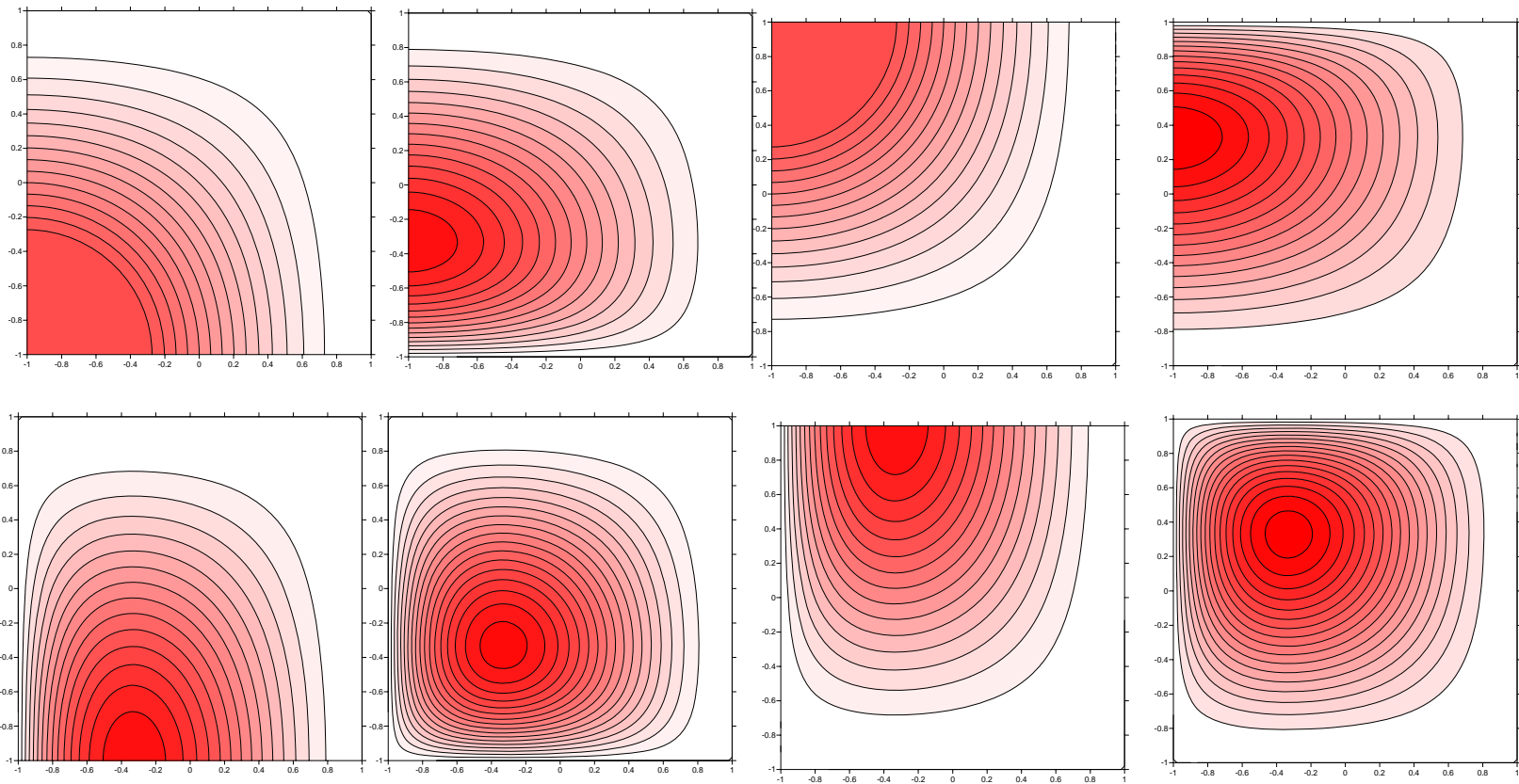
4 parametry węzłowe na węzeł:  $u_1^{00}, u_2^{00}, u_3^{00}, u_4^{00}$  |  
 1) wartość funkcji  $u_1^{10}, u_2^{10}, u_3^{10}, u_4^{10}$   
 2) pierwsza pochodna w kierunku x  $u_1^{01}, u_2^{01}, u_3^{01}, u_4^{01}$  |  
 3) pierwsza pochodna w kierunku y  $u_1^{11}, u_2^{11}, u_3^{11}, u_4^{11}$  |  
 4) druga pochodna mieszana

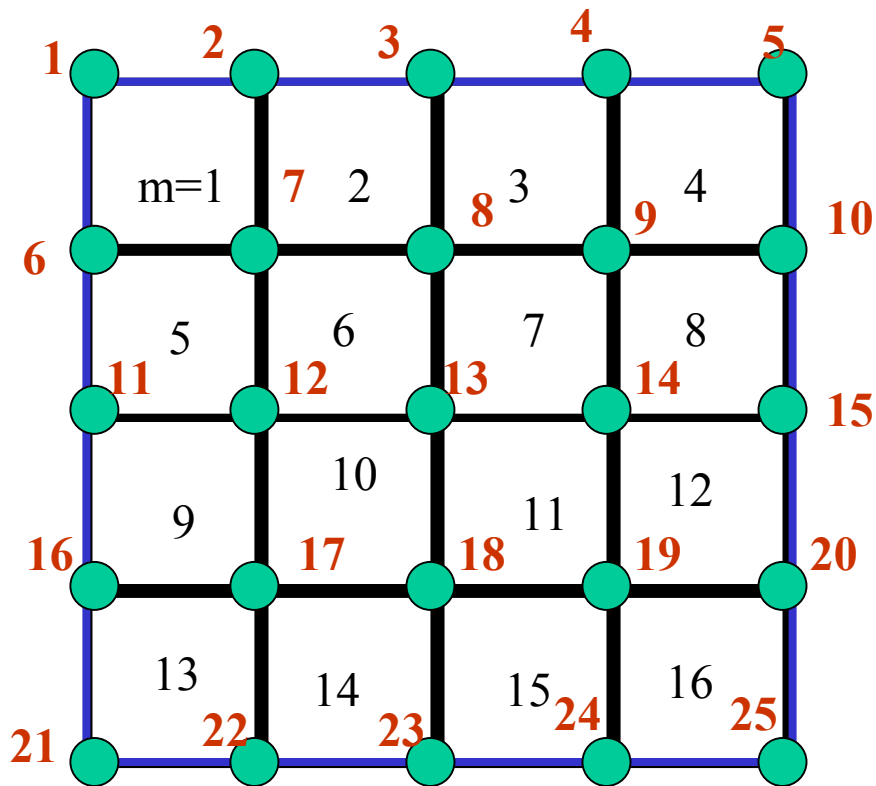
1D:  $u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + u_2^1 \phi_2^1(\xi)$

2D  $u(\xi_1, \xi_2) = u_1^{00} \phi_2^0(\xi_1) \phi_2^0(\xi_2) + u_1^{10} \phi_2^{\frac{1}{2}}(\xi_1) \phi_2^0(\xi_2) \dots$  |

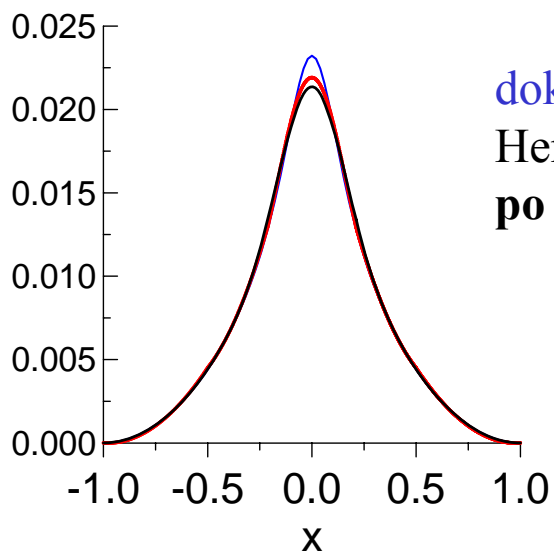
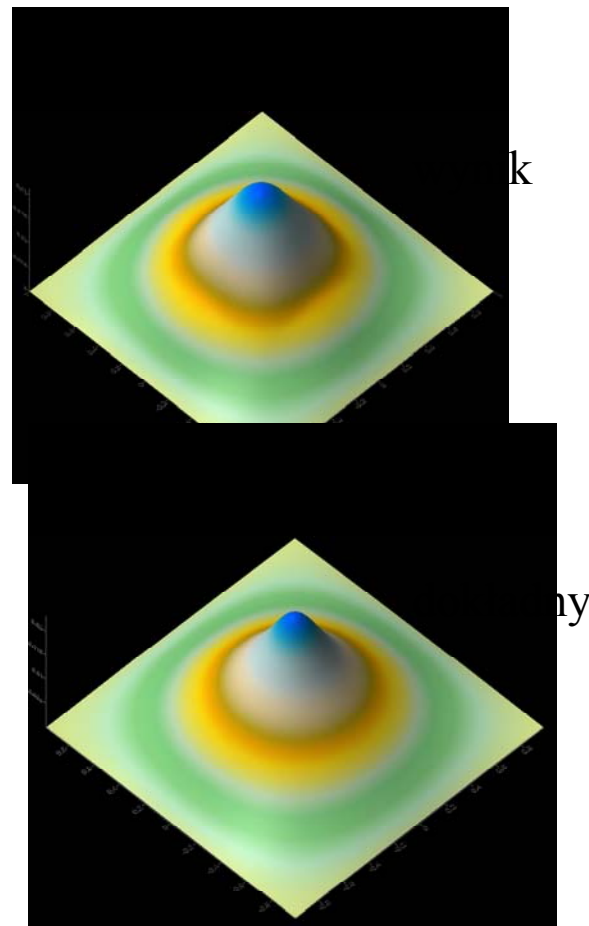


# 8 z szesnastu funkcji Hermite'a



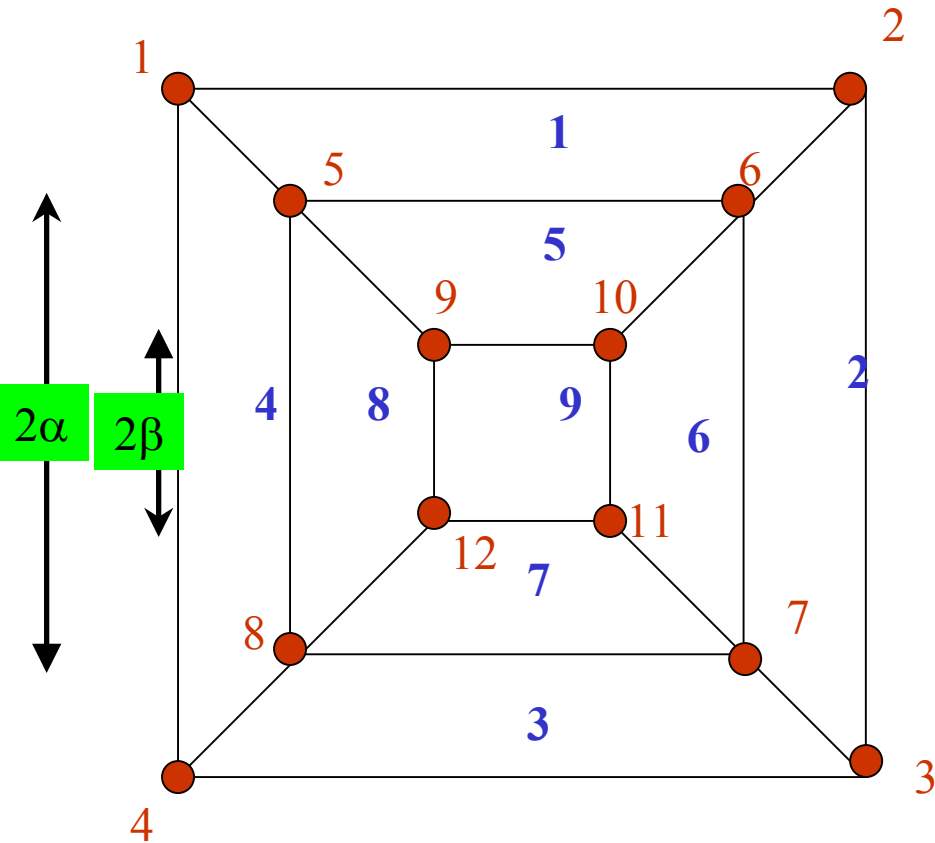


25 węzłów, 100 parametrów węzłowych



dokładny  
Hermite'a - 100 p.w.  
po diagonalu

# Optymalizacja kształtu elementów: przykład dla bazy bikwadratowej



jak dobrać optymalne rozmiary  $\alpha/\beta$ ?

metoda elementów skończonych,  
jak każda Galerkińska, ma charakter  
wariacyjny

$$\nabla^2 u = -\rho(x, y)$$

$$a = \int \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho(x, y)u(x, y) \right] dx dy$$

warunek na optymalne  $\alpha/\beta$ :  $a = \min$

$$a = \int \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho(x, y)u(x, y) \right] dx dy$$

$$a = \sum_m \int_{\Omega_m} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho(x, y)u(x, y) \right] dx dy$$

w elemencie m:

$$u(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) = \sum_k c_k^m \phi_k(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2))$$

$$\int_{\Omega_m} \square = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J_m \{$$

$$\frac{1}{2} \left( \sum_k \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_k \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \right)^2$$

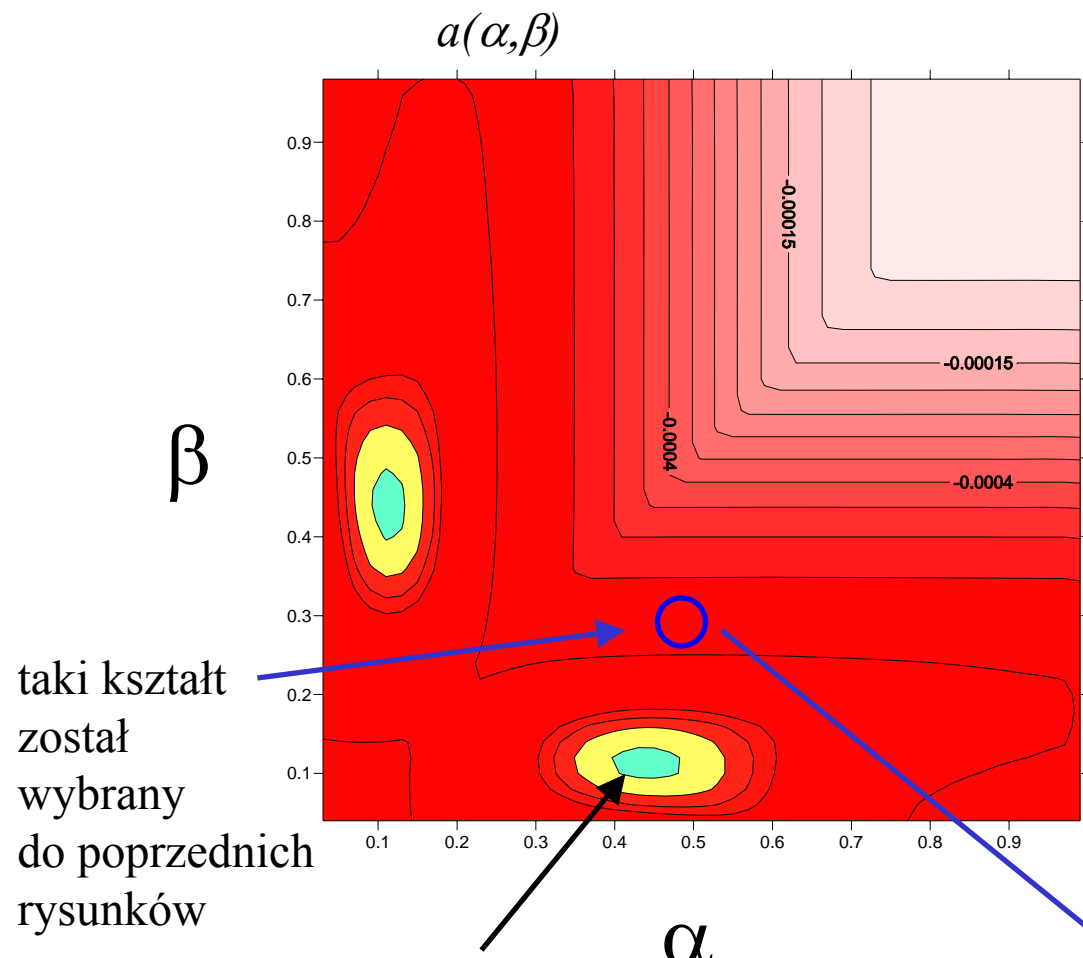
$$- \rho(x(\xi_1, \xi_2), y(\xi_1, \xi_2)) \sum_k c_k \phi_k \}$$

przy czym zależność x i y  
od xi zależy od m

**Sc=F**

$$a = \frac{1}{2} \sum_{k,l} c_k c_l S_{kl} - \sum_k c_k F_k$$

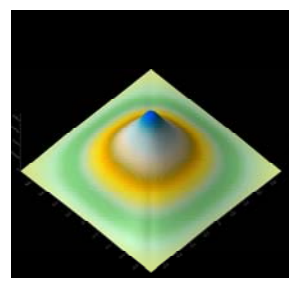
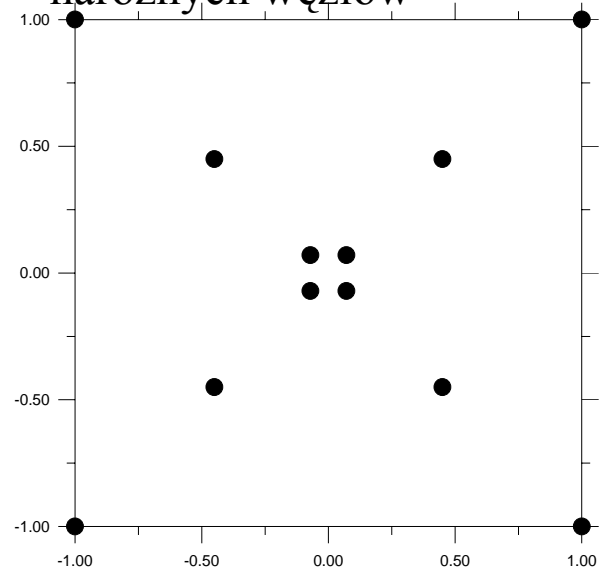
# Optymalizacja kształtu elementów: wyniki dla bazy bikwadratowej



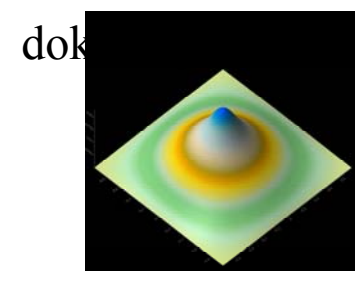
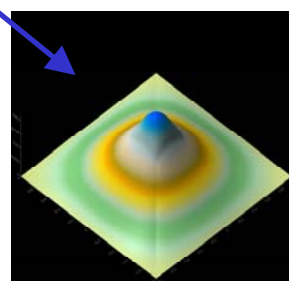
taki kształt  
został  
wybrany  
do poprzednich  
rysunków

$S = -6.15e-4$   
dokładne minimum funkcjonału  
 $-6.274e-4$

## Optymalne położenie narożnych węzłów



zoptymalizowany



dok

## Metoda elementów skończonych dla dwuwymiarowego równania własnego

$$H\Psi_n = E_n\Psi_n \quad |$$

podejmiemy dla problemu, w którym znane jest rozwiązanie analityczne

$$H = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad | \quad \text{2D oscylator harmoniczny}$$

separacja zmiennych

$$H = H_x + H_y \quad \Psi_n(x, y) = \psi_i(x)\psi_j(y)$$

$$\frac{H_x\psi_i(x)}{\psi_x(x)} + \frac{H_y\psi_j(y)}{\psi_j(y)} = E_n \quad |$$

1D oscylator:  $E_i = 1/2 + i$

$$\psi_i(x) = \exp(-x^2/2)h_i(x) \quad |$$

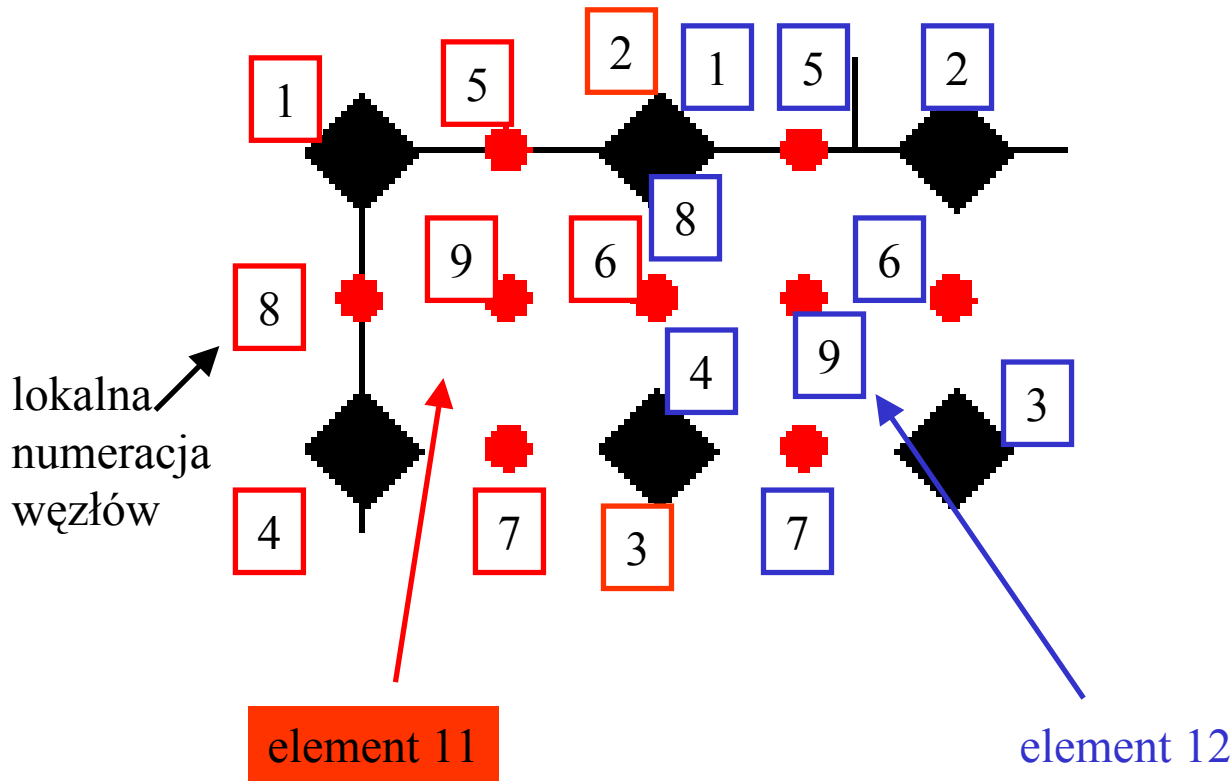
$$h_i(x) = \exp(x^2) \frac{d^i}{dx^i} \exp(-x^2) \quad |$$

$$E_n = E_i + E_j$$

bikwadratowe funkcje kształtu:

$$\Psi(x, y) = \sum_m \sum_n c_n^m \phi_n^m(x, y)$$

↑ po elementach      ↑ po węzłach w ramach jednego elementu



ciągłość:

$$c_2^{11} = c_1^{12}$$

$$c_6^{11} = c_8^{12}$$

$$c_3^{11} = c_{12}^{12}$$

↑  
zapewnimy ją globalną numeracją węzłów i odpowiednią konstrukcją macierzy

Rachunki dla siatki elementów 10 na 10,  
bikwadratowe funkcje kształtu

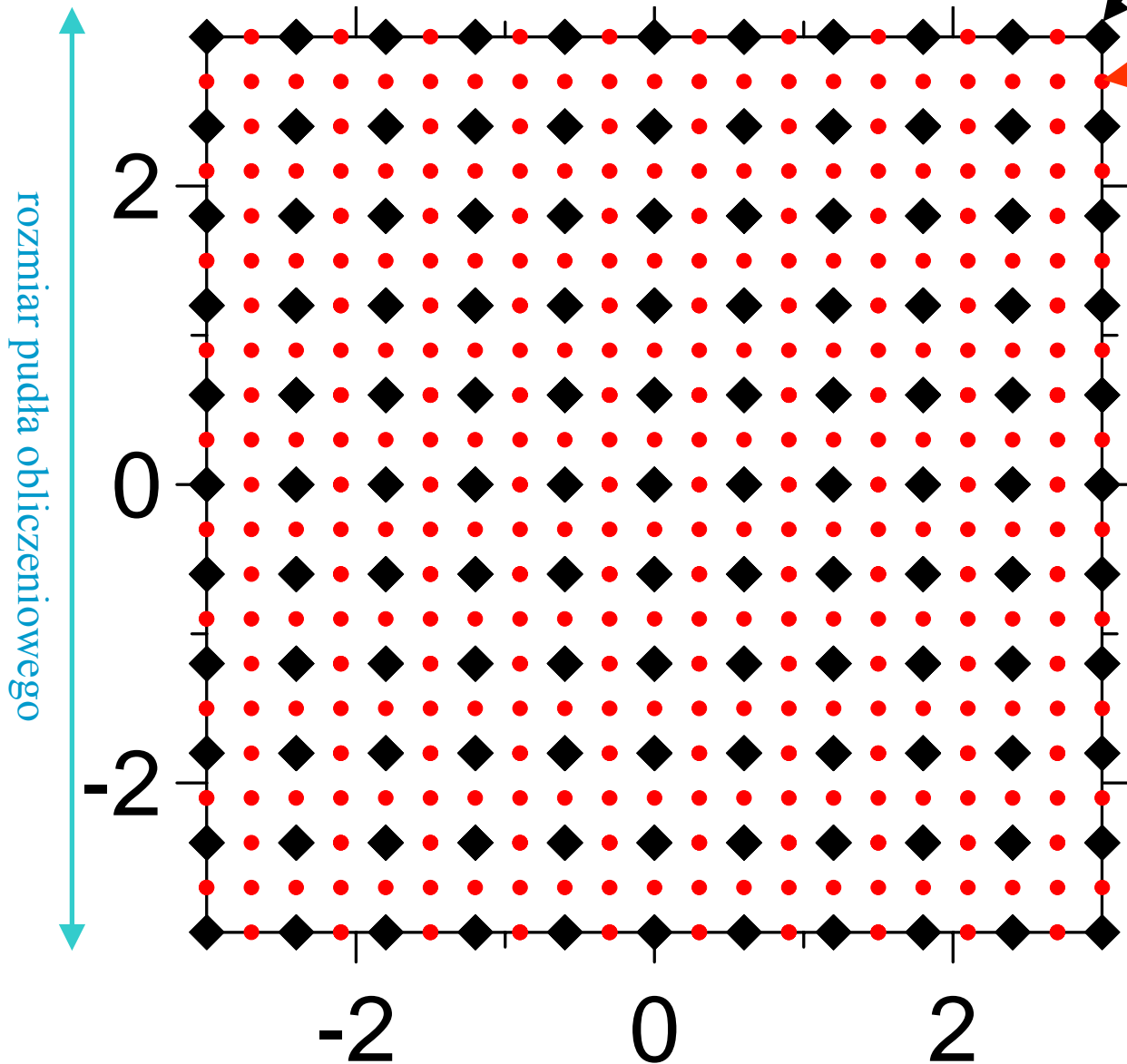
wierzchołki=  
granice elementów

pozostałe  
wierzchołki

elementy kwadratowe,  
identycznego kształtu

warunek brzegowy:  
znikanie wektorów  
własnych

rozmiar pudła  
obliczeniowego=  
parametr wariacyjny

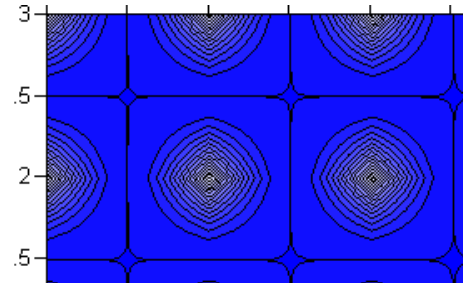




$$\Psi_m(x, y) = \sum_m \sum_n c_n^m \phi_n^m(x, y)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_i c_i \phi_i(x, y) \leftarrow \begin{array}{l} \text{przenumerowanie} \\ \text{jest tyle funkcji ile węzłów} \\ \text{globalnych} \end{array}$$

narysowane  
tylko funkcje narożne  
jedna  $\phi_i$  składa się z  
w istocie z czterech  $\phi_n^m$



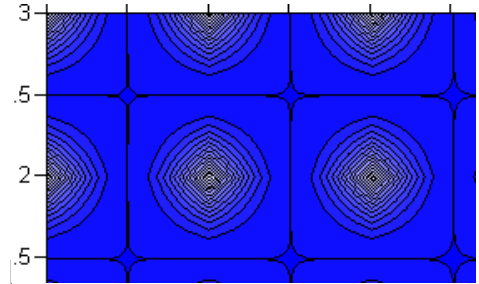
$$\mathbf{Hc} = \mathbf{ESc}$$

uogólnione równanie własne do rozwiązania

macierz Hamiltonianu  
(odpowiednik macierzy sztywności)

macierz przekrywania  
[E $\mathbf{S}\mathbf{c}$  – odpowiednik wektora obciążeń]

# $Hc=ESc$

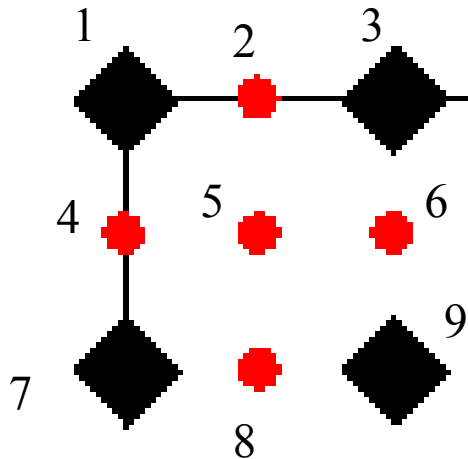


$$H_{ij} = (\phi_i, H\phi_j) = (\phi_i, \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right)}_{T_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} (x^2 + y^2)}_{V_{ij}}) \phi_j$$

$$S_{ij} = (\phi_i, \phi_j)$$

Lokalne macierze sztywności (Hamiltonianu) + lokalne macierze przekrywania

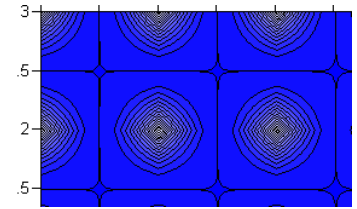
lokalna macierz energii kinetycznej



$$T_{ij}^m = \frac{1}{2} \int_{S_m} \nabla \phi_i(x, y) \cdot \nabla \phi_j(x, y) dx dy$$

kwadratowe, identyczne elementy  
identyczne macierze, niezależne od elementu

Macierz potencjału:



$$V_{ij}^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J_m \phi_i(\xi_1, \xi_2) \phi_j(\xi_1, \xi_2) (x(\xi_1, \xi_2)^2 + y(\xi_1, \xi_2)^2)$$



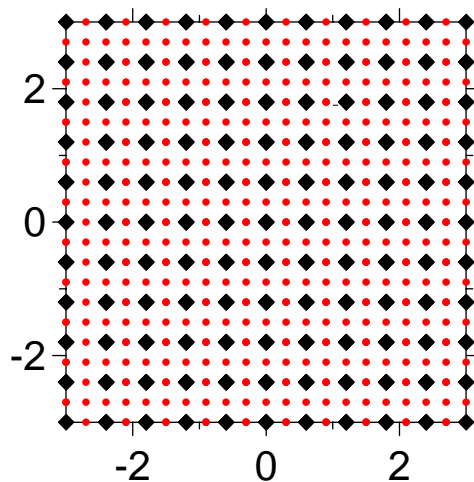
zależy od elementu,  
bo mapowania  $x/y(\xi_1, \xi_2)$   
od  $m$  zależą

$$S_{ij}^m = \int_{-1}^1 d\xi_1 \int_{-1}^1 d\xi_2 J_m \phi_i(\xi_1, \xi_2) \phi_j(\xi_1, \xi_2)$$



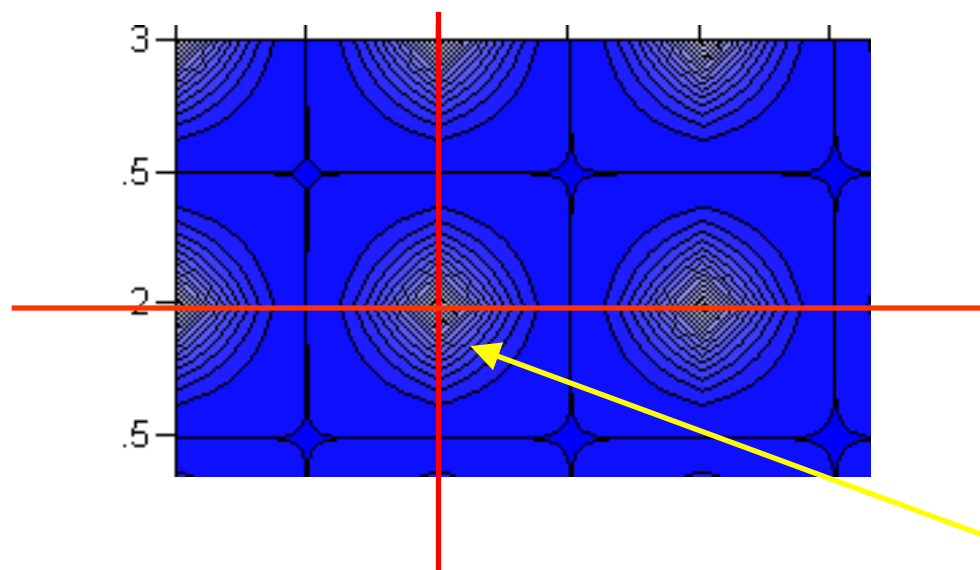
od elementu już nie zależy

Składanie macierzy:



wszystkie  $21^2$  węzłów ponumerowane  
w sposób jednoznaczny  
dodatkowo

$lg(i,m)$  = numer globalny węzła  $i$  w elemencie  $m$



do 1  $m=1,100$

do 2  $i=1,9$

do 2  $j=1,9$

$H(lg(i,m),lg(j,m)) += H(i,j,m)$

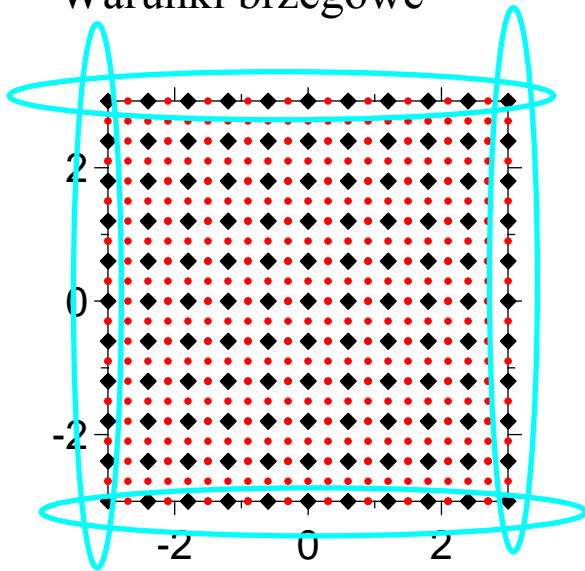
$S(lg(i,m),lg(j,m)) += S(i,j,m)$

2 continue

1 continue

np. dla tego węzła zsumujemy  
przyczynki od funkcji w 4 różnych  
elementach

## Warunki brzegowe

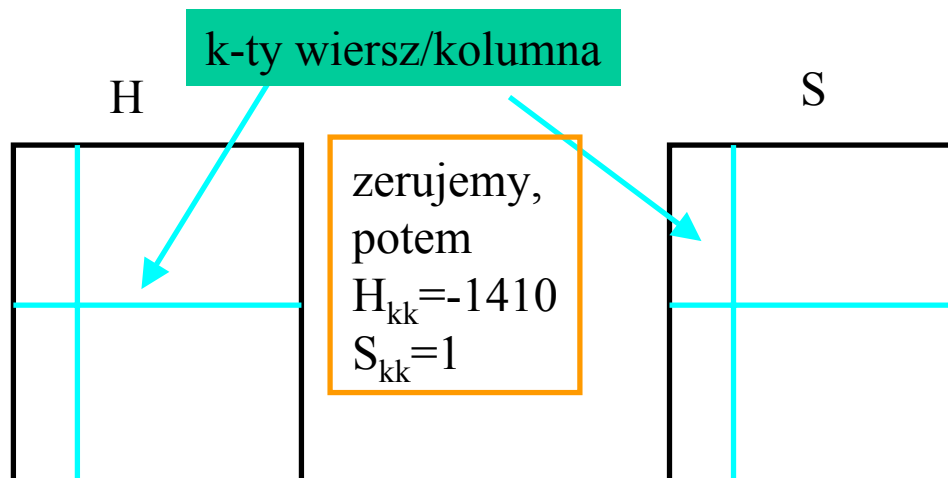


chcemy, żeby funkcje własne zniknęły na brzegu  
jak?

wyrzucić wszystkie funkcje kształtu z bazy  
z brzegu [pozostałe funkcje kształtu = 0 na węzłach  
brzegowych]

albo

**(wersja dla leniwych)**

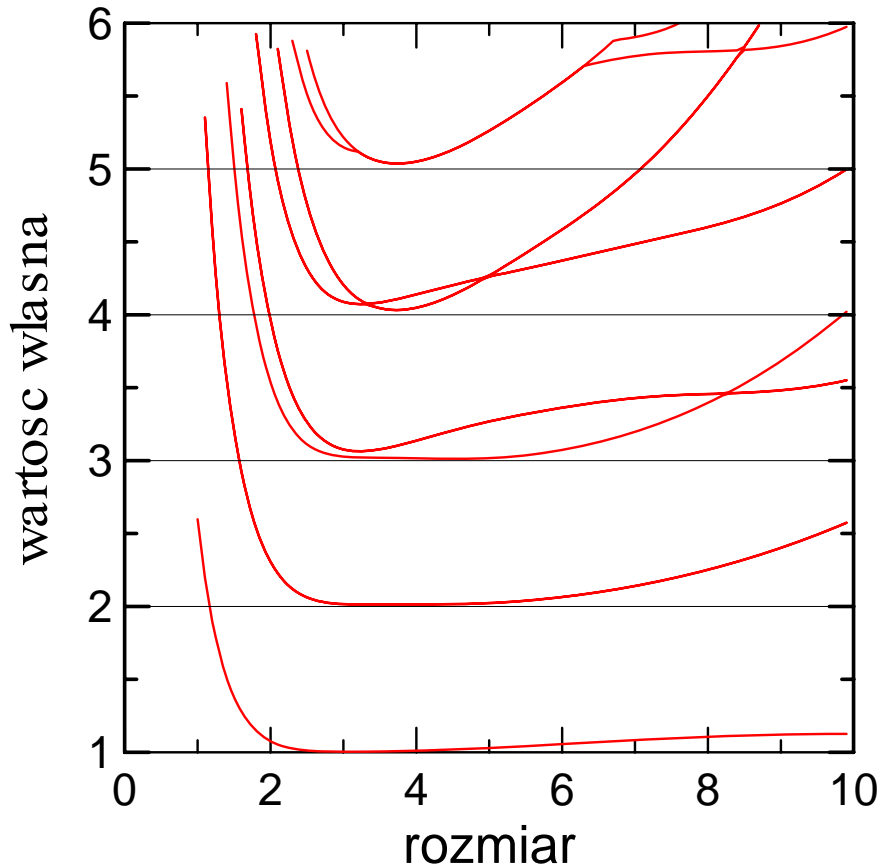


Zerowanie: odsprzęgnię  
węzły brzegowe od całej  
reszty.

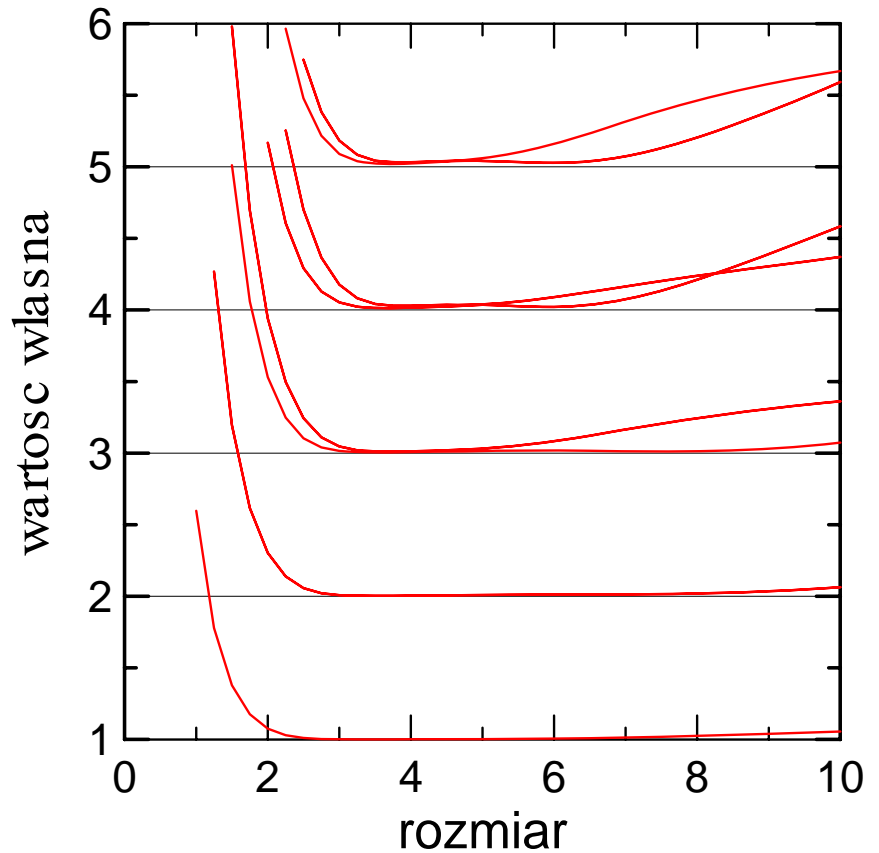
dostaniemy wartość własną  $-1410$   
zdegenerowaną tylu krotnie ile  
jest węzłów brzegowych

również: można po prostu skreślić  
te kolumny/wiersze z macierzy

6 na 6 elementów



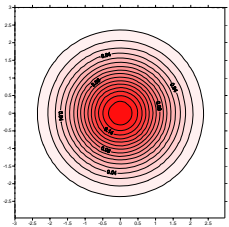
10 na 10 elementów



bikwadratowe funkcje kształtu, 9 na element.  
elementy identyczne, kwadratowe

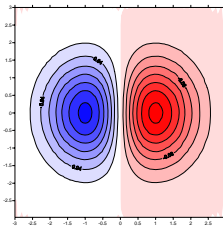
pułdo obliczeniowe 3 na 3, 10 na 10 elementów:

$\lambda=1.0011$

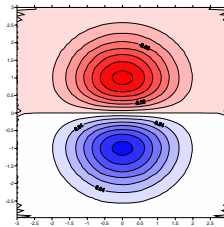


$(i,j)=(0,0)$

$\lambda=2.0077$

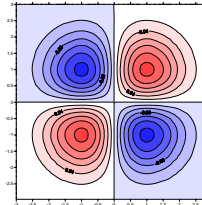


$(1,0)$



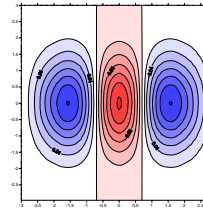
$(0,1)$

$\lambda=3.014$

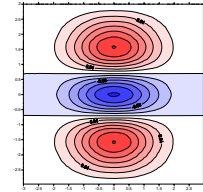


$(1,1)$

$\lambda=3.0459$



$(2,0)$

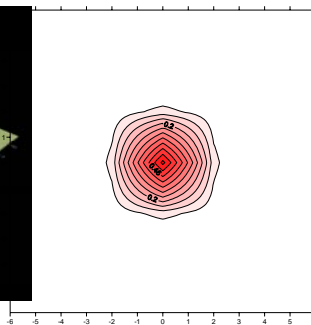
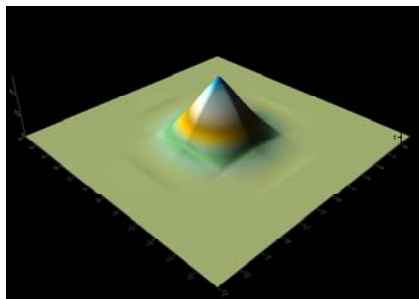


$(0,2)$

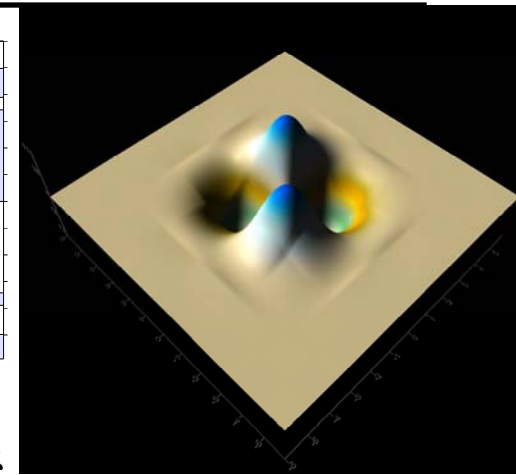
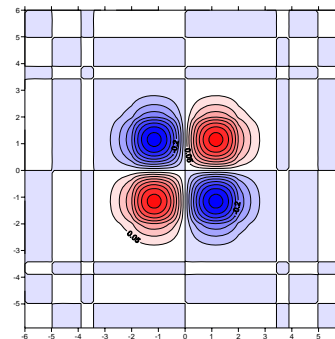
$$E_n = E_i + E_j = i + j + 1$$

$$\Psi_n(x, y) = \psi_i(x)\psi_j(y)$$

gdy 6 na 6 elementów i pułdo za duże



$(0,0)$



granice elementów widać,  
gdy elementy **źle** dobrane

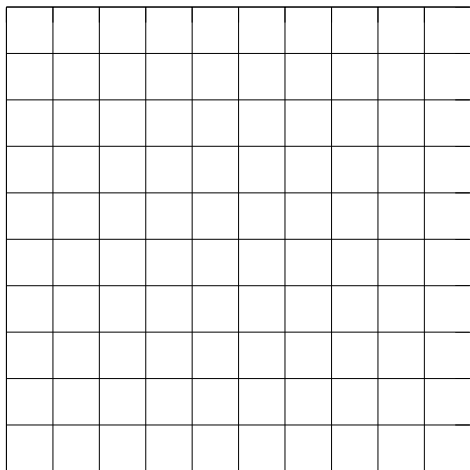
czy warto się trudzić,  
czyli, czy FEM skuteczna w porównaniu z FDM?

$$H\Psi_n = E_n\Psi_n \quad |$$

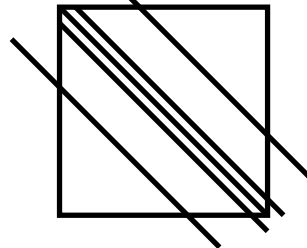
$$H = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \quad |$$

---

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{\Psi_n(x+dx, y) + \Psi_n(x-dx, y) - 2\Psi_n(x, y)}{dx^2} + \frac{\Psi_n(x, y+dy) + \Psi_n(x, y-dy) - 2\Psi_n(x, y)}{dy^2} \right) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \Psi_n(x, y) = E_n \Psi_n(x, y)$$

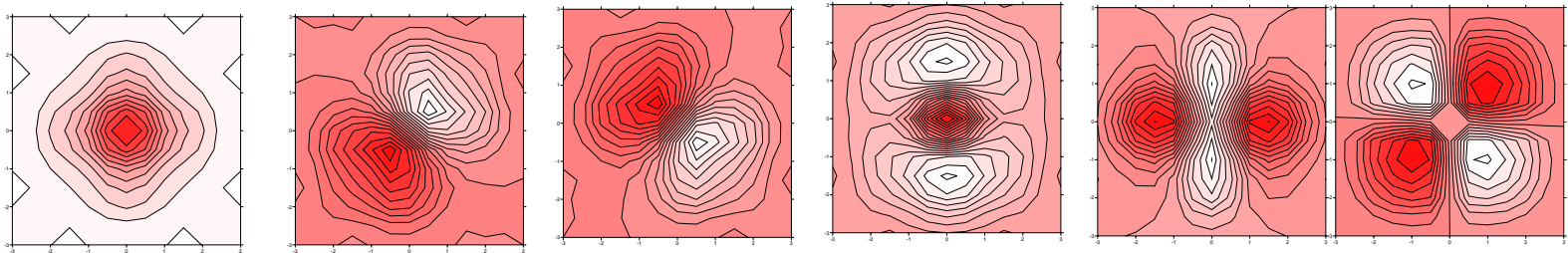


ponumerować węzły,  
(np. tak jak w równaniu przewodnictwa cieplnego),  
równanie różnicowe zapisać w postaci równania własnego  
macierzy o strukturze:





Dla porównania metod: MES i MRS liczba węzłów identyczna: 13 na 13, pudło 3 na 3



MRS widmo	MRS błąd	MES widmo	MES błąd
0.976	-0.024	1.003	0.003
1.929	-0.071	2.015	0.015
1.929	-0.071	2.015	0.015
2.833	-0.167	3.026	0.026
2.882	-0.118	3.075	0.075
2.883	-0.117	3.075	0.075

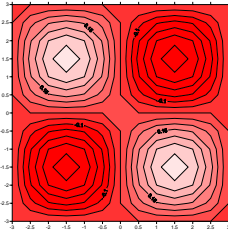
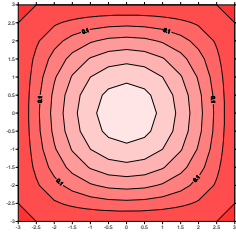
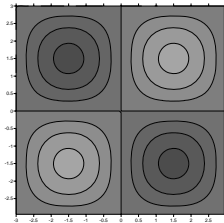
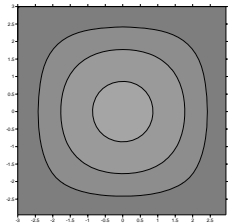
wartości własne MRS lepsze niż wektory, ale to przypadkiem



Jeszcze jedno porównanie

$V=0$  [stany pudła obliczeniowego]

$$E_{mn} = E_0 (m^2 + n^2) \text{ dla } m, n > 0$$



dokładne

2

5

8

MES/ $E_0$

2.0002

5.0064

8.012

MRS/ $E_0$

1.988

4.903

7.81

(60 razy większy błąd)

15 razy

16 razy