

Problemy zależne od czasu w metodzie elementów skończonych

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow \text{np. równanie adwekcji}$$

$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi_j(x) \longleftarrow \begin{array}{l} \text{cała zależność czasowa} \\ \text{włożona do współczynników} \\ \text{rozwinienia w bazie funkcyjnej} \end{array}$$

$u_j(t)$ – wartość rozwiązania w węźle j w chwili t

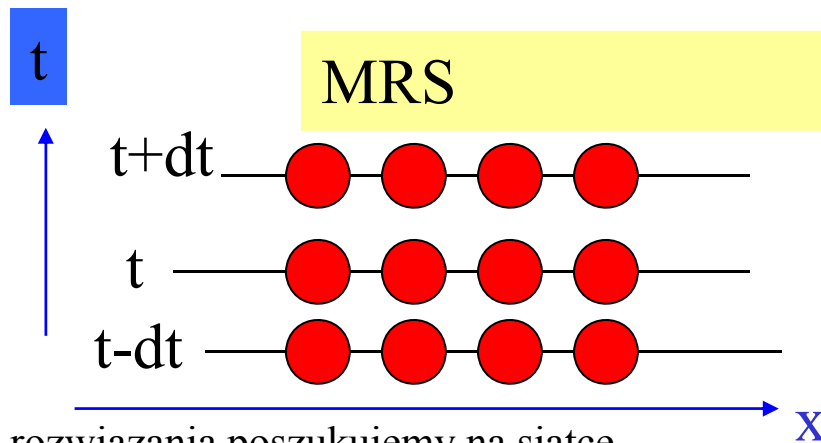
Problemy zależne od czasu w metodzie elementów skończonych

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \text{np. równanie adwekcji}$$

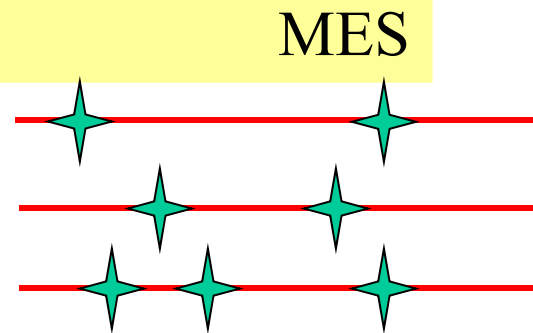
$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi_j(x) \leftarrow \begin{array}{l} \text{cała zależność czasowa} \\ \text{włożona do współczynników} \\ \text{rozwinęcia w bazie funkcyjnej} \end{array}$$

$u_j(t)$ – wartość rozwiązania w węzle j w chwili t

interesuje nas rozwiązanie w *dyskretnych* chwilach czasowych
opis zmiennej położeniowej natomiast: ciągły



rozwiązania poszukujemy na siatce punktów dyskretnych w czasie i przestrzeni



rozwiązanie: dyskretne w t , ciągłe w x
węzły funkcji kształtu mogą się przesuwac w t

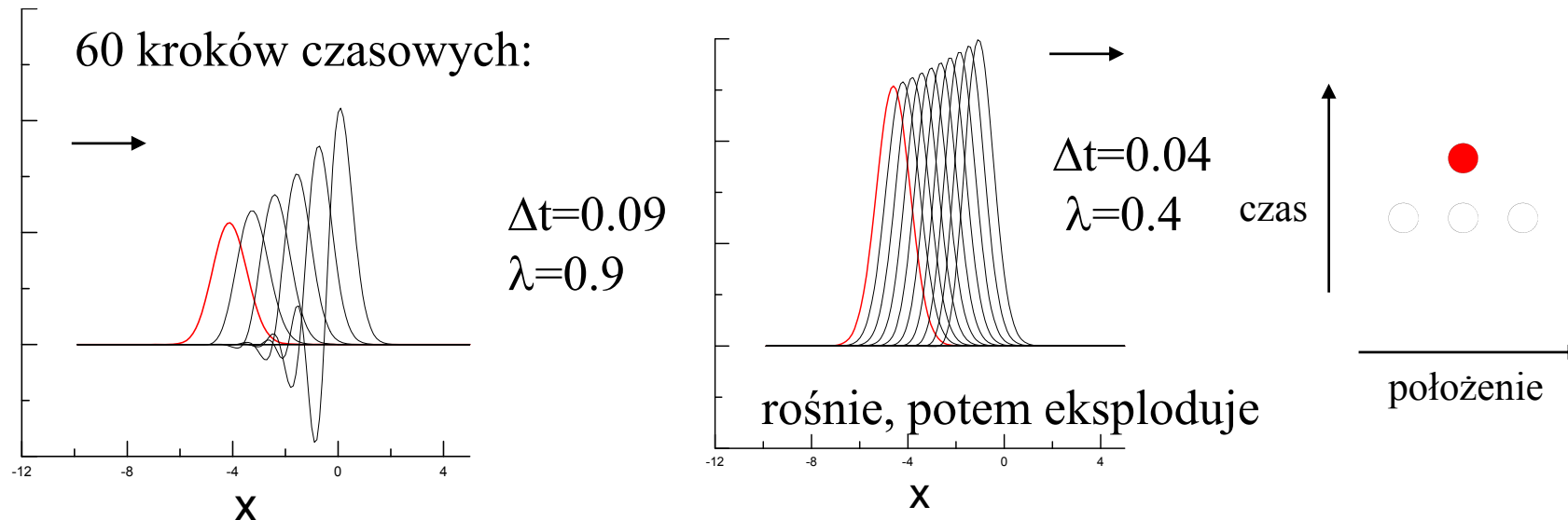
czas = będzie traktowany jak w metodzie różnic skończonych

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{równanie adwekcji}$$

Jawny schemat Eulera w metodzie różnic skończonych (niestabilny bezwzględnie)

$$\frac{u(j, n + 1) - u(j, n)}{\Delta t} = -v \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$



MES: z czasem

$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi_j(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(x, t + dt) = \sum_j u_j(t + dt) \phi_j(x)$$

MES: z czasem

$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi_j(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(x, t + dt) = \sum_j u_j(t + dt) \phi_j(x)$$

w MRS: stabilny był schemat z jednostronnie liczoną pochodną przestrzenną (upwind)
pochodna czasowa liczona była jak w jawnej metodzie Eulera

O stabilności schematu decydował sposób liczenia pochodnych przestrzennych.

teraz pochodne przestrzenne policzymy dokładnie (w wybranej bazie)

czy pomoże to ustabilizować schemat?

$$\frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = -v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$u(x, t + dt) = -v dt \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t)$$

$$\sum_j u_j(t + dt) \phi_j(x) = -v dt \sum_j u_j(t) \phi_j'(x) + \sum_j u_j(t) \phi_j(x)$$

MES: z czasem

$$\sum_j u_j(t + dt)\phi_j(x) = -vdt \sum_j u_j(t)\phi_j'(x) + \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

układ równań na zależność od czasu wartości w węzłach
wyprowadzamy jak w metodzie Galerkinia przez rzutowanie na elementy bazowe

$$\times \phi_k(x) \int dx$$

$$\sum_j u_j(t + dt)\phi_j(x) = -vdt \sum_j u_j(t)\phi_j'(x) + \sum_j u_j(t)\phi_j(x) \\ \times \phi_k(x) \int dx$$

dostajemy równanie macierzowe:

$$\sum_j O_{kj}u_j(t + dt) = -vdt \sum_j F_{kj}u_j(t) + \sum_j O_{kj}u_j(t)$$

$$\sum_j u_j(t + dt)\phi_j(x) = -vdt \sum_j u_j(t)\phi_j'(x) + \sum_j u_j(t)\phi_j(x) \\ \times \phi_k(x) \int dx$$

dostajemy równanie macierzowe:

$$\sum_j O_{kj}u_j(t + dt) = -vdt \sum_j F_{kj}u_j(t) + \sum_j O_{kj}u_j(t)$$

$$O_{kj} = \langle \phi_k | \phi_j \rangle \quad (\text{macierz przekrywania,} \\ \text{zwana również macierzą masy})$$

$$F_{kj} = \langle \phi_k | \phi_j' \rangle$$

$$\sum_j O_{kj}u_j(t + dt) = \sum_j P_{kj}u_j(t)$$

$$P_{kj} = -vdt F_{kj} + O_{kj}$$

równanie adwekcji MES z dyskretyzacją czasową typu Eulera

$$\sum_j O_{kj} u_j(t + dt) = \sum_j P_{kj} u_j(t)$$

$$P_{kj} = -v dt F_{kj} + O_{kj}$$

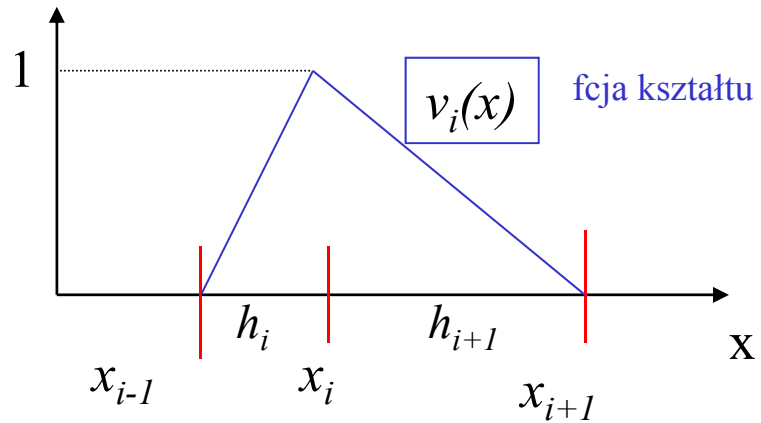
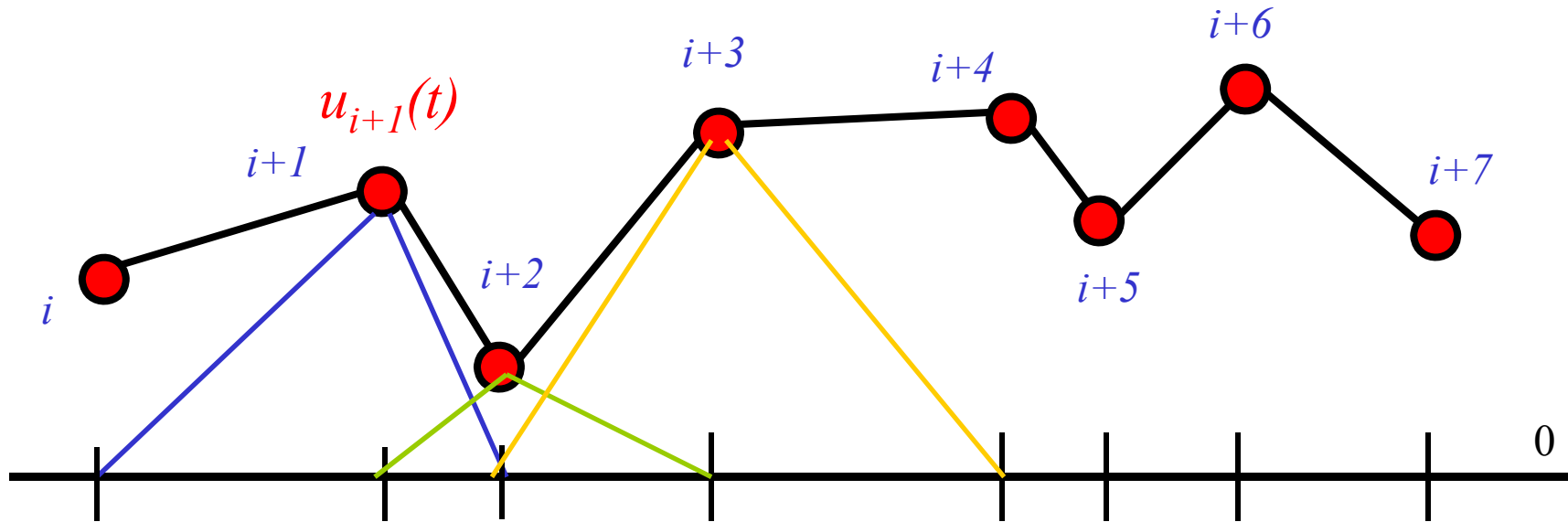
jeden krok wymaga rozwiązania układu równań:

$$\mathbf{O}\mathbf{u}(t+dt) = \mathbf{P}\mathbf{u}(t)$$

konkretna forma macierzowa problemu – zależy od wyboru funkcji kształtu

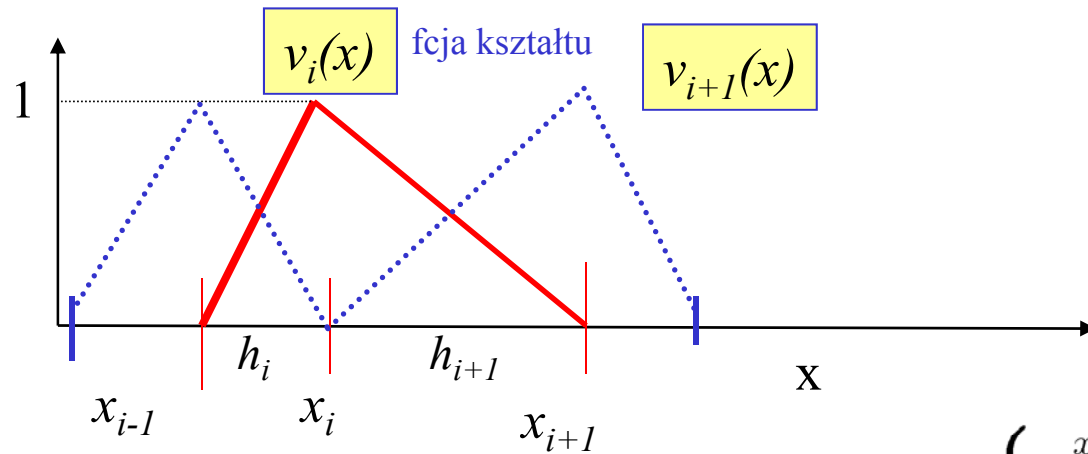
→ do aplikacji numerycznej
musimy jakąś bazę wybrać
weźmy MES z funkcjami odcinkami
liniowymi

liniowe funkcje kształtu



$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$O_{kj} = \langle v_k | v_j \rangle = \frac{1}{3} \left(\delta_{kj}(h_j + h_{j+1}) + \frac{1}{2}\delta_{(k+1,j)}h_j + \frac{1}{2}\delta_{(k-1,j)}h_{j+1} \right)$$



$$F_{kj} = \langle v_k | v'_j \rangle \quad v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$v_i(x)v'_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{(x_i-x_{i-1})^2} & x \in K_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{(x_{i+1}-x_i)^2} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i + K_{i+1} \end{cases}$$

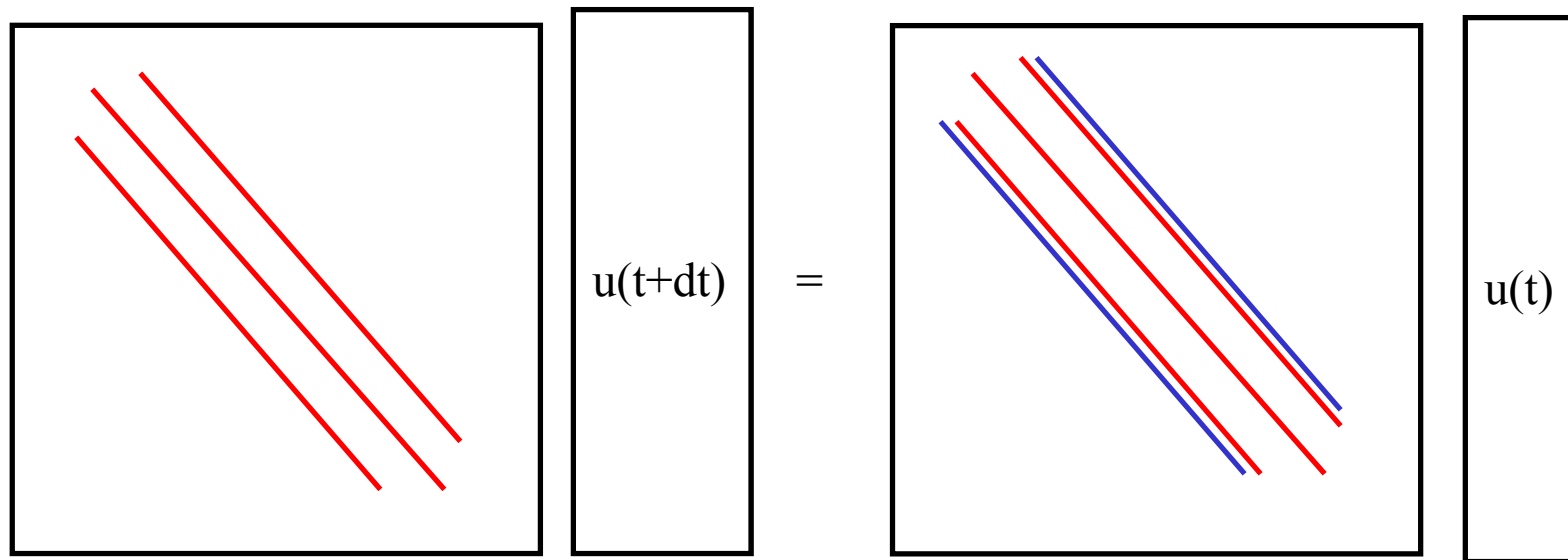
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i(x)v'_i(x)dx = \frac{1}{2} \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i(x)v'_i(x)dx = -\frac{1}{2}$$

$$F_{ii} = 0, F_{i,i+1} = +1/2, F_{i,i-1} = -1/2$$

$$\sum_j O_{kj} u_j(t + dt) = \sum_j P_{kj} u_j(t)$$

$$P_{kj} = \underbrace{-vdt F_{kj}}_{\text{blue}} + \underbrace{O_{kj}}_{\text{red}}$$

forma macierzowa: $\mathbf{O}u(t+dt) = \mathbf{P}u(t)$



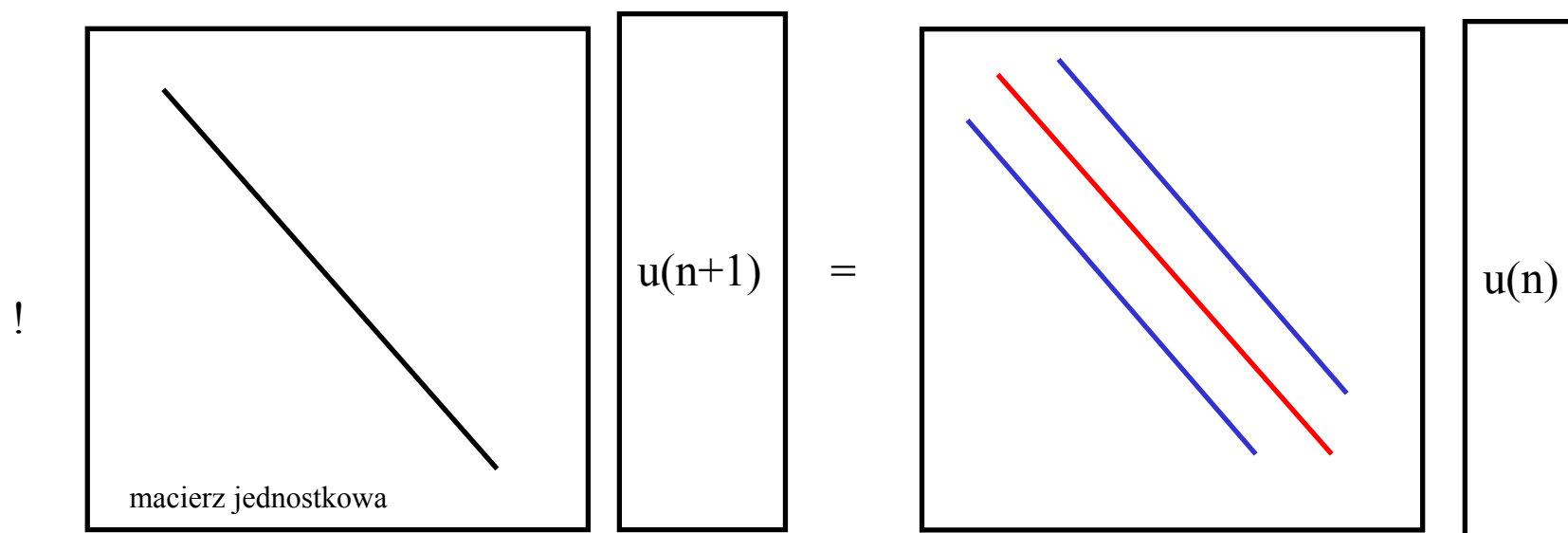
dla siatki równomiernej
 $\frac{2}{3} dx$ na diagonalu
 $\frac{1}{6}$ nad i pod

nad diagonalą $+\frac{1}{2} (-vdt)$
 pod diagonalą $-\frac{1}{2} (-vdt)$

Euler dla MRS funkcjonował jak podstawienie. Teraz mamy rozwiązać układ równań.

Jak wygląda w MRS wygląda równanie schematu jawnego?

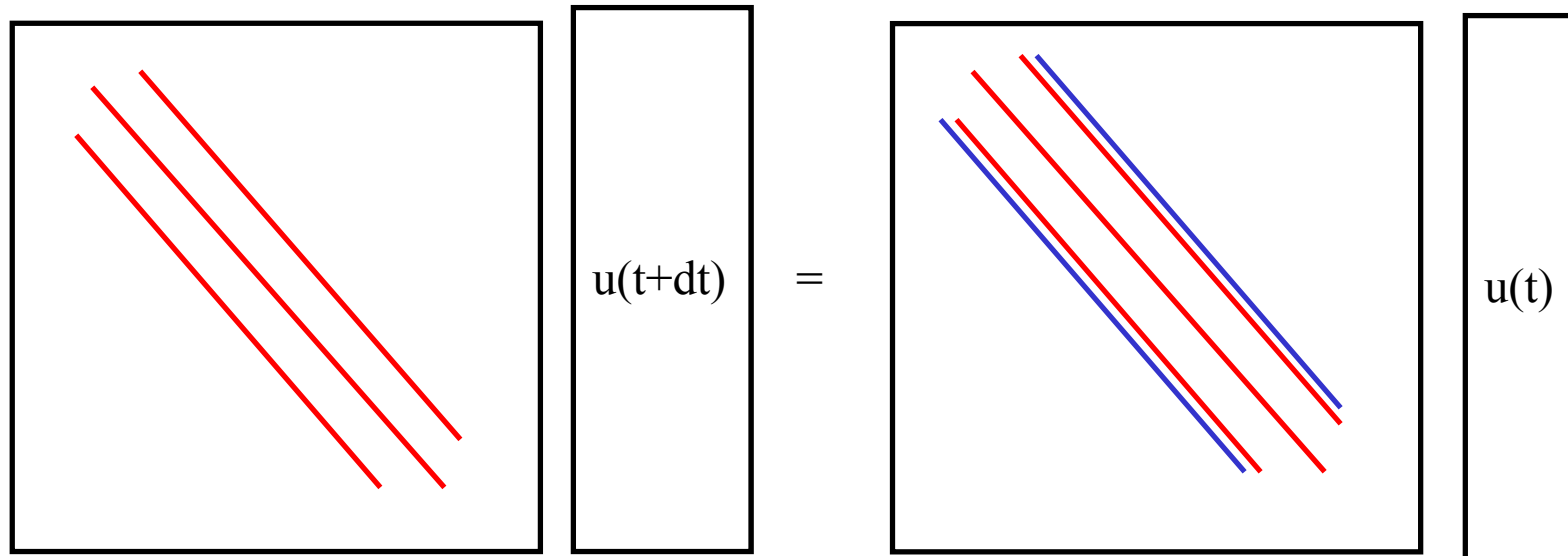
$$u(j, n + 1) = u(j, n) - v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x}$$



$$\sum_j O_{kj} u_j(t + dt) = \sum_j P_{kj} u_j(t)$$

$$P_{kj} = \underbrace{-v dt F_{kj}}_{\text{blue}} + \underbrace{O_{kj}}_{\text{red}}$$

forma macierzowa:



MES zbudowana na podstawie jawnego schematu Eulera:

nie działa jak podstawienie!

musimy a) odwrócić macierz O [będzie gęsta]

b) albo rozwiązać układ równań

metodą iteracyjną

odwrócić O:

```
A:=matrix(4,4,[2/3,1/6,0,0, 1/6,2/3,1/6,0 ,0,1/6,2/3,1/6, 0,0,1/6,2/3]);
```

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{336}{209} & \frac{-90}{209} & \frac{24}{209} & \frac{-6}{209} \\ \frac{-90}{209} & \frac{360}{209} & \frac{-96}{209} & \frac{24}{209} \\ \frac{24}{209} & \frac{-96}{209} & \frac{360}{209} & \frac{-90}{209} \\ \frac{-6}{209} & \frac{24}{209} & \frac{-90}{209} & \frac{336}{209} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t+dt) := \mathbf{O}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{u}(t)$$

wartość w węzle j w chwili $t+dt$ zależy od wartości we wszystkich węzłach w chwili t

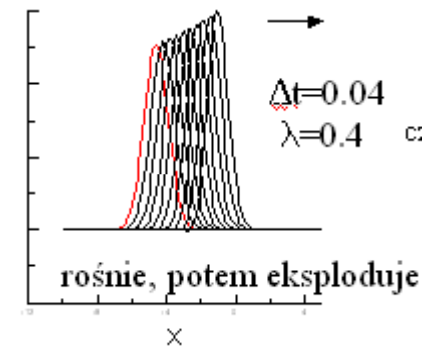
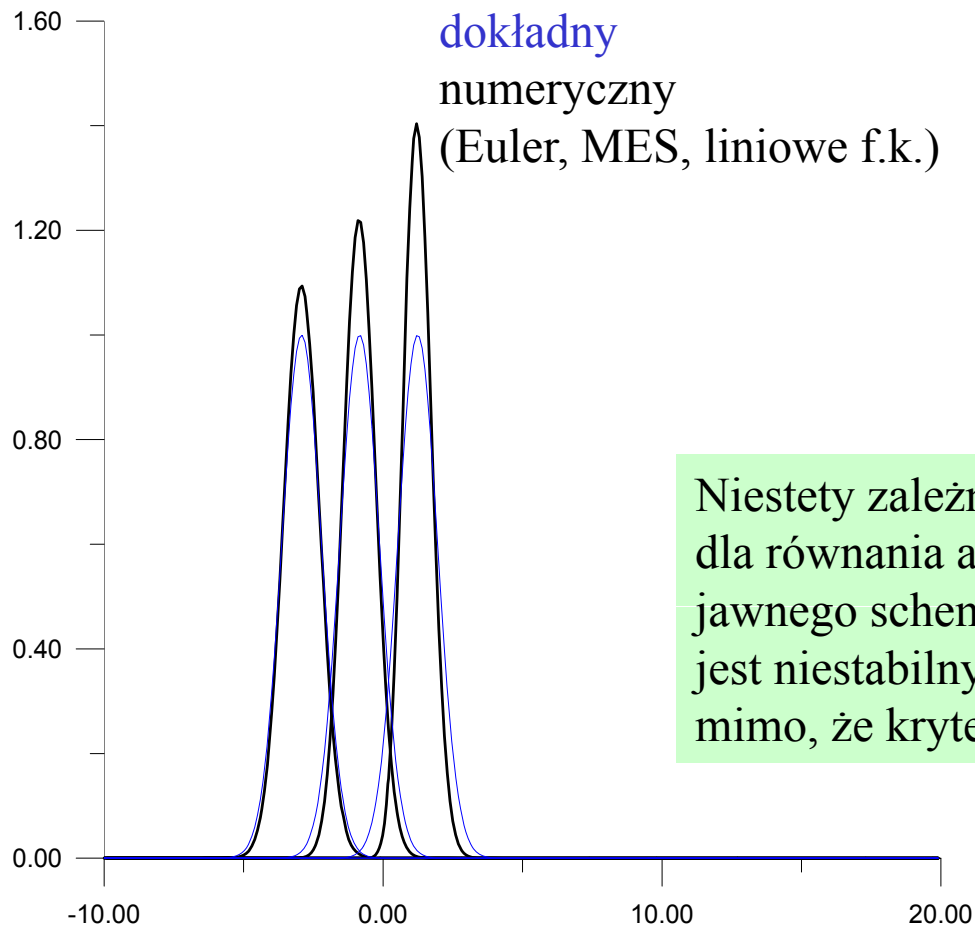
- jak dla schematu niejawnego w MRS

2) Przeszłość numeryczna dla $u_j(t)$: wszystkie punkty dla $t_p \leq t$, kryterium CFL spełnione zawsze (w przeciwieństwie do Eulera jawnego)

2) Przeszłość numeryczna dla $u_j(t)$: wszystkie punkty dla $t_p \leq t$, kryterium CFL spełnione zawsze (w przeciwieństwie do Eulera jawnego)

pomimo tego:

Wyniki MES:
 $dx=0.1$
 $dt=0.04$
 $v=1$



wynik MRS

Niestety zależny schemat MES zbudowany dla równania adwekcji na podstawie jawnego schematu Eulera, jest niestabilny (jak jawny Euler dla MRS) mimo, że kryterium CFL jest zawsze spełnione

W takim razie:

jeśli jawny Euler w MES nie daje metody podstawieniowej
a zachowuje dokładność podobną dla MRS,
spróbujmy skonstruować zależny od czasu schemat MES
na podstawie niejawnego schematu Eulera
(który jest stabilny bezwzględnie dla MRS)

MES na podstawie niejawnego (wstecznego Eulera)

$$\frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = -v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x}$$

$$u(x, t + dt) + vdt \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} = u(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi_j(x)$$

$$u(x, t + dt) = \sum_j u_j(t + dt) \phi_j(x)$$

MES na podstawie niejawnego (wstecznego Eulera)

$$\frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = -v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x}$$

$$u(x, t + dt) + vdt \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} = u(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi_j(x)$$

$$u(x, t + dt) = \sum_j u_j(t + dt) \phi_j(x)$$

$$\sum_j (O_{kj} + vdt F_{kj}) u_j(t + dt) = \sum_j O_{kj} u_j(t)$$

MES na podstawie niejawnego (wstecznego Eulera)

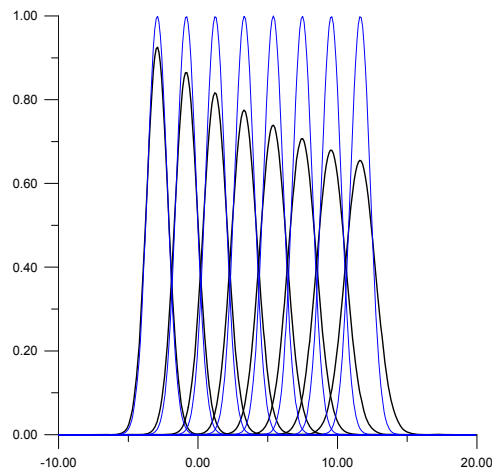
$$\frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = -v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x}$$

$$u(x, t + dt) + vdt \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} = u(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi_j(x)$$

$$u(x, t + dt) = \sum_j u_j(t + dt) \phi_j(x)$$

$$\sum_j (O_{kj} + vdt F_{kj}) u_j(t + dt) = \sum_j O_{kj} u_j(t)$$

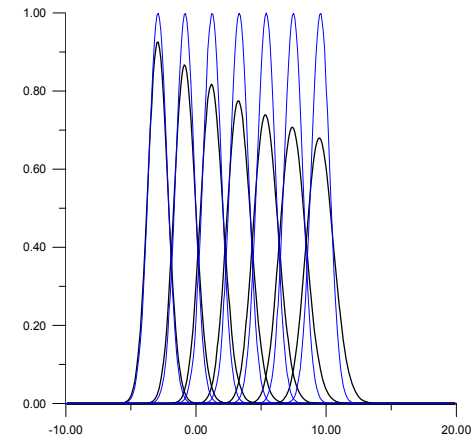


MES: stabilny, lecz podobnie jak w MRS obarczony dyspersją (można ją stłumić małymi krokami przestrzennym i czasowym)

Wyniki są prawie nierozróżnialne MES/MRS
MES z wstecznym Eulerem równie dobry/zły jak MRS

$\Delta t = 0.04$

wsteczny Euler w MRS



$dx = 0.1$

weźmy przyzwoity schemat: Cranka - Nicolsona

$$\frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = \frac{1}{2} \left(-v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} \right)$$

$$u(x, t + dt) = u(x, t) + \frac{dt}{2} \left(-v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} \right)$$

wzór trapezów

weźmy przyzwoity schemat: Cranka - Nicolsona

$$\frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = \frac{1}{2} \left(-v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} \right)$$

$$u(x, t + dt) = u(x, t) + \frac{dt}{2} \left(-v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} \right)$$

wzór trapezów

$$u(x, t + dt) + \frac{vdt}{2} \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} = u(x, t) - \frac{vdt}{2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

weźmy przyzwoity schemat: Cranka - Nicolsona

$$\frac{u(x, t + dt) - u(x, t)}{dt} = \frac{1}{2} \left(-v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} \right)$$

$$u(x, t + dt) = u(x, t) + \frac{dt}{2} \left(-v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - v \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} \right)$$

wzór trapezów

$$u(x, t + dt) + \frac{vdt}{2} \frac{\partial u(x, t + dt)}{\partial x} = u(x, t) - \frac{vdt}{2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

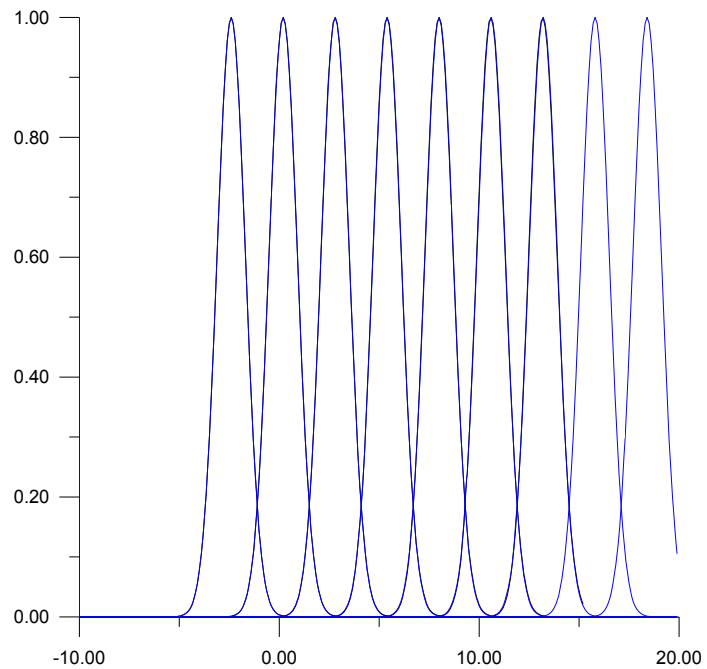
$$u(x, t + dt) = \sum_j u_j(t + dt) \phi_j(x) \quad u(x, t) = \sum_j u_j(t) \phi_j(x)$$

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{vdt}{2} F_{kj} \right) u_j(t + dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{vdt}{2} F_{kj} \right) u_j(t)$$

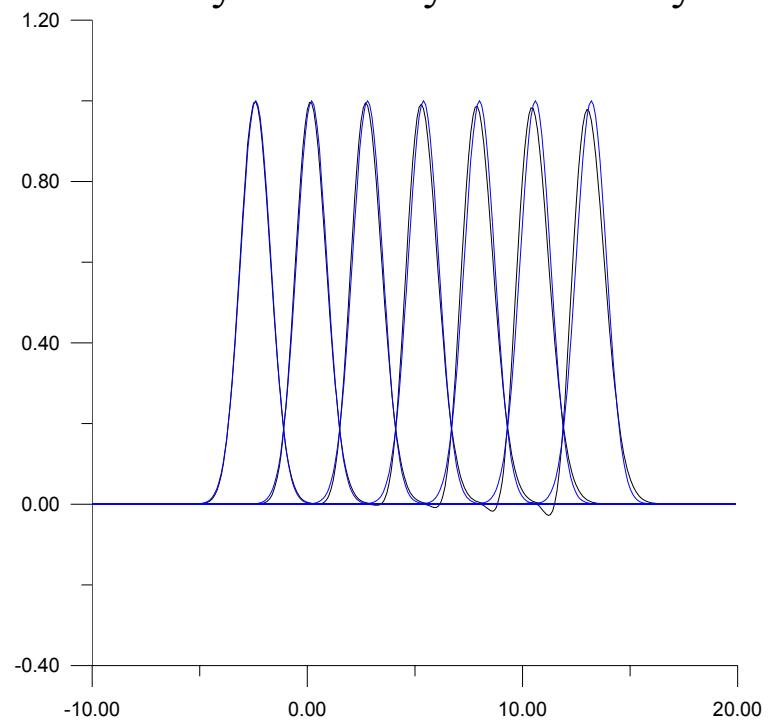
$$F_{kj} = \langle \phi_k | \phi_j' \rangle \quad O_{kj} = \langle \phi_k | \phi_j \rangle$$

Metoda CN: MES (liniowe funkcje kształtu) a MRS

MES CN, $dx=0.1$, $dt=0.05$
2 krzywe: analityczna/numeryczna



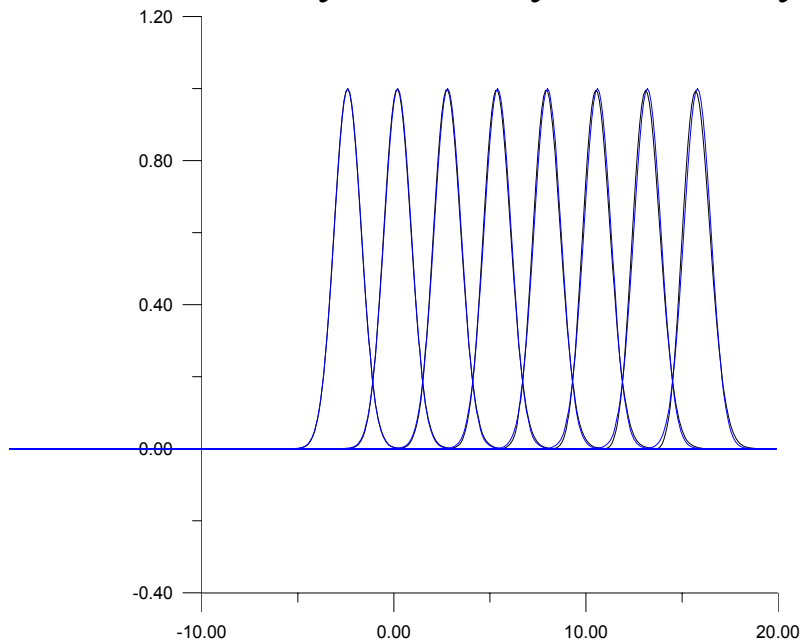
MRS CN, $dx=0.1$, $dt=0.05$
2 krzywe: analityczna/numeryczna



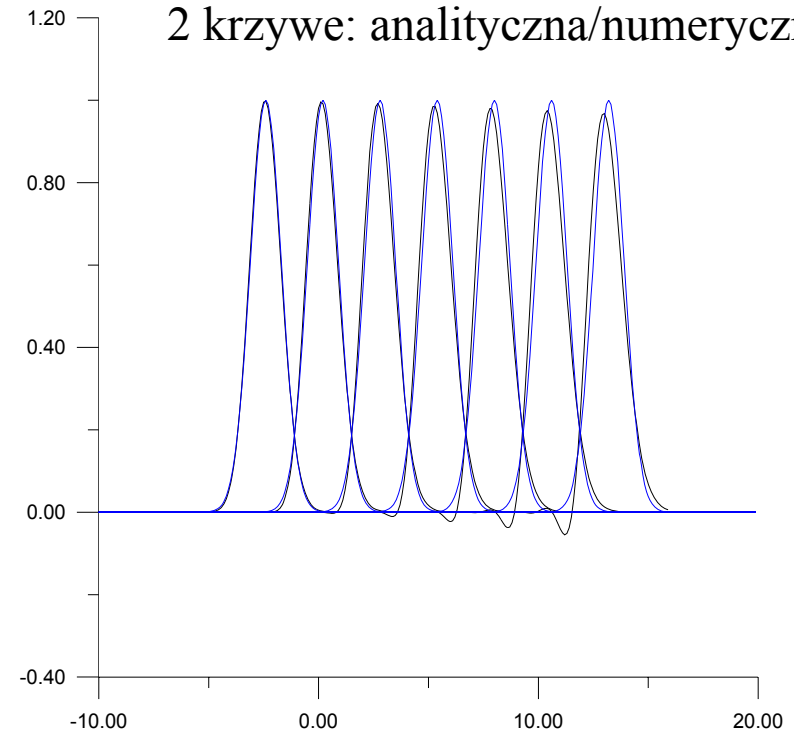
Metoda CN: MES (liniowe funkcje kształtu) a MRS

krok krytyczny CFL
 $v dt = dx$

MES CN, $dx=0.1$, $dt=0.1$
2 krzywe: analityczna/numeryczna

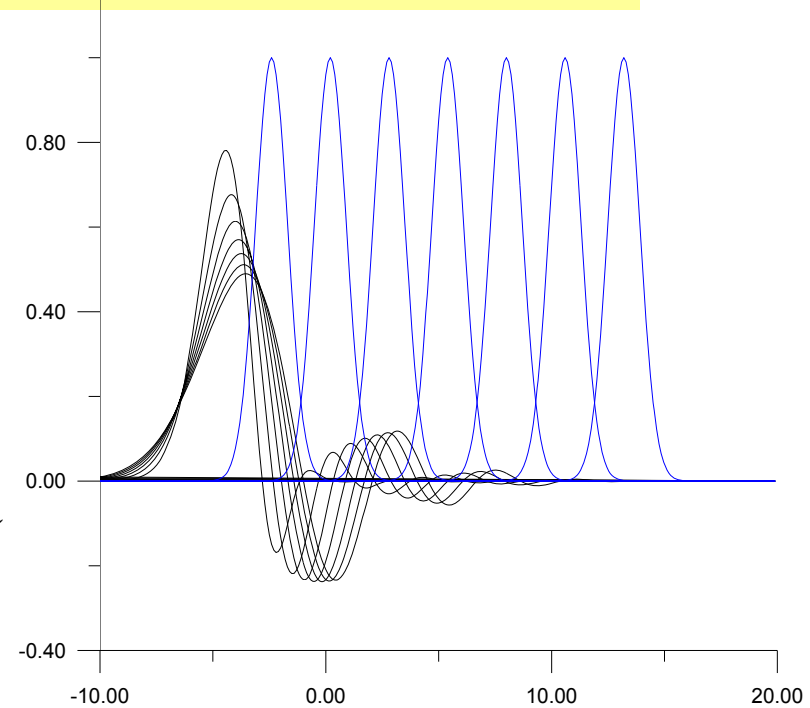
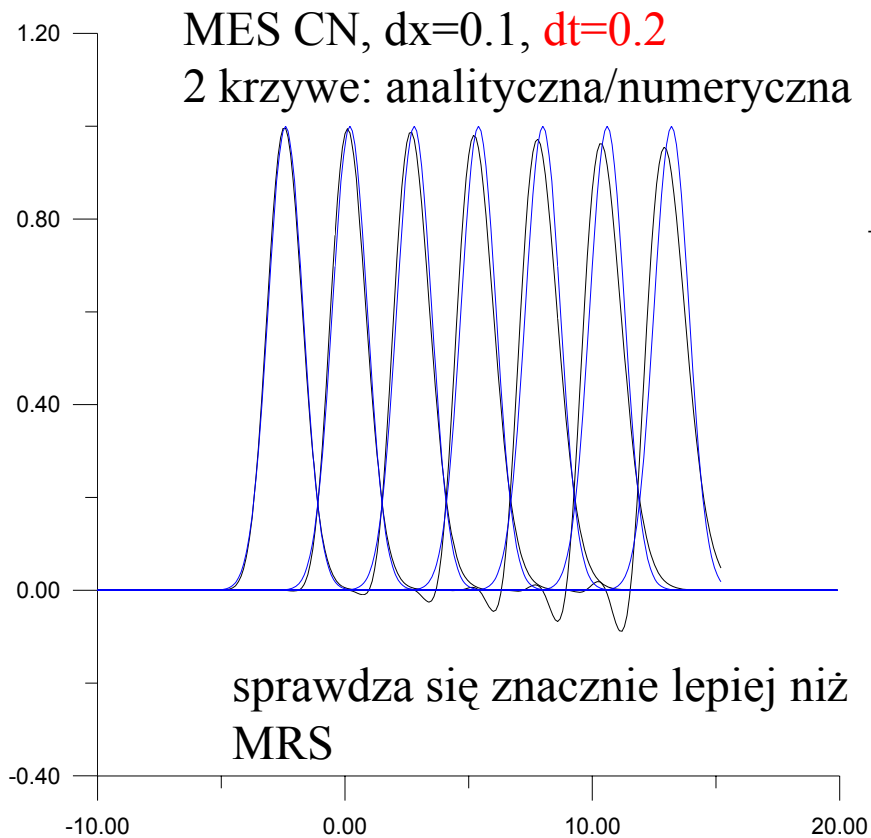


MRS CN, $dx=0.1$, $dt=0.1$
2 krzywe: analityczna/numeryczna



Metoda CN: MES (liniowe funkcje kształtu) a MRS

> CFL



MRS CN, $dx=0.1$, $dt=0.2$
2 krzywe: analityczna/numeryczna

MES już z liniowymi f.k. pozwala zwiększyć krok czasowy kilkukrotnie względem MRS

Metoda CN: MES (liniowe funkcje kształtu) a MRS

Wniosek: dla schematów Eulera dominuje błąd z dyskretyzacji czasowej [lokalny $O(\Delta t^2)$] a nie przestrzennej. Stąd jakość MRS i MES podobna.

Schemat CN – czasowy błąd lokalny $O(\Delta t^3)$

MES zaczyna górować nad MRS ze względu na dokładniejszy opis współrzędnej przestrzennej

(dokładne pochodne przestrzenne dla wybranych funkcji kształtu)

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej
w jednokrowych schematach– każdy krok czasowy można zapisać jako:

$$\mathbf{u} := \mathbf{A}\mathbf{u}$$

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej

w jednokrowowych schematach– każdy krok czasowy można zapisać jako:

$$\mathbf{u}:=\mathbf{A}\mathbf{u}$$

analiza stabilności: jeśli macierz iteracji \mathbf{A} ma wartości własne $|\lambda|>1$

– metoda będzie niestabilna [rozwiązanie numeryczne eksploduje do nieskończoności]

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej
w jednokrowych schematach– każdy krok czasowy można zapisać jako:

$$\mathbf{u}:=\mathbf{A}\mathbf{u}$$

analiza stabilności: jeśli macierz iteracji \mathbf{A} ma wartości własne $|\lambda|>1$
– metoda będzie niestabilna [rozwiązanie numeryczne eksploduje do nieskończoności]

Problem: formę \mathbf{A} w dla MES w 2D trudno przewidzieć, bo zależy od generacji siatki

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej
w jednokrowych schematach – każdy krok czasowy można zapisać jako:

$$\mathbf{u} := \mathbf{A}\mathbf{u}$$

analiza stabilności: jeśli macierz iteracji \mathbf{A} ma wartości własne $|\lambda| > 1$
– metoda będzie niestabilna [rozwiązanie numeryczne eksploduje do nieskończoności]

Problem: formę \mathbf{A} w dla MES w 2D trudno przewidzieć, bo zależy od generacji siatki

Analiza wykonalna dzięki twierdzeniu **Ironsa/Treharne'a**
wartości własne macierzy iteracji \mathbf{A} są ograniczone wartościami
własnymi odpowiednika *\mathbf{A} dla pojedynczych elementów (\mathbf{A}_I)*

(zamiast analizować macierz globalną – analizować będziemy lokalne)

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej
w jednokrowowych schematach – każdy krok czasowy można zapisać jako:

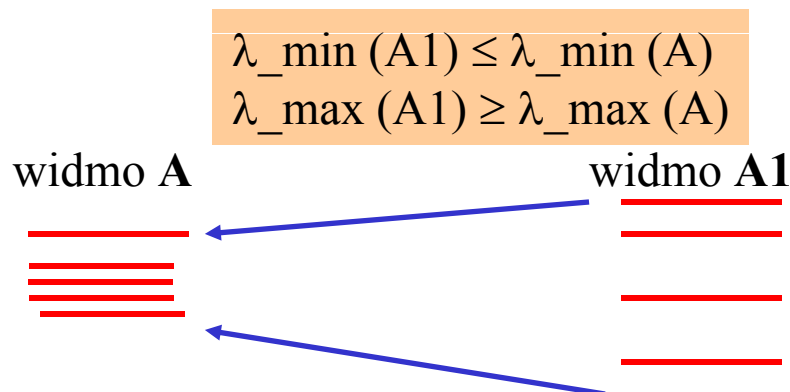
$$\mathbf{u} := \mathbf{A}\mathbf{u}$$

analiza stabilności: jeśli macierz iteracji \mathbf{A} ma wartości własne $|\lambda| > 1$
– metoda będzie niestabilna [rozwiązanie numeryczne eksploduje do nieskończoności]
(przypomnienie: *dla zbieżności iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań liniowych: $|\lambda| < 1$*)

Problem: formę \mathbf{A} w dla MES w 2D trudno przewidzieć, bo zależy od generacji siatki

Analiza wykonalna dzięki twierdzeniu **Ironsa/Treharne'a**
wartości własne macierzy iteracji \mathbf{A} są ograniczone wartościami
własnymi odpowiednika $\mathbf{A1}$ *dla pojedynczych elementów (A1)*

(zamiast analizować macierz globalną – analizować będziemy lokalne)



jeśli widmo $A1$ zmieści się co do modułu poniżej jedynki
metoda jest na pewno stabilna.

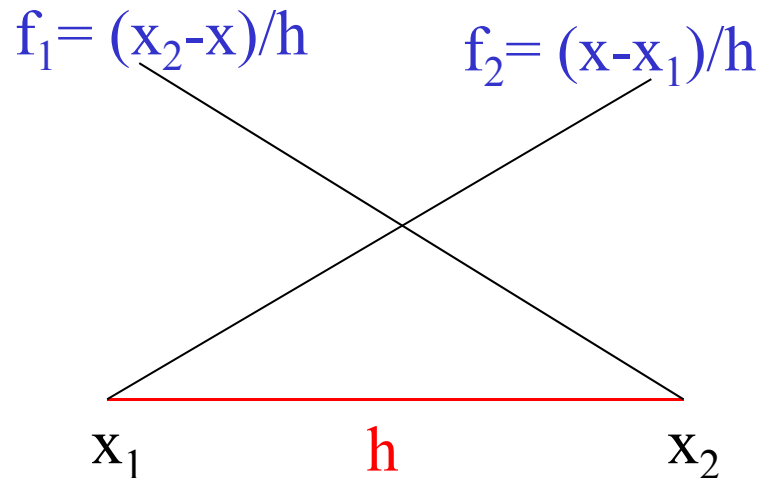
tw. Ironsa: przydatne w udowadnianiu stabilności,
zobaczmy,
że oszacowania Ironsa bardzo bliskie dokładnym granicom
stabilności

Przykład zastosowania tw. Ironsa:

analiza stabilności dla równania adwekcji MES: CN + liniowe funkcje kształtu

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{v dt}{2} F_{kj} \right) u_j(t + dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{v dt}{2} F_{kj} \right) u_j(t)$$

lokalne macierze O i F liczymy wg:



$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix}$$

$$O_{kl} = \langle f_k | f_l \rangle$$

$$F_{kl} = \langle f_k | f_l' \rangle$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

do tw. Ironsa stosujemy macierze lokalne **bez składania** globalnej

złożyć musimy za to macierz jednego kroku czasowego aby uzyskać przepis w formie $\mathbf{u} := \mathbf{A}\mathbf{u}$

Przykład zastosowania tw. Ironsa:

analiza stabilności dla równania adwekcji MES: CN + liniowe funkcje kształtu

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{v dt}{2} F_{kj} \right) u_j(t + dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{v dt}{2} F_{kj} \right) u_j(t)$$

Przykład zastosowania tw. Ironsa:

analiza stabilności dla równania adwekcji MES: CN + liniowe funkcje kształtu

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{vdt}{2} F_{kj} \right) u_j(t + dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{vdt}{2} F_{kj} \right) u_j(t)$$

$$\alpha = vdt$$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

potrzebna forma w postaci:

$$\mathbf{u} := \mathbf{A}\mathbf{u}$$

$$[\text{znaczy } \mathbf{u}(t+dt) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t)]$$

Przykład zastosowania tw. Ironsa:

analiza stabilności dla równania adwekcji MES: CN + liniowe funkcje kształtu

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{vdt}{2} F_{kj} \right) u_j(t + dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{vdt}{2} F_{kj} \right) u_j(t)$$

$$\alpha = vdt$$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

mnożymy prawą stronę z lewej strony przez odwrotność lewej strony

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{h} & -\frac{\alpha}{h} \\ \frac{\alpha}{h} & 1 - \frac{\alpha}{h} \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

macierz ma niezależnie od wartości kroku czasowego (α)

podwójną wartość własną: 1

$\|\mathbf{u}\|$ pozostanie skończone dla dowolnej liczby iteracji, przy dowolnym kroku czasowym

Analiza stabilności dla równania dyfuzji MES: jawny Euler+ liniowe funkcje kształtu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dla równania adwekcji schematy były stabilne lub nie niezależnie od kroku czasowego, dla dyfuzji jest inaczej: jawny s. Eulera można ustabilizować małym krokiem czasowym

Euler $u(t + dt) = u(t) + dt D u(t)''$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) u_j(t + dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + D dt (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

dla analizy stabilności:

↑

w macierzy **globalnej**
 $-1/(h_j+h_{j+1})$ na diagonalu
 $1/h_{i+1}$ na prawo od diagonalu

iteracja dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + D dt \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

znana forma

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + Ddt \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{Ddt}{h} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + Ddt \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{Ddt}{h} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\beta = Ddt/h^2$$

$$\begin{vmatrix} 1 - 6\beta - \lambda & 6\beta \\ 6\beta & 1 - 6\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad 1 - 6\beta - \lambda = \pm 6\beta$$



$$\lambda = 1 - 12\beta \quad \text{lub} \quad \lambda = 1$$

$$1 \geq 1 - 12\beta \geq -1$$



$$1/6 \geq \beta$$



$$dt \leq h^2/6D$$

dostaliśmy gwarancje, że jeśli

$$\Delta t \leq \Delta x^2 / 6D$$

to MES z liniowymi funkcjami kształtu stabilne

dostaliśmy gwarancje, że jeśli

$$\Delta t \leq \Delta x^2 / 6D$$

to MES z liniowymi funkcjami kształtu stabilne

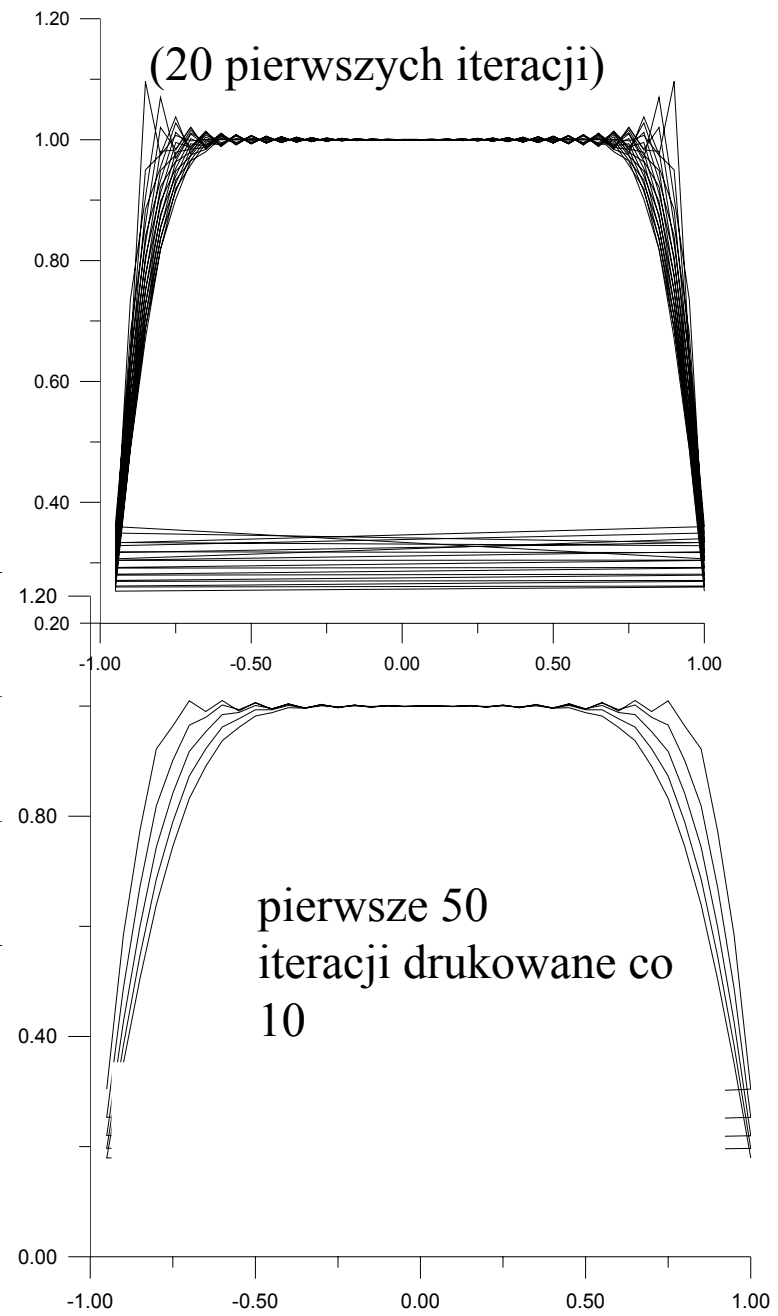
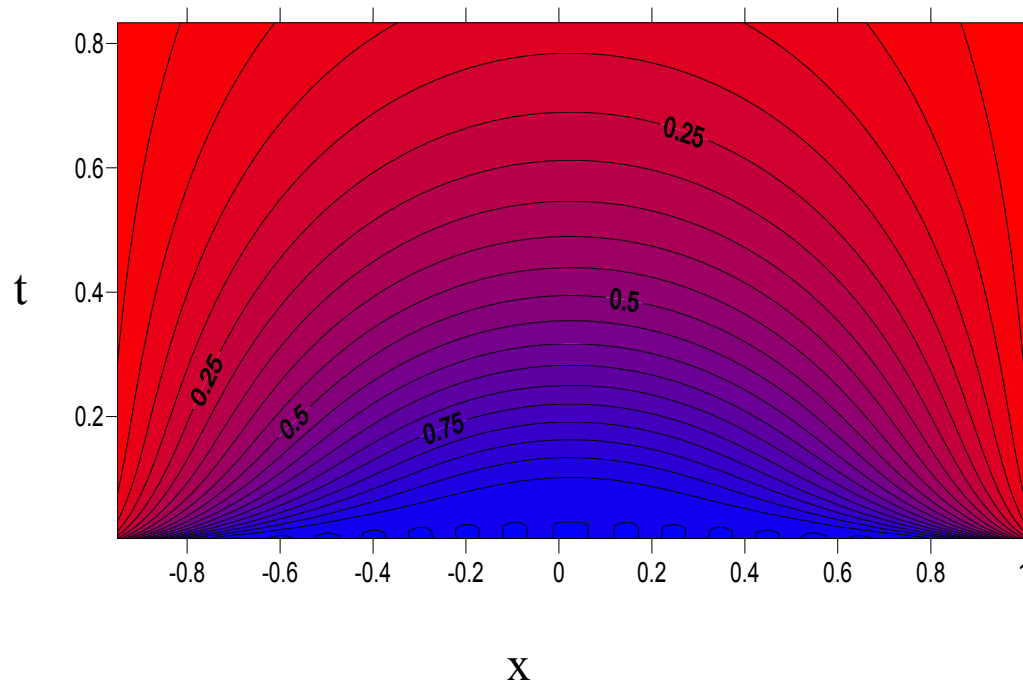
a dla MRS mieliśmy:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}$$

Czyżby krok czasowy w MES miałby być naprawdę mniejszy niż w MRS?
(oszacowanie dostaliśmy z tw. Ironsa-Treharna – może jego wynik jest zbyt pesymistyczny)
Sprawdźmy numerycznie:

40 węzłów, D=1

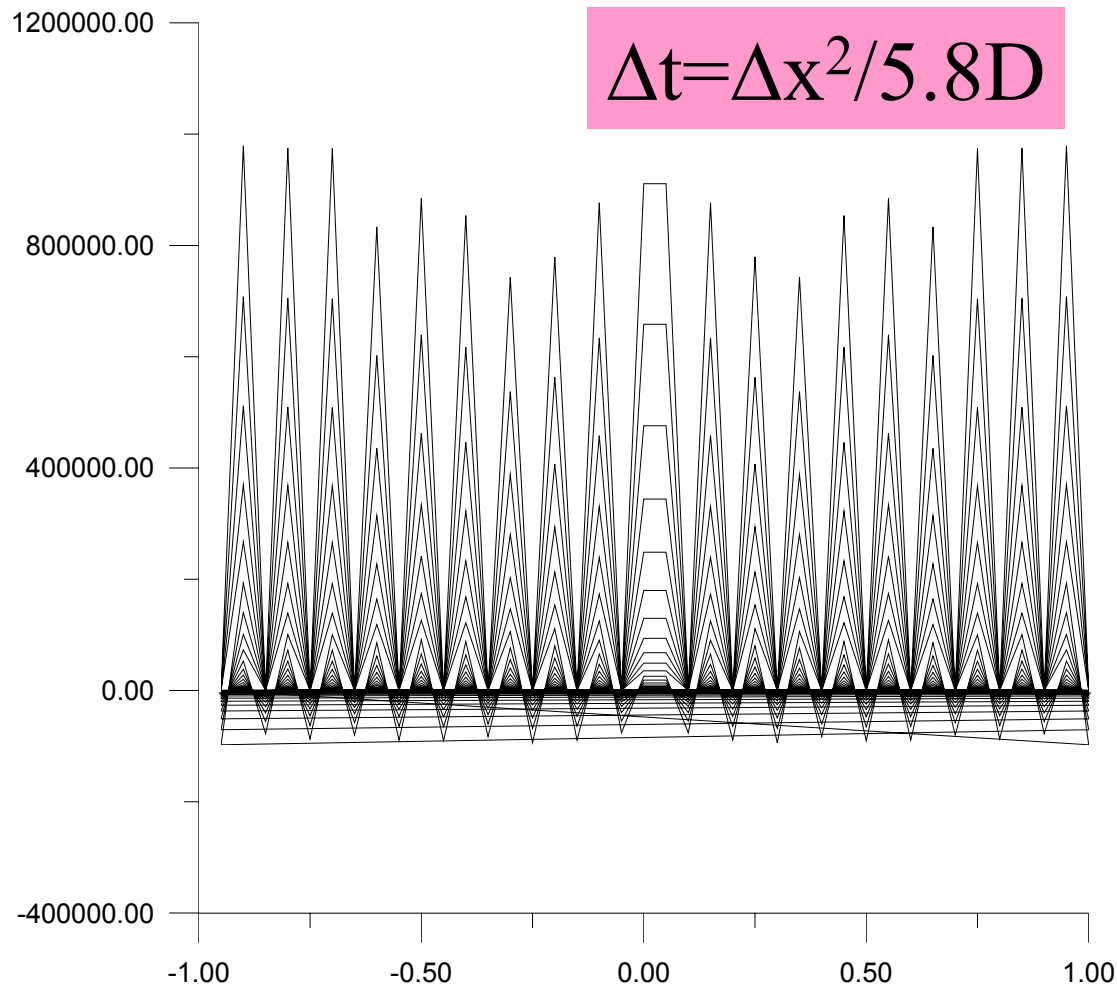
$$\Delta t = \Delta x^2 / 6D$$



oszacowanie stabilnego kroku
czasowego wg tw. Ironsa

$$\Delta t \leq \Delta x^2 / 6D$$

wyniki numeryczne dla:



niestety

Irons nie kłamie

W tym przypadku
(dyfuzji i dyskretyzacji
przestrzennej wg. metody
Eulera):

MES z liniowymi funkcjami
kształtu wymaga mniejszego
kroku czasowego niż
MRS!

Ograniczenie na krok czasowy związane z krokiem przestrzennym
takie jak:

$$\Delta t \leq \Delta x^2 / 6D$$

to katastrofa dla MES.

Siła MES – swoboda w wyborze siatki

można ją dopasować do problemu, zagęścić tam gdzie trzeba

jeśli o kroku czasowym zdecyduje

rozmiar najmniejszego elementu (minimalne Δx)

niczego nie policzymy w rozsądnym czasie.

Potrzebny inny schemat (lub może inne funkcje kształtu?)

Euler z MES wymaga większego kroku czasowego niż dla MRS !
czy winna „kanciastość” rozwiązania rozwiniętego w bazie liniowych funkcji kształtu?

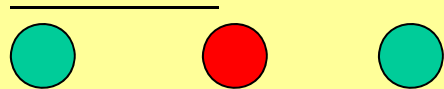
Sprawdźmy kwadratowe funkcje kształtu.

Euler

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) u_j(t + dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + Ddt (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

kwadratowe
funkcje kształtu

Δx (odległość między sąsiednimi węzłami)

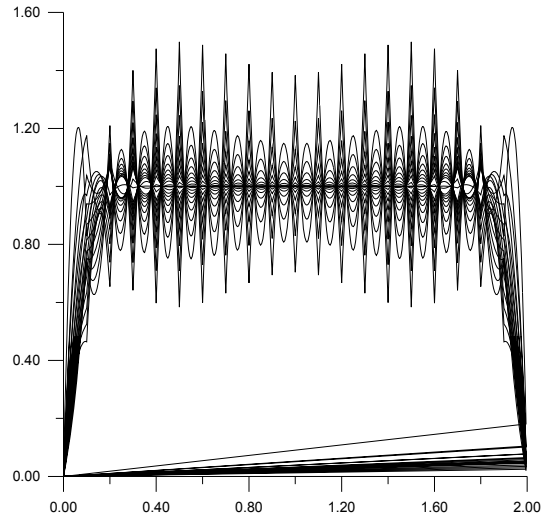


element o długości $h = 2\Delta x$

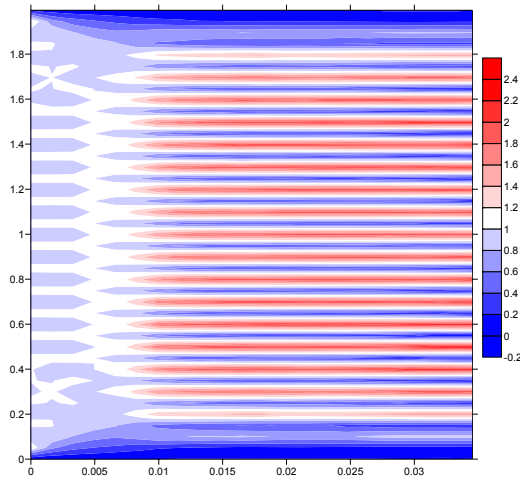
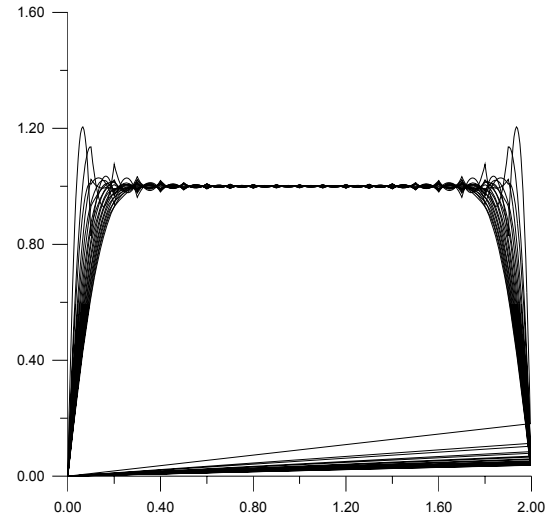
Euler z kwadratowymi funkcjami kształtu 20 elementów

$1/6 = .1666$

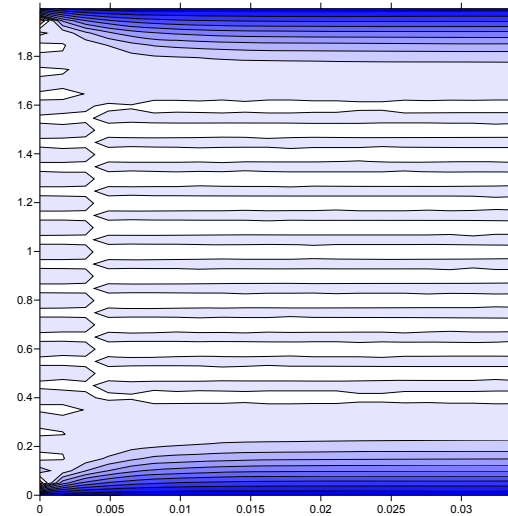
$dt = dx^2 * .15$



$dt = dx^2 * .1333 = dx^2 * 2/15$



powyżej $T > 1$:
czerwony kolor
(generuje niestabilność)



dla liniowych funkcji kształtu Euler stabilny dla $dt = dx^2 * .1666$

Euler MES z funkcjami kwadratowymi nie tylko nie pozwala na mniejszy krok czasowy, ale wręcz wymaga nieco mniejszego!

przeanalizujemy stabilność metody:

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) u_j(t + dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + Ddt (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

$$\frac{h}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\frac{h}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{Ddt}{3h} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{10Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{10Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u} \quad \alpha = 10Ddt/h^2$$

> `A:=matrix(3,3,[4,2,-1,2,16,2,-1,2,4]);`

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

> `inverse(A);`

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{40} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

> `B:=matrix(3,3,[-7,8,-1,8,-16,8,-1,8,-7]);`

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

> `il:=multiply(inverse(A),alpha*B);`

$$il = \begin{bmatrix} -\frac{13}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{7}{5}\alpha \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ -\frac{7}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{13}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

> `w:=matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,0,0,1]);`

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> `wynik:=matadd(w,il);`

$$\text{wynik} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{13}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{7}{5}\alpha \\ \alpha & 1 - 2\alpha & \alpha \\ -\frac{7}{5}\alpha & 4\alpha & 1 - \frac{13}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

> `eigenvalues(wynik);`

$$1, -\frac{6}{5}\alpha + 1, -6\alpha + 1$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{10Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u} \quad \alpha = 10Ddt/h^2$$

> `A:=matrix(3,3,[4,2,-1,2,16,2,-1,2,4]);`

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

> `inverse(A);`

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{40} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{20} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

> `B:=matrix(3,3,[-7,8,-1,8,-16,8,-1,8,-7]);`

$$B = \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

> `il:=multiply(inverse(A),alpha*B);`

$$il = \begin{bmatrix} -\frac{13}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{7}{5}\alpha \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ -\frac{7}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{13}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

> `w:=matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,0,0,1]);`

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> `wynik:=matadd(w,il);`

$$\text{wynik} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{13}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{7}{5}\alpha \\ \alpha & 1 - 2\alpha & \alpha \\ -\frac{7}{5}\alpha & 4\alpha & 1 - \frac{13}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

> `eigenvalues(wynik);`

$$1, -\frac{6}{5}\alpha + 1, -6\alpha + 1$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 - 6/5\alpha \leq 1 \\ -1 &\leq 1 - 6\alpha \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 5/3 \\ \alpha &\leq 1/3 \end{aligned}$$

$$10Ddt/h^2 \leq 1/3$$

$$dt \leq h^2/30D$$

$$dt \leq 4dx^2/30D$$

mamy: $dt \leq .1333 dx^2/D$

CN: szansa na schemat bez ograniczenia na krok czasowy

Schemat Cranka Nicholsona dla równania dyfuzji z elementami kwadratowymi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u(t + dt) - u(t)}{dt} = D \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, t + dt)}{\partial x^2} \right)$$

$$u(t + dt) - D \frac{dt}{2} \frac{\partial^2 u(x, t + dt)}{\partial x^2} = u(t) + D \frac{dt}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\sum_j \left((\phi_k, \phi_j) - \frac{Ddt}{2} (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t + dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + \frac{Ddt}{2} (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

Analiza stabilności dla pojedynczego elementu:

CN:

$$\sum_j \left((\phi_k, \phi_j) - \frac{Ddt}{2} (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t + dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + \frac{Ddt}{2} (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

elementy macierzowe znamy z analizy jawnego Eulera:

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) u_j(t + dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + Ddt (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

$$\frac{h}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\frac{h}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{Ddt}{3h} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

A **B**

$$\sum_j \left(\underset{\mathbf{A}}{(\phi_k, \phi_j)} - \frac{Ddt}{2} \underset{\mathbf{B}}{(\phi_k, \phi_j'')} \right) u_j(t + dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + \frac{Ddt}{2} (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

Analiza Ironsa:

`A:=1/30*matrix(3,3,[4,2,-1,2,16,2,-1,2,4]);`

$$A = \frac{1}{30} h \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

`B:=1/3/h*matrix(3,3,[-7,8,-1,8,-16,8,-1,8,-7]);`

$$B = \frac{1}{3} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

`A1:=A-D*dt/2*B;`

$$A1 = \frac{1}{30} h \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \frac{D dt}{h} \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

`A2:=A+D*dt/2*B;`

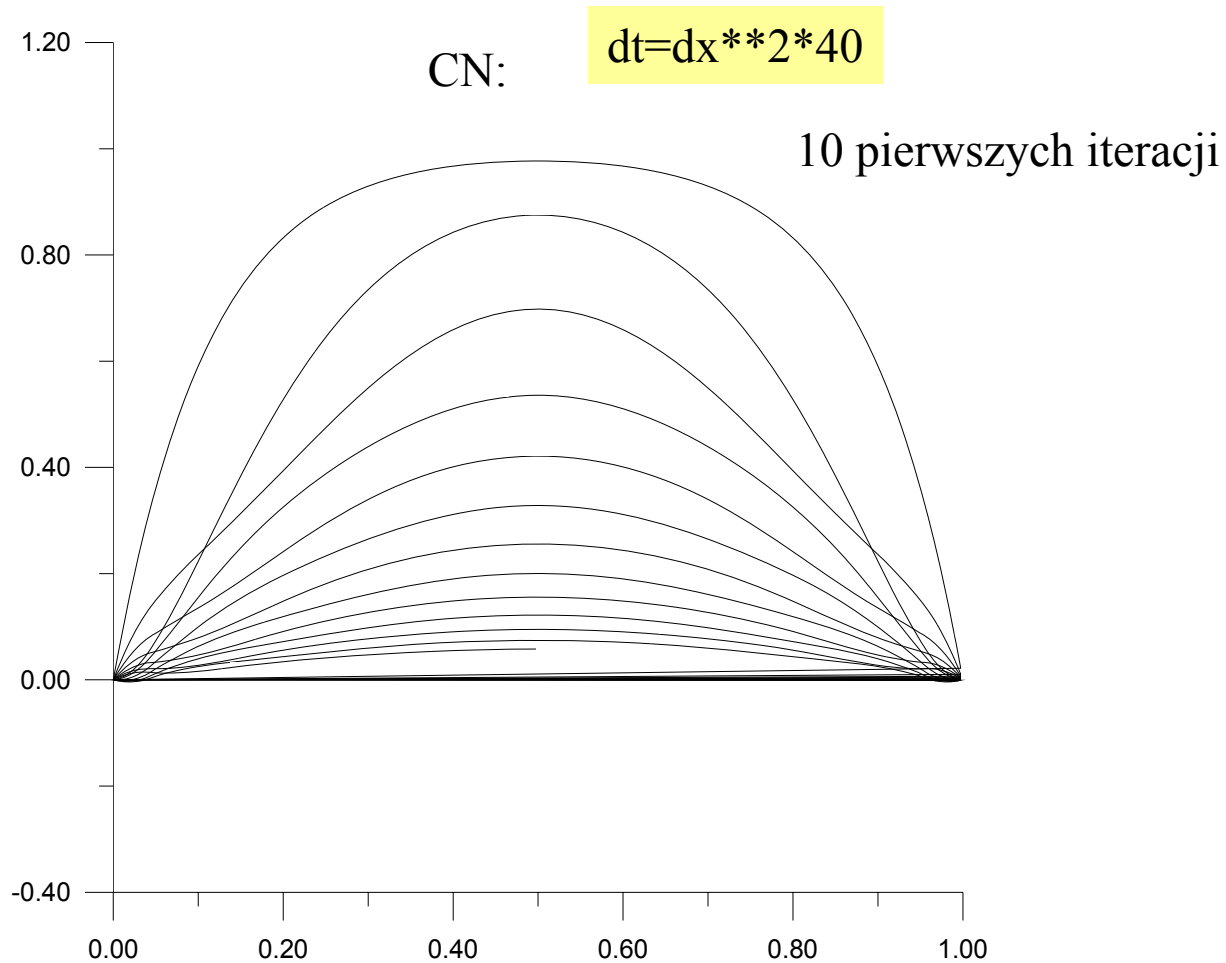
$$A2 = \frac{1}{30} h \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \frac{D dt}{h} \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

`C:=multiply(inverse(A1),A2);`

`eigenvalues(C);`

$$1, -\frac{30 D dt - h^2}{30 D dt + h^2}, -\frac{6 D dt - h^2}{h^2 + 6 D dt}$$

wszystkie ww nie większe od 1: CN jest bezwarunkowo stabilny
nie ma ograniczenia na krok czasowy!



CN: pozwoli na rachunki również dla lokalnie drobnej siatki
bo rozmiar elementów nie nakłada ograniczenia
na stabilność metody ES

równanie dynamiczne (falowe)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(t + dt) + u(t - dt) - 2u(t)}{dt^2}$$

$$u(t + dt) = dt^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u(t) - u(t - dt) \quad \text{schemat Verleta}$$

równanie dynamiczne (falowe)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(t + dt) + u(t - dt) - 2u(t)}{dt^2}$$

$$u(t + dt) = dt^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u(t) - u(t - dt) \quad \text{schemat Verleta}$$

$$u(t) = \sum_j c_j(t) \phi_j(x)$$

$$\sum_j c_j(t + dt) \phi_j(x) = \sum_j c_j(t) (dt^2 \phi_j''(x) + 2\phi_j(x)) - \sum_j c_j(t - dt) \phi_j(x)$$

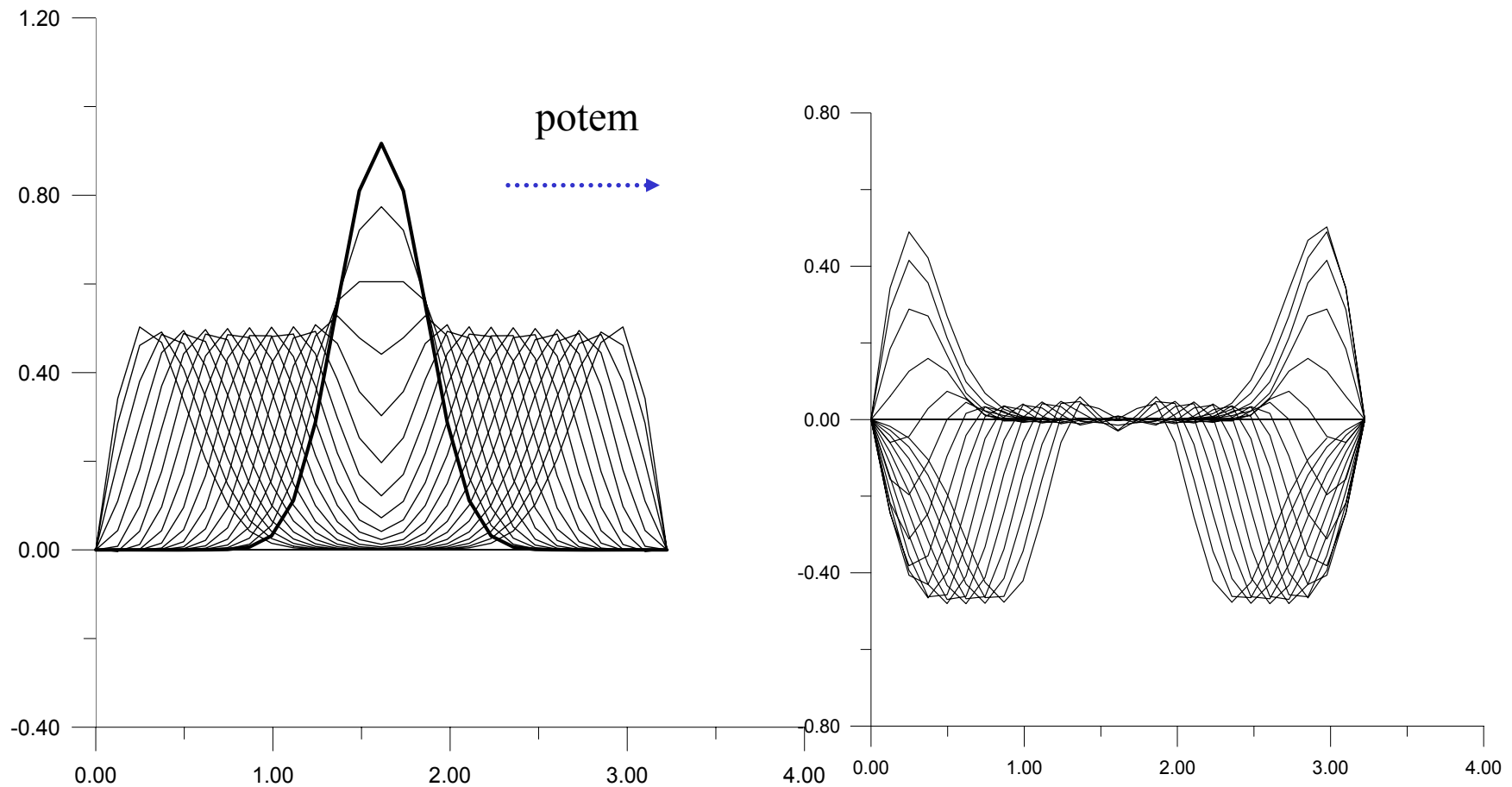
$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

Schemat jest dwukrokowy jak w MRS

Aplikacja: struna z zamocowanymi na sztywno końcami
Linijowe funkcje kształtu

27 węzłów

prędkość początkowa 0



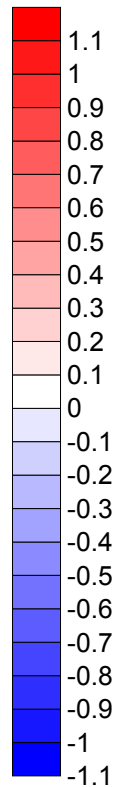
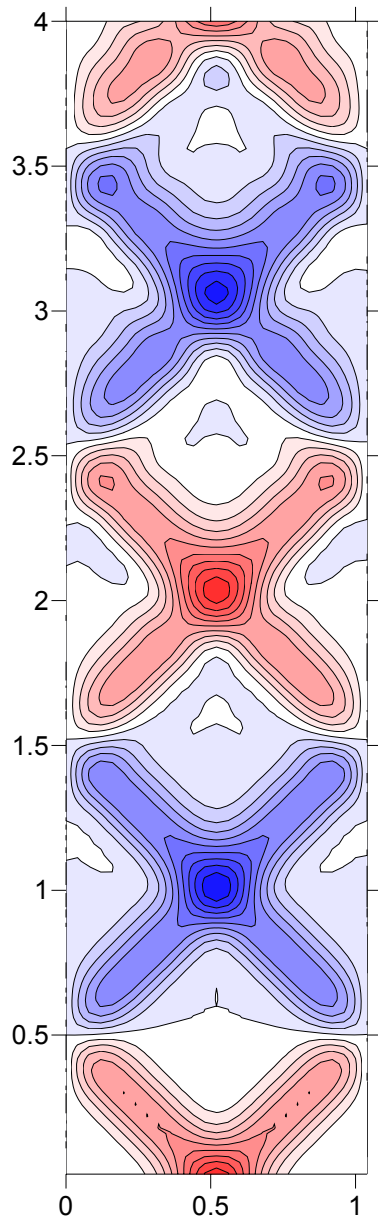
wyniki dla $dt=dx/2$ Uwaga dla $dt=dx$ (krok CFL) niestabilność (a Verlet w MRS był stabilny !)
niestabilność nawet dla 300 elementów

27 węzłów

$dt=dx/2$

MES

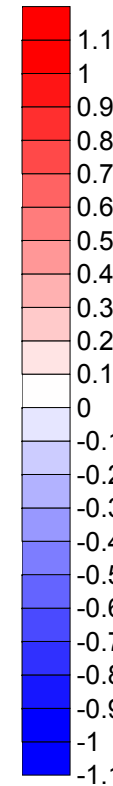
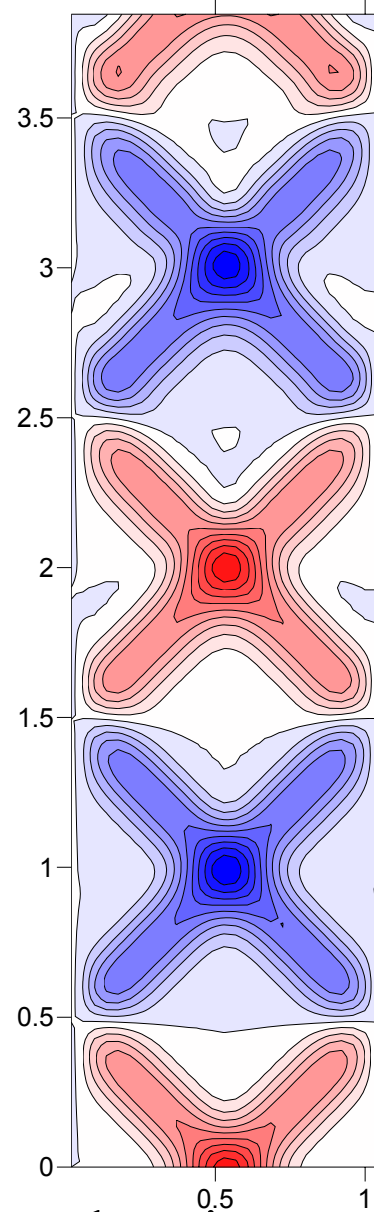
funkcje liniowe
nie trzyma kształtu
i nieokresowy



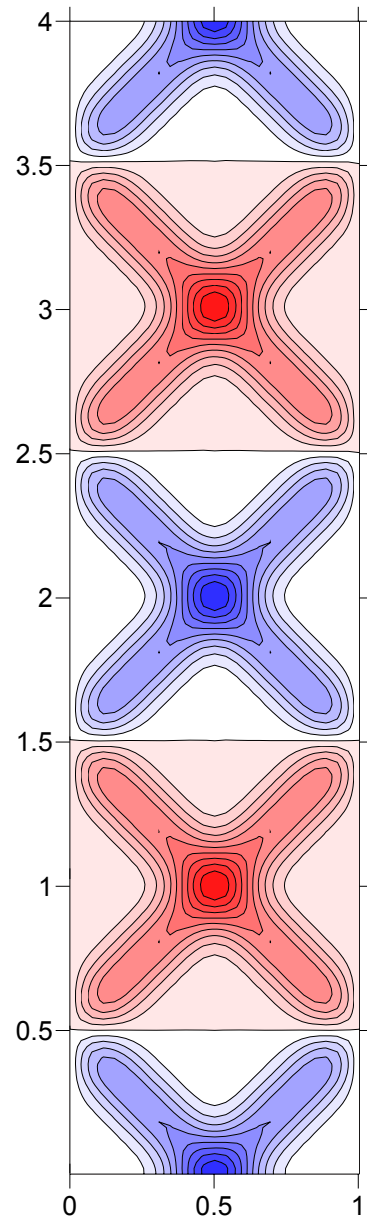
$dt=dx/2$

MRS

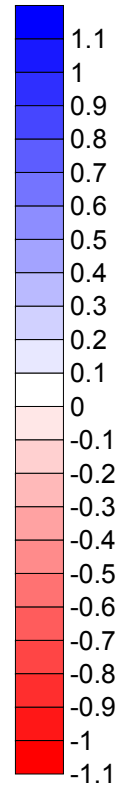
podobne błędy
ale nieco lepiej!



Verlet w MES sprawdza się gorzej niż w MRS ☹️



$dt=dx/2$
MES, 250 węzłów



MES jest przynajmniej zbieżny

Czy musi być tak źle?

Analiza stabilności dla metod dwukrokowych, równanie falowe, liniowe funkcje kształtu.

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

równanie dla pojedynczego elementu (funkcje liniowe)

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t + dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t - dt)$$

Czy musi być tak źle?

Analiza stabilności dla metod dwukrokowych, równanie falowe, liniowe funkcje kształtu.

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

równanie dla pojedynczego elementu (funkcje liniowe)

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t + dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t - dt)$$

wg tego co wiemy, powinniśmy skonstruować macierz iteracji

$\mathbf{u} := \mathbf{A}\mathbf{u}$

dla metod jednokrokowych nie było problemu

jak skonstruować macierz \mathbf{A} teraz?

nawet jeśli się da, łatwiej jest problem ominąć

wektory własne macierzy \mathbf{A} = baza w przestrzeni wektorów 2D

Każdy z wektorów da się przedstawić jako kombinację liniową wektorów własnych

wynik działania \mathbf{A} na \mathbf{u} : $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$

czyli:

wystarczy jeśli zbadamy $u(t) = \lambda u(t-dt)$

$$u(t+dt) = \lambda^2 u(t-dt)$$



$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

czyli:

wystarczy jeśli zbadamy $u(t) = \lambda u(t-dt)$

$$u(t+dt) = \lambda^2 u(t-dt)$$



$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

dojdziemy do jednorodnego URL

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \lambda^2 \mathbf{u}(t-dt) = \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \lambda \mathbf{u}(t-dt) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \lambda^2 \mathbf{u}(t-dt) = \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \lambda \mathbf{u}(t-dt) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

jednorodny układ równań

$$\mathbf{B}u(t-dt)=0$$

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \lambda^2 \frac{h}{3} + \frac{\lambda dt^2}{h} - \frac{2\lambda h}{3} + \frac{h}{3}$$

$$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{21} = \lambda^2 \frac{h}{6} - dt^2 \frac{\lambda}{h} - \frac{\lambda h}{3} + \frac{h}{6}$$

żeby UR miał rozwiązanie inne poza $u=0$ trzeba aby $\det(\mathbf{B})=0$.

warunek zerowania wyznacznika da nam wartości własne macierzy iteracji

$$\det \mathbf{B}=0$$

$$B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}=0$$

$$B_{11} = B_{22} = \lambda^2 \frac{h}{3} + \frac{\lambda dt^2}{h} - \frac{2\lambda h}{3} + \frac{h}{3}$$

$$B_{12} = B_{21} = \lambda^2 \frac{h}{6} - dt^2 \frac{\lambda}{h} - \frac{\lambda h}{3} + \frac{h}{6}$$

$$B_{11} = \pm B_{12}$$

weźmy minus : wyraz z dt^2 ulegnie skróceniu, przemnożymy obustronnie przez 6 i

$$2\lambda^2 h - 4\lambda h + 2h = -\lambda^2 h + 2\lambda h - h$$

$$3\lambda^2 h - 6\lambda h + 3h = 0$$

$$3h(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda=1$$

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \lambda^2 \frac{h}{3} + \frac{\lambda dt^2}{h} - \frac{2\lambda h}{3} + \frac{h}{3}$$

$$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{21} = \lambda^2 \frac{h}{6} - dt^2 \frac{\lambda}{h} - \frac{\lambda h}{3} + \frac{h}{6}$$

$$\mathbf{B}_{11} = + \mathbf{B}_{12}$$

przemnożymy obustronnie przez $6h$

$$2\lambda^2 h^2 + 6\lambda dt^2 - 4\lambda h^2 + 2h^2 = \lambda^2 h^2 - dt^2 6\lambda - 2\lambda h^2 + h^2$$

$$\lambda^2 h^2 + 12\lambda dt^2 - 2\lambda h^2 + h^2 = 0$$

$$\Delta = (12dt^2 - 2h^2)^2 - 4h^4 = 12^2 dt^4 - 48h^2 dt^2 + 4h^4 - 4h^4 = 16(9dt^4 - 3h^2 dt^2)$$

$$\lambda = \frac{2h^2 - 12dt^2 \pm 4\sqrt{9dt^4 - 3h^2 dt^2}}{2h^2}$$

$$\lambda = \frac{2h^2 - 12dt^2 \pm 4\sqrt{9dt^4 - 3h^2dt^2}}{2h^2}$$

wartość pod pierwiastkiem: czy jesteśmy powyżej czy poniżej zera?

$$\lambda = \frac{2h^2 - 12dt^2 \pm 4\sqrt{9dt^4 - 3h^2dt^2}}{2h^2}$$

wartość pod pierwiastkiem: czy jesteśmy powyżej czy poniżej zera.

z rachunków numerycznych dostaliśmy stabilne wyniki dla $dt=h/2$

wtedy $9h^4/16 - 12h^4/16 < 0$,

gdy dt będzie niżej pod pierwiastkiem stać będzie wartość bardziej ujemna

$$\lambda = \frac{2h^2 - 12dt^2 \pm 4\sqrt{9dt^4 - 3h^2dt^2}}{2h^2}$$

wartość pod pierwiastkiem: czy jesteśmy powyżej czy poniżej zera.

z rachunków numerycznych dostaliśmy stabilne wyniki dla $dt=h/2$

wtedy $9h^4/16 - 12h^4/16 < 0$,

gdy dt będzie niżej pod pierwiastkiem stać będzie wartość bardziej ujemna

pierwiastek jest urojony, wtedy moduł $|\lambda|^2$

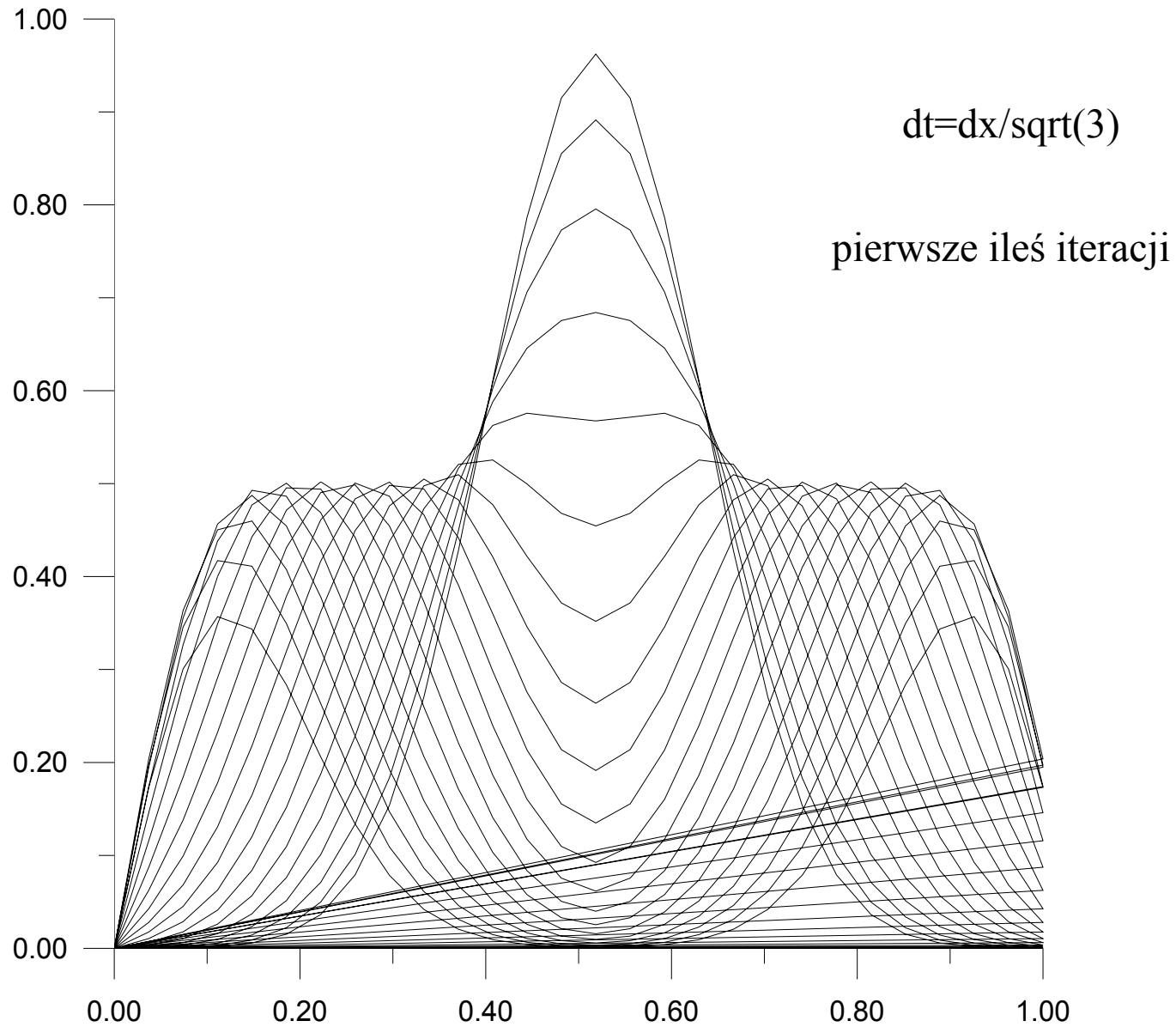
dla stabilności
wystarczy

$$\frac{(-12dt^2 + 2h^2)^2 + 16(9dt^4 - 3dt^2h^2)}{4h^4} \leq 1$$

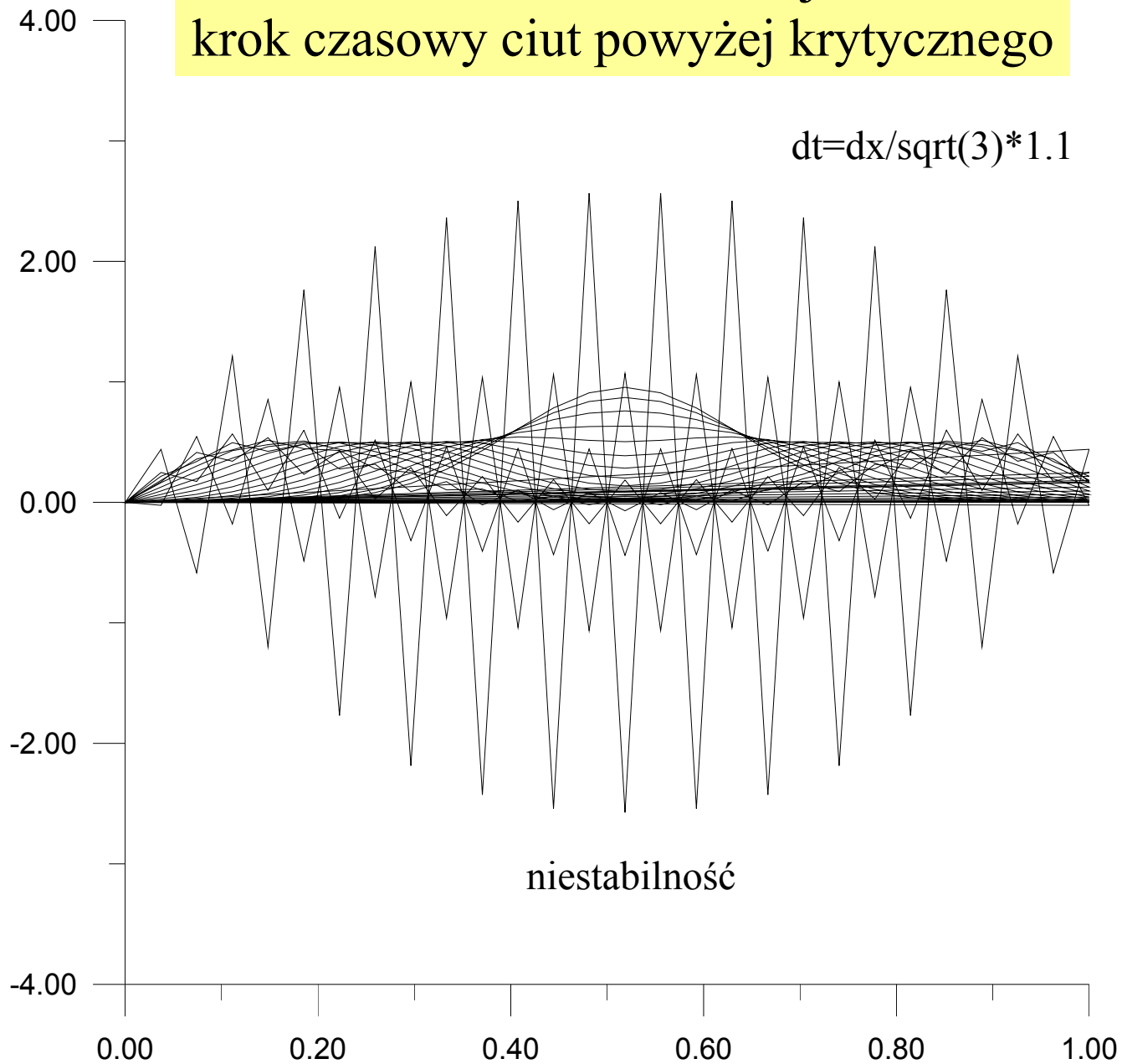
$$144 dt^4 - 48dt^2h^2 + 144dt^4 - 48dt^2h^2 \leq 0 \quad \longrightarrow \quad 3dt^2 \leq h^2 \quad \longrightarrow \quad dt \leq h/\sqrt{3} = 0.577 h$$

dostaliśmy graniczną wartość dt , dla której delta równania kwadratowego=0,
dla większych dt – pierwiastek z delta rzeczywisty, jedna z wartości
własnych staje się większa, a druga mniejsza od jedynki

Verlet w MES liniowe funkcje kształtu
krytyczny dla stabilności krok czasowy



Verlet w MES liniowe funkcje kształtu
krok czasowy ciut powyżej krytycznego



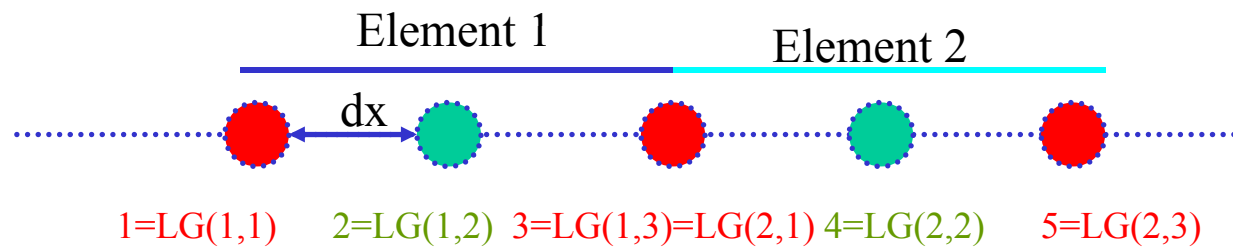
dla równania falowego

Verlet w MES z funkcjami linowymi stabilny dla $c\Delta t \leq dx/\sqrt{3}$

podczas gdy Verlet w MRS $c\Delta t \leq dx$

czy pomogą lepsze funkcje kształtu?

MES, równanie falowe
kwadratowe funkcje kształtu, składanie macierzy



$$\begin{aligned} \phi_1 &= \xi(\xi - 1)/2 \\ \phi_2 &= -(\xi - 1)(\xi + 1) \\ \phi_3 &= \xi(\xi + 1)/2 \end{aligned}$$

struna podzielona na elementy, zbudowana tablica nadająca numer globalny dla danego numeru elementu i numeru węzła

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

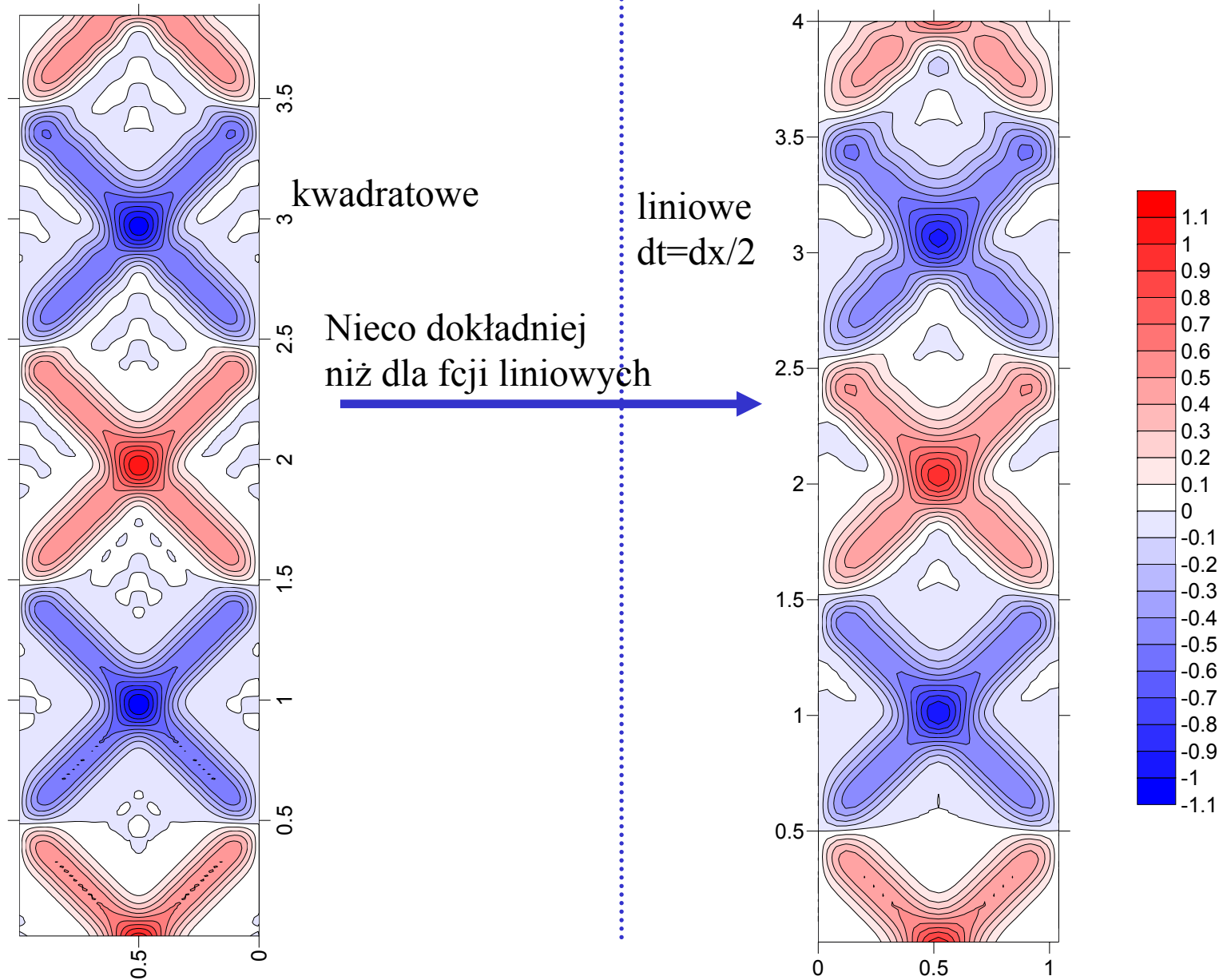
do rozwiązania będzie to samo równanie
macierze wygodniej już składać, tak jak w problemach niezależnych od czasu

$$O_{ij}^m = (\phi_i^m, \phi_j^m) = \frac{h_m}{30} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad E_{ij}^m = (\phi_i^m, (\phi_j^m)'') = \frac{1}{3h_m} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

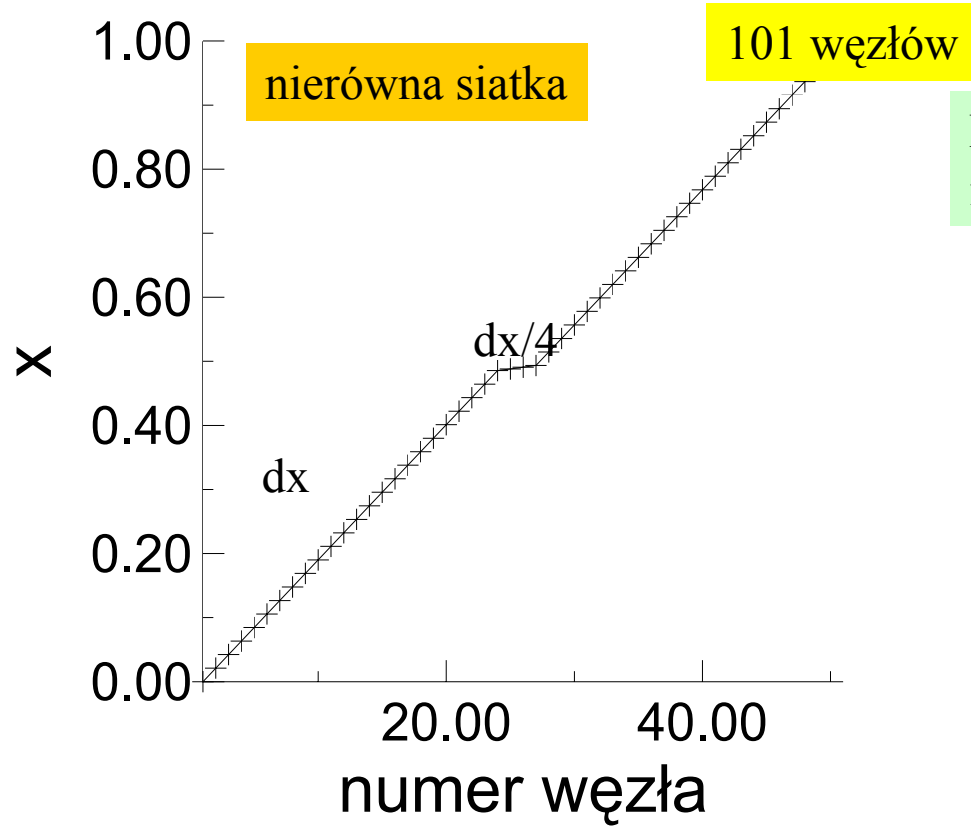
globalne macierze składane podobnie jak w metodzie niezależnej od czasu

27 węzłów (13 elementów) $dt=dx/2$
(wciąż niestabilne dla $dt=dx$)

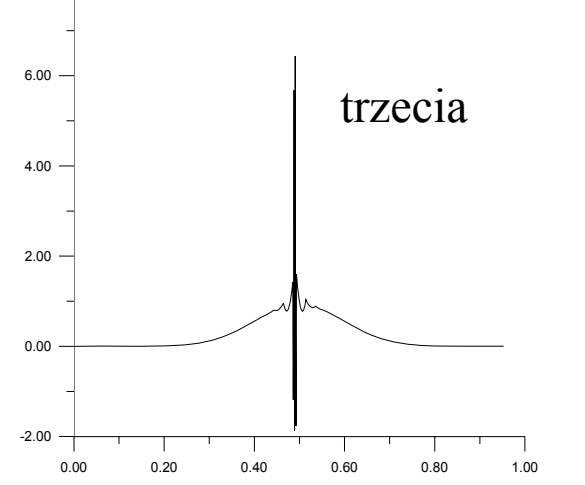
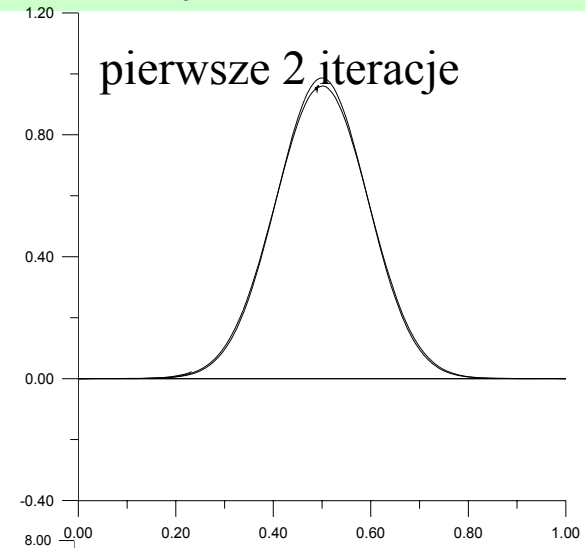
Analiza Ironsa dla kwadratowych fk: również $dx/\sqrt{3}$ na krok krytyczny



stabilność a nierównomierna (zaadaptowana) siatka

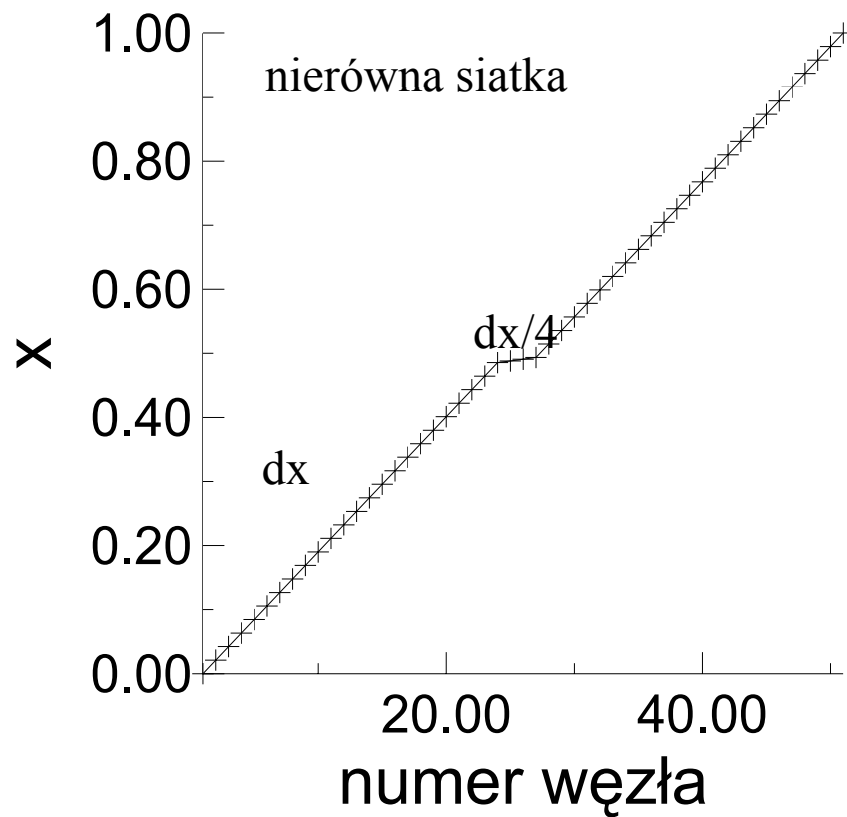


FEM ze schematem Verleta $dt=dx/\sqrt{3}$
i kwadratowymi FK

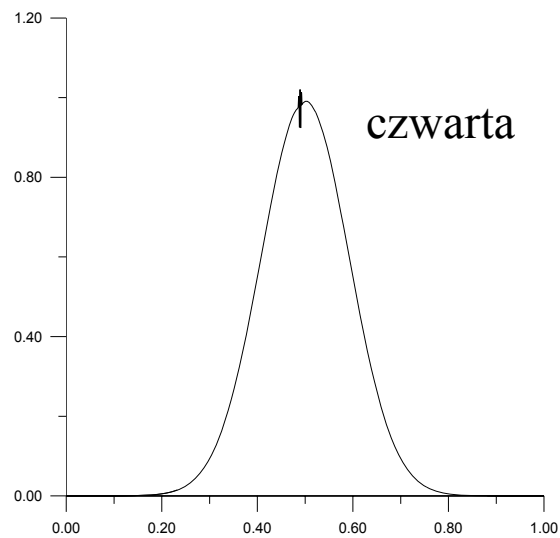
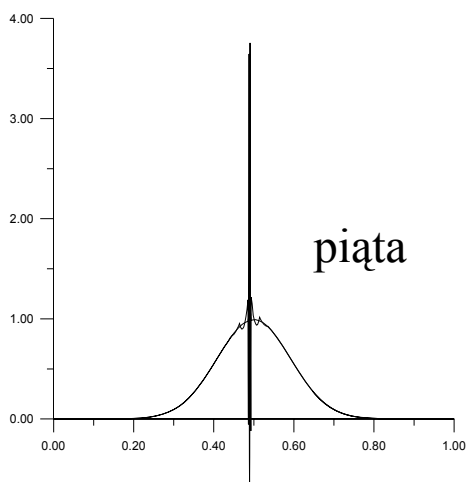
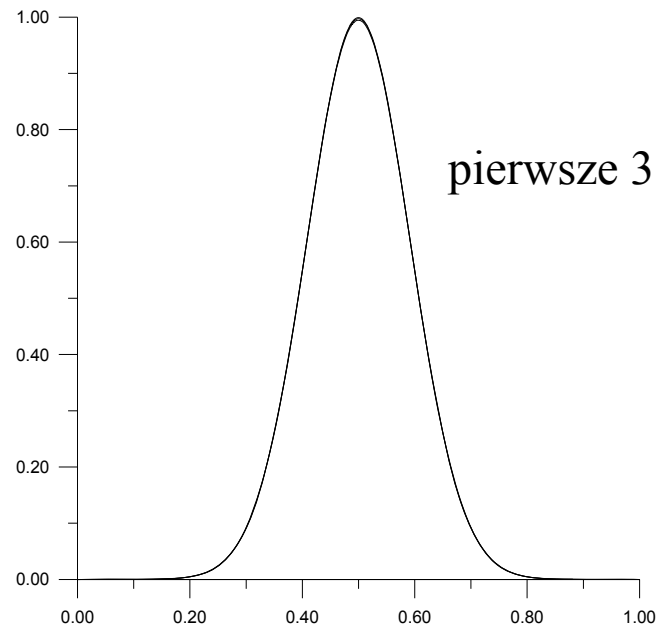


W środku pudła 4 elementy
o długości $dx/4$

101 węzłów

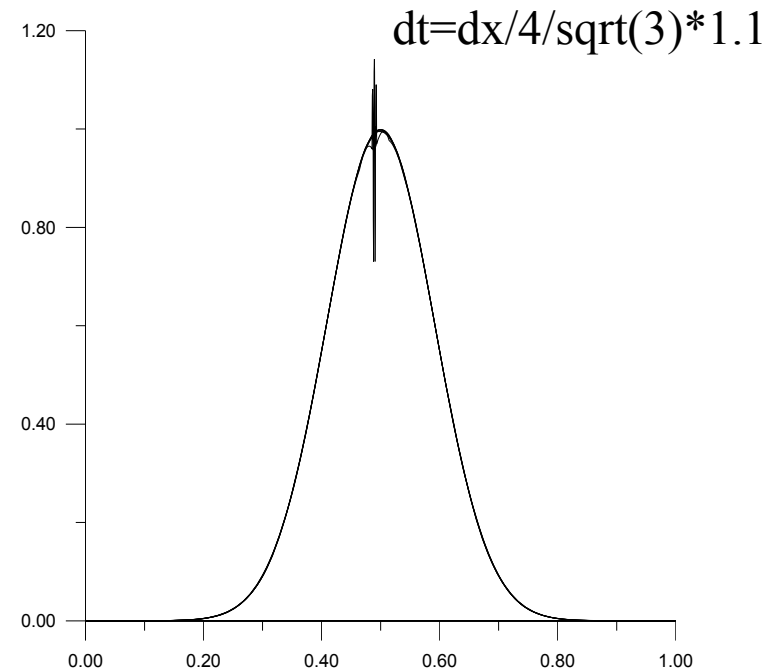
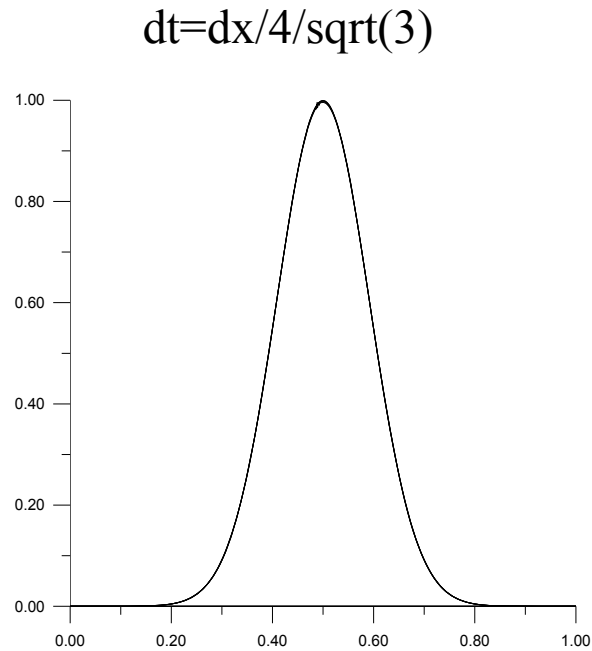


FEM ze schematem Verleta $dt=dx/(\sqrt{3})3.9$



FEM ze schematem Verleta i kwadratowymi FK

101 węzłów



Twierdzenie Ironsa: odczytane ponownie = o stabilności decyduje najmniejszy z elementów ustawia dt czytaj: *sztywność*

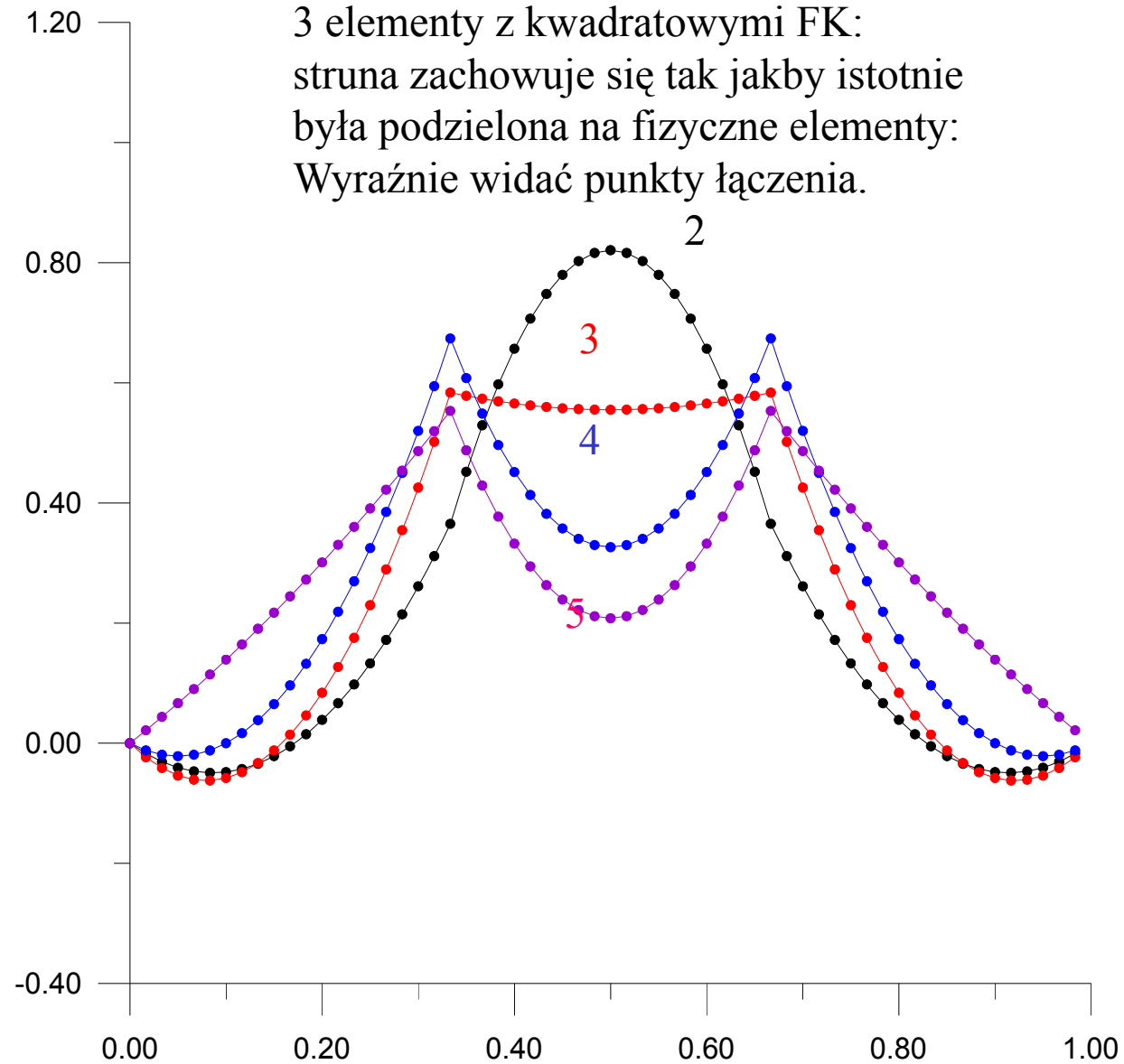
najmniejszy element (minimalny h) narzucają na dt
najsilniejsze: ograniczenie $dt < dx/4/\sqrt{3}$ [tw. Ironsa]

równanie falowe:

3 elementy z kwadratowymi FK:

struna zachowuje się tak jakby istotnie
była podzielona na fizyczne elementy:

Wyraźnie widać punkty łączenia.



w MES „bezwładność” posiadają elementy na całej ich długości
w MRS bezwładność sprowadzona jest do punktów (węzłów)

Technika (*manipulacja*) *mass lumping* (*lump*=brykiet) = masa (bezwładność) elementu sprowadzona do węzłów

w MES „bezwładność” posiadają elementy na całej ich długości
w MRS bezwładność sprowadzona jest do punktów (węzłów)

Technika (*manipulacja*) *mass lumping* (*lump*=brykiet) = masa (bezwładność) elementu sprowadzona do węzłów

technika upodabniająca MES do MRS w celu
zwiększenia dopuszczalnego kroku czasowego
w **macierzy masy** $\mathbf{O}(\phi_k \phi_\varphi)$ na diagonalu wstawiamy sumę
elementów z danego wiersza, resztę zerujemy

dla elementów o równej długości i liniowych funkcjach
kształtu MES + *mass lumping* = MRS

w MES „bezwładność” posiadają elementy na całej ich długości
w MRS bezwładność sprowadzona jest do punktów (węzłów)

Technika (*manipulacja*) *mass lumping* (*lump*=brykiet) = masa (bezwładność) elementu sprowadzona do węzłów

technika upodabniająca MES do MRS w celu
zwiększenia dopuszczalnego kroku czasowego
w **macierzy masy** $\mathbf{O}(\phi_k, \phi_j)$ na diagonalu wstawiamy sumę
elementów z danego wiersza, resztę zerujemy

dla elementów o równej długości i liniowych funkcjach
kształtu MES + *mass lumping* = MRS

równanie falowe:

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t + dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t - dt)$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t + dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t - dt)$$

po złożeniu (4 elementy):

$$M := \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t + dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t - dt)$$

po złożeniu (4 elementy):

$$M := \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

po zbrykietowaniu masy:

$$M := h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t + dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t - dt)$$

po złożeniu (4 elementy):

$$M := \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{po zbrykietowaniu masy:} \quad M := h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dla węzłów (poza brzegowymi):

$$h c_k(t+dt) = dt^2 [-2/h c_k(t) + 1/h c_{k-1}(t) + 1/h c_{k+1}(t)] + 2h c_k(t) - h c_k(t-dt)$$

$$[c_k(t+dt) - 2c_k(t) + c_k(t-dt)] / dt^2 = 1/h [-2/h c_k(t) + 1/h c_{k-1}(t) + 1/h c_{k+1}(t)]$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t + dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t - dt)$$

po złożeniu (4 elementy):

$$M := \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{po zbrykietowaniu masy:} \quad M := h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dla węzłów (poza brzegowymi):

$$h c_k(t+dt) = dt^2 [-2/h c_k(t) + 1/h c_{k-1}(t) + 1/h c_{k+1}(t)] + 2h c_k(t) - h c_k(t-dt)$$

$$[c_k(t+dt) - 2c_k(t) + c_k(t-dt)] / dt^2 = 1/h [-2/h c_k(t) + 1/h c_{k-1}(t) + 1/h c_{k+1}(t)]$$

$c''_{tt} = c''_{xx}$ w MRS (Verlet) z centralnymi ilorazami różnicowymi
z ograniczeniem na krok czasowy jak dla MRS - Verleta

Działanie przeciwne do brykietowania masy:
Uciąglenie pochodnej na granicy elementów

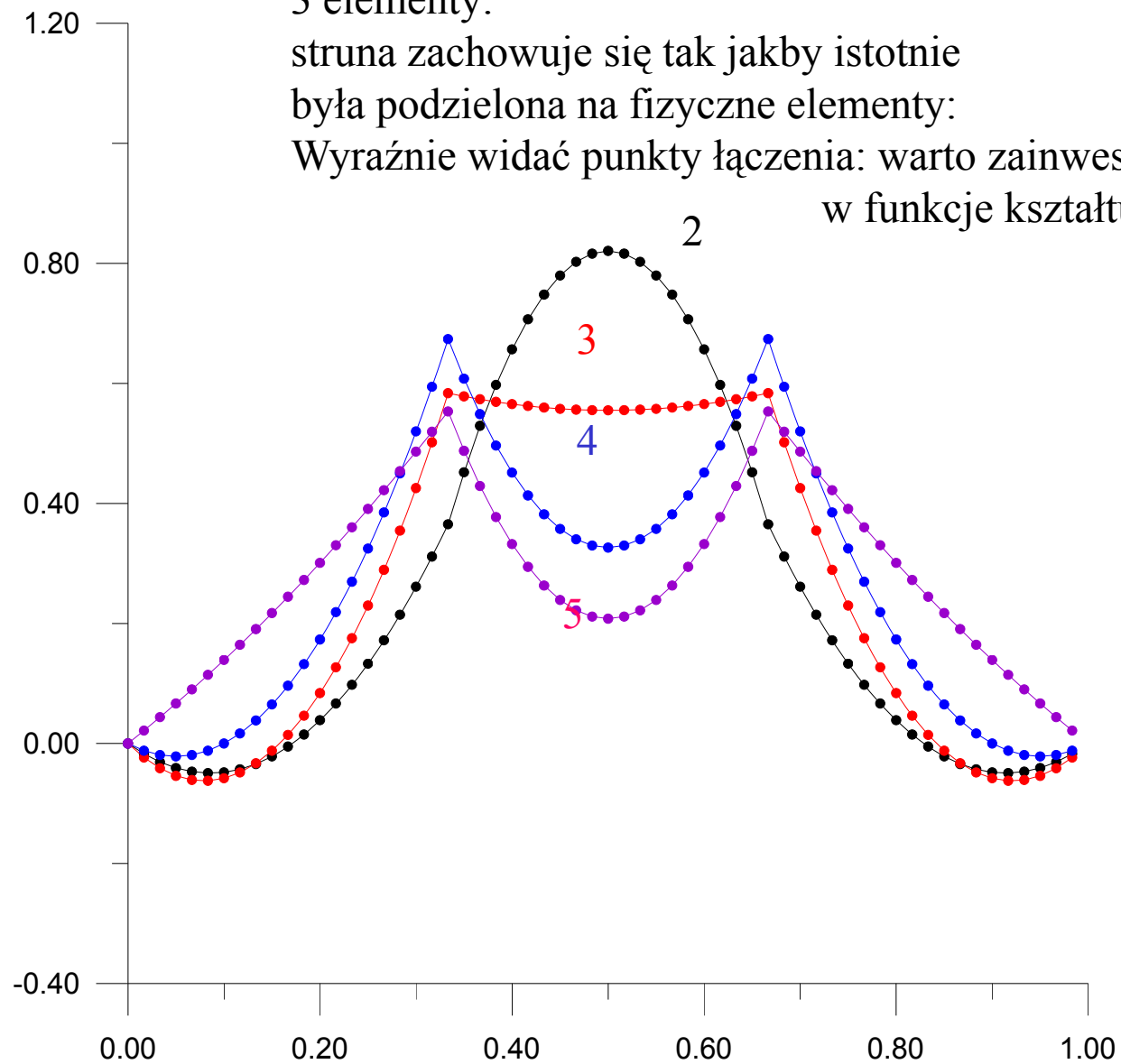
3 elementy:

struna zachowuje się tak jakby istotnie

była podzielona na fizyczne elementy:

Wyraźnie widać punkty łączenia: warto zainwestować

w funkcje kształtu Hermita



równanie falowe

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j (dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + u_2^1 \phi_2^1(\xi)$$

$$\phi_1^0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3$$

$$\phi_1^1 = \frac{J_m}{4} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

$$\phi_2^0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

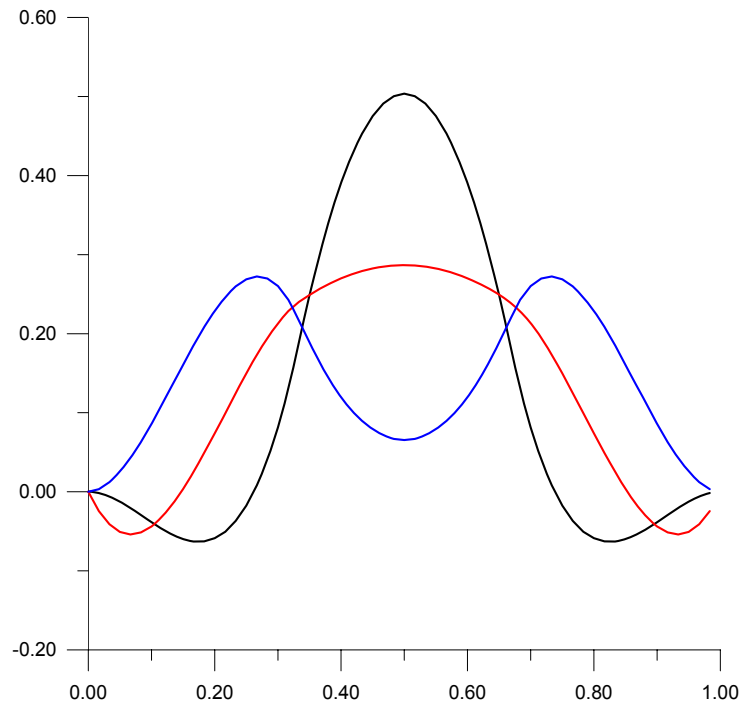
$$\phi_2^1 = \frac{J_m}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

$$E_{ij}^m = \frac{1}{30J_m} \begin{pmatrix} -18 & -3J_m & 18 & -3J_m \\ -3J_m & -8J_m^2 & 3J_m & 2J_m^2 \\ 18 & 3J_m & -18 & 3J_m \\ -3J_m & 2J_m^2 & 3J_m & -8J_m^2 \end{pmatrix} \quad (\phi_i \phi_j'')$$

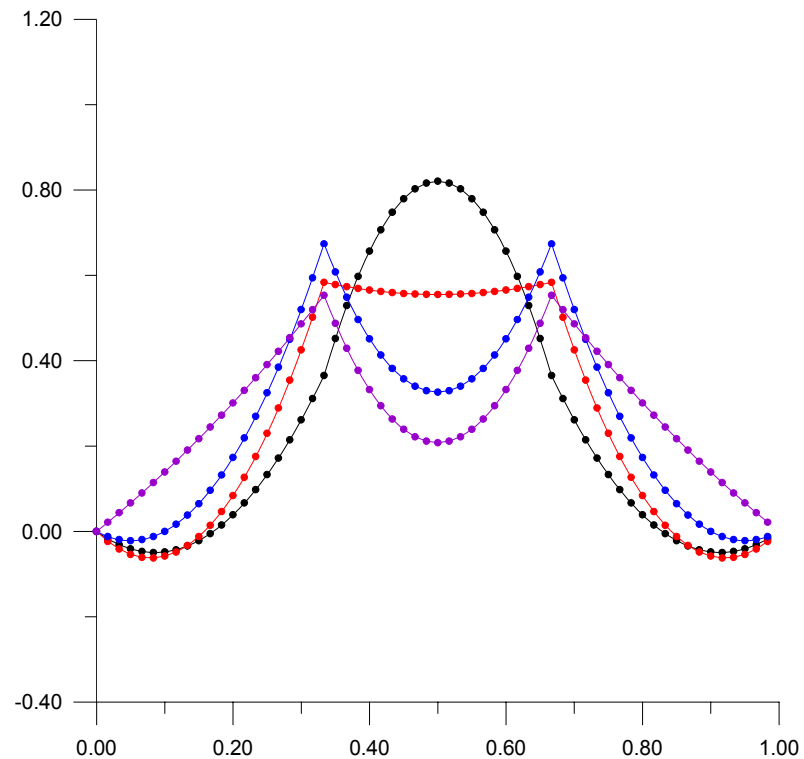
$$O_{ij}^m = \frac{J_m}{105} \begin{pmatrix} 78 & 22J_m & 27J_m & -13J_m \\ 22J_m & 8J_m^2 & 13J_m & -6J_m^2 \\ 27 & 13J_m & 78 & -22J_m \\ -13J_m & -6J_m^2 & -27J_m & 8J_m^2 \end{pmatrix}$$

drżania złożonej z 3 elementów struny
dla różnych funkcji kształtu (zdjęcia z kolejnych chwil czasowych)

3 elementy, struna, funkcje Hermitea

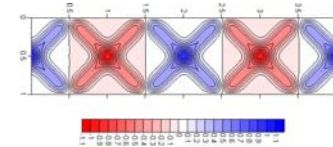


3 elementy, struna
funkcje Lagrange

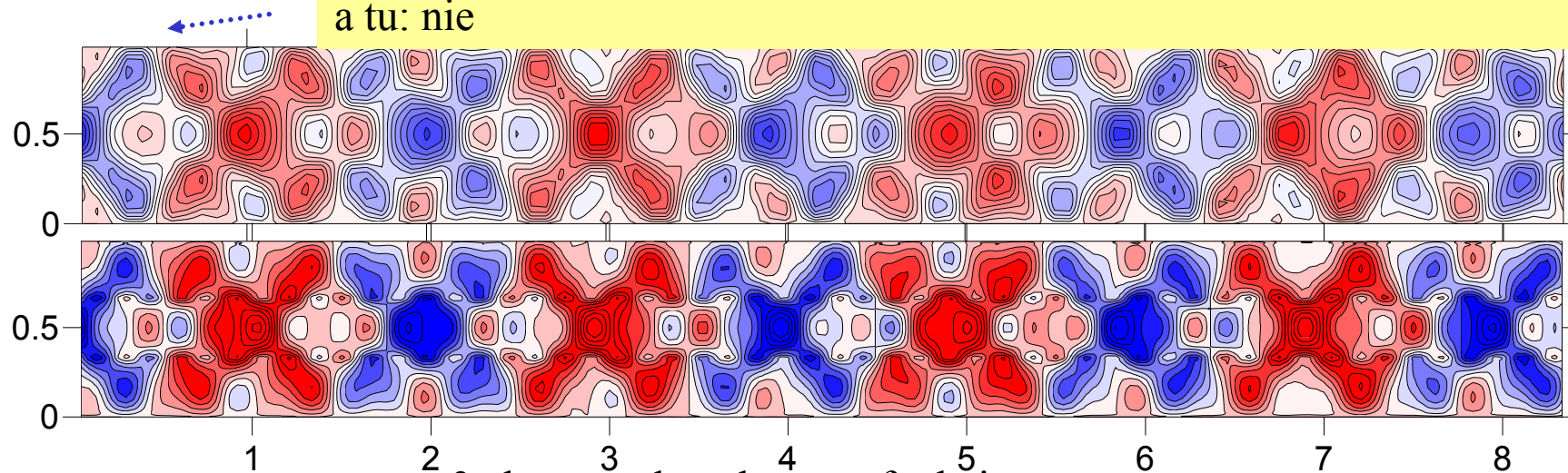


drgania złożonej z 3 elementów struny
dla różnych funkcji kształtu (zdjęcia z kolejnych chwil czasowych)

3 elementy kubiczne sklejki Hermitea



w rozwiązaniu dokładnym granica: niebieskie / czerwone jest jak nożem uciał
a tu: nie



3 elementy kwadratowe funkcje
kształtu Lagrange'a

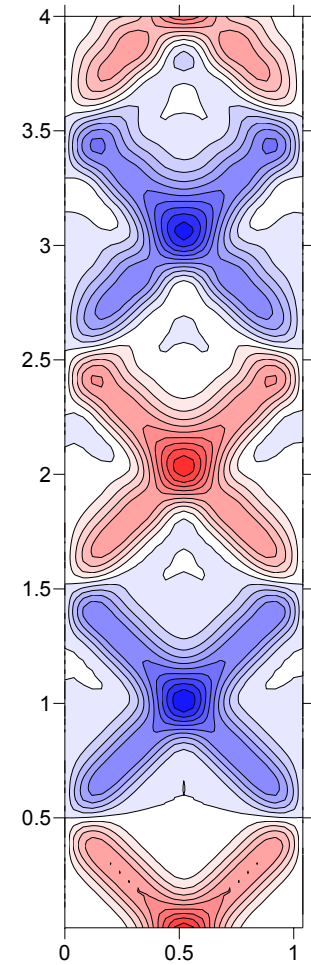
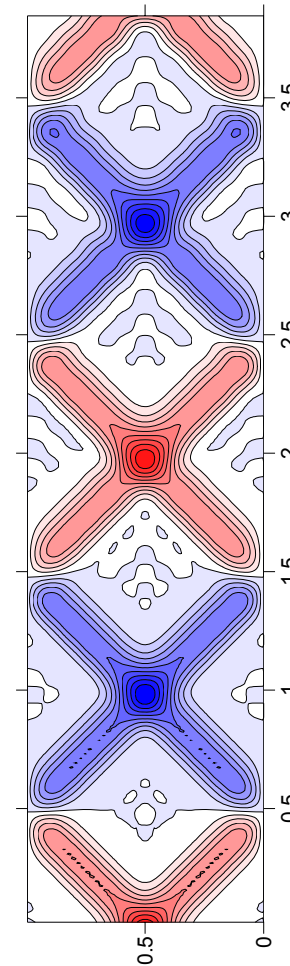
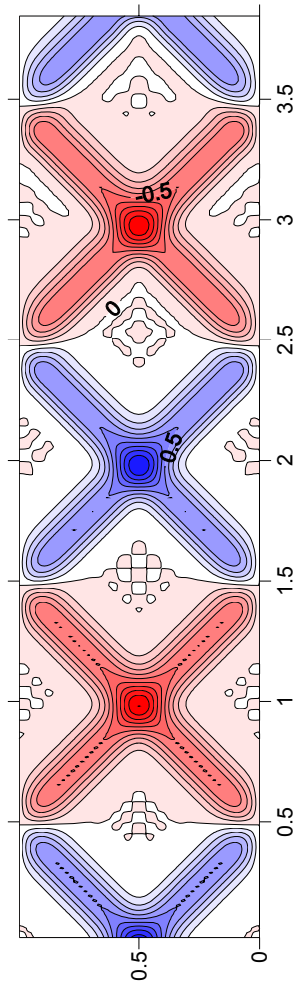
Ten sam krok czasowy, tyle samo parametrów węzłowych

ALE:Hermit: stabilny dopiero dla $dt=dx/4!$
13 elementów, 28 parametrów węzłowych
tutaj dx 2 razy większe niż obok

27 węzłów (13 elementów) $dt=dx/2$
(wciąż niestabilne dla $dt=dx$)

kwadratowe Lagrangea

liniowe
(przy tym samym
rozkładzie węzłów)



Wiedza jaką nabyliśmy do tej pory na podstawie rachunków dla równania adwekcji, dyfuzji i falowego:

MES zależne od czasu buduje się na podstawie schematów dla MRS.

Schematy jawne MRS generują schematy MES, które nie działają jak podstawienie.
Ponadto: uzyskane schematy są stabilne z ostrzejszym ograniczeniem na krok czasowy niż w MRS.

Ograniczenie na krok czasowy dane przez krok przestrzenny jest bardzo złą informacją dla MES bo nie pozwala na efektywne rachunki przy zoptymalizowanej (lokalnie zagęszczonej) siatce.

Budowa schematów MES na jawnych MRS nie ma sensu.
Bazować należy na niejawnym schematach MRS, które przeniesione do MES działają bez ograniczenia na krok czasowy.

Odpowiednik CN dla równania falowego:
schemat Newmarka

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma)a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2)a(t-dt)]$$

γ, β – parametry metody

a : przyspieszenie

Verlet $\gamma=1/2, \beta=0$ ograniczony
przez CFL $cdt \leq dx$

w MRS widzieliśmy, że
Newmark z $\gamma=1/2$ i $\beta=1/4$ – stabilny dla
dowolnego dt .

[Pamiętamy, że dla Newmarka: im mniejsze
beta tym lepiej: beta wprowadzało sztuczna
dyssypacje (przydatną bo stabilizującą
schemat)]

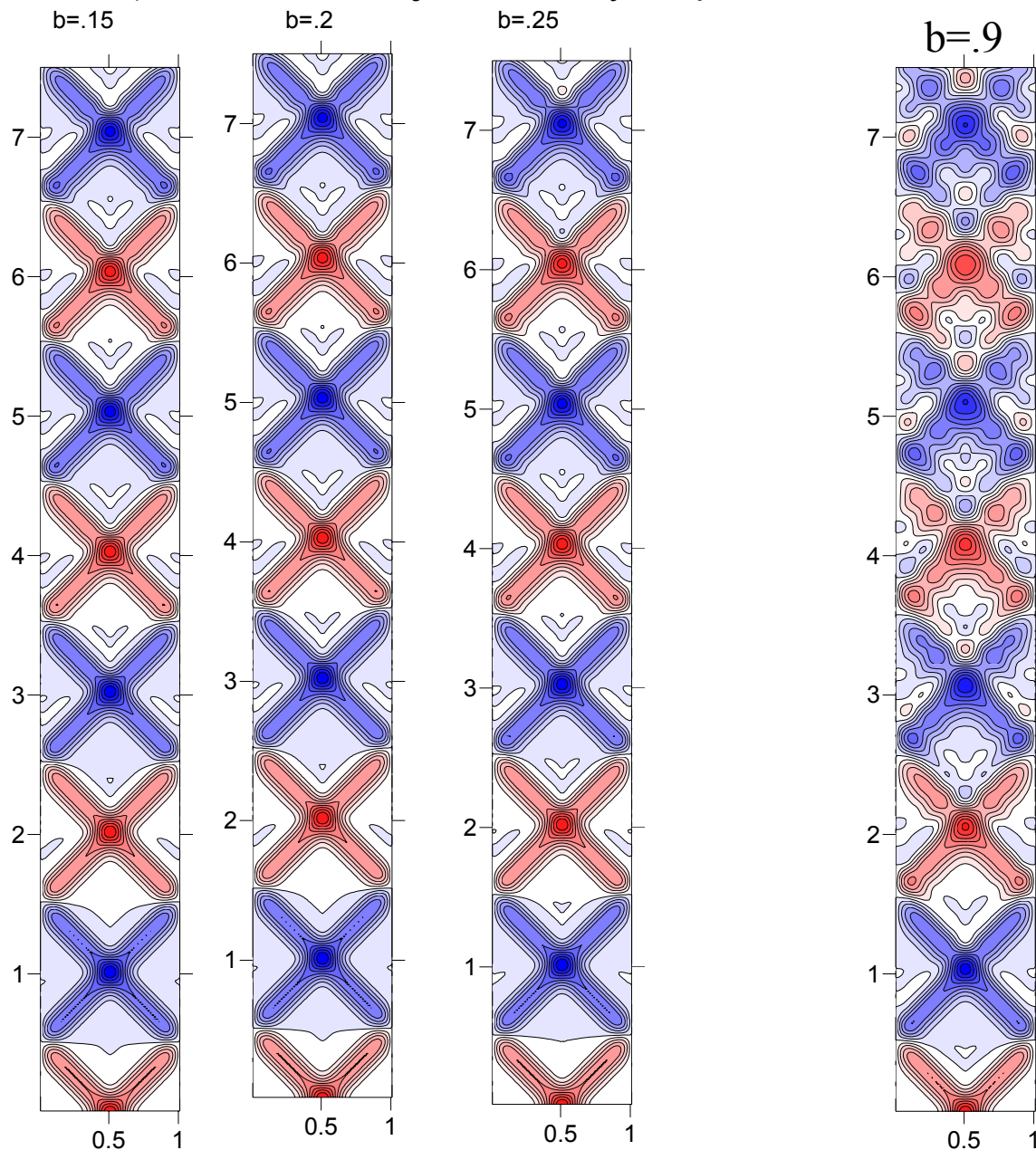
dla falowego:
 $a = c^2 u_{xx}$ [$c=1$]

poza CFL: $dt > cdx$

$dt=1.5dx$,

$\gamma=0.5$, schemat staje się stabilny dla $\beta > 0.15$

101 węzłów MRS



przypomnienie

rosnące β generuje
wyższe częstotliwości
wniosek:
najlepszy minimalne
 β przy którym
schemat jeszcze stabilny

MES, równanie falowe, schemat Newmarka

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma)a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2)a(t-dt)]$$

Verlet = stabilność MES dla $cdt < dx/\sqrt{3}$

pytanie: Jak duże beta, żeby FEM był stabilny dla $cdt = dx$?

$\gamma = 1/2$ (fiksujemy)

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1 - 2\beta)a(t) + \beta a(t-dt)]$$

$$u(t+dt) - dt^2 \beta a(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [(1 - 2\beta)a(t) + \beta a(t-dt)]$$

$$a(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$$

$$\sum_j ((\phi_k, \phi_j) - dt^2 \beta (\phi_k, \phi_j'')) u_j(t + dt) =$$

$$\sum_j (2(\phi_k, \phi_j) + dt^2 (1 - 2\beta) (\phi_k, \phi_j'')) u_j(t) + \sum_j (-(\phi_k, \phi_j) + dt^2 \beta (\phi_k, \phi_j'')) u_j(t - dt)$$

dla jednego elementu, z u = wektorem własnym macierzy iteracji $u(t+dt) = \lambda^2 u(t-dt)$,

$$u(t) = \lambda u(t-dt)$$

$$\sum_j ((\phi_k, \phi_j) - dt^2 \beta (\phi_k, \phi_j'')) u_j(t + dt) =$$

$$\sum_j (2(\phi_k, \phi_j) + dt^2 (1 - 2\beta) (\phi_k, \phi_j'')) u_j(t) + \sum_j (-(\phi_k, \phi_j) + dt^2 \beta (\phi_k, \phi_j'')) u_j(t - dt)$$

$$(A - dt^2 \beta B) \lambda^2 u = \lambda (2A + dt^2 (1 - 2\beta) B) u + (-A + dt^2 \beta B) u$$

liniowe funkcje kształtu:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix}$$

weźmy $cdt=h$ (przypominamy, że $c=1$)

$$(A - dt^2 \beta B) \lambda^2 u = \lambda(2A + dt^2(1 - 2\beta)B)u + (-A + dt^2 \beta B)u$$

> C:=lambda**2*matadd(A,-beta*h**2*B);

$$C = \lambda^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3}h + h\beta & \frac{1}{6}h - h\beta \\ \frac{1}{6}h - h\beta & \frac{1}{3}h + h\beta \end{bmatrix}$$

> DD:=lambda*matadd(2*A,h**2*(1-2*beta)*B);

$$DD = \lambda \begin{bmatrix} \frac{2}{3}h - h(1-2\beta) & \frac{1}{3}h + h(1-2\beta) \\ \frac{1}{3}h + h(1-2\beta) & \frac{2}{3}h - h(1-2\beta) \end{bmatrix}$$

> EE:=matadd(-A,h**2*(beta)*B);

$$EE = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}h - h\beta & -\frac{1}{6}h + h\beta \\ -\frac{1}{6}h + h\beta & -\frac{1}{3}h - h\beta \end{bmatrix}$$

> W:=matadd(C,-DD);

$$W = \begin{bmatrix} \lambda^2 \left(\frac{1}{3}h + h\beta \right) - \lambda \left(\frac{2}{3}h - h(1-2\beta) \right) & \lambda^2 \left(\frac{1}{6}h - h\beta \right) - \lambda \left(\frac{1}{3}h + h(1-2\beta) \right) \\ \lambda^2 \left(\frac{1}{6}h - h\beta \right) - \lambda \left(\frac{1}{3}h + h(1-2\beta) \right) & \lambda^2 \left(\frac{1}{3}h + h\beta \right) - \lambda \left(\frac{2}{3}h - h(1-2\beta) \right) \end{bmatrix}$$

> WW:=matadd(W,-EE);

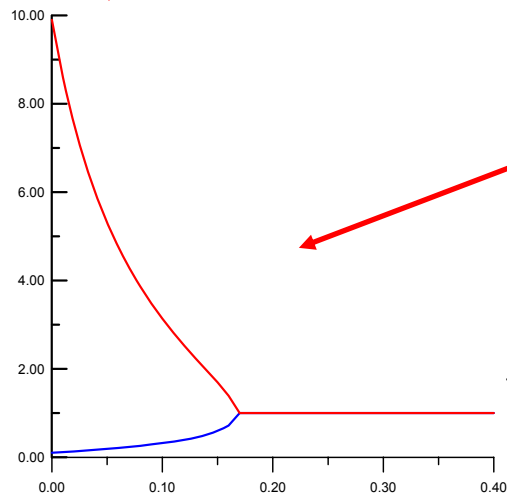
$$WW = \begin{bmatrix} \lambda^2 \left(\frac{1}{3}h + h\beta \right) - \lambda \left(\frac{2}{3}h - h(1-2\beta) \right) + \frac{1}{3}h + h\beta & \lambda^2 \left(\frac{1}{6}h - h\beta \right) - \lambda \left(\frac{1}{3}h + h(1-2\beta) \right) + \frac{1}{6}h - h\beta \\ \lambda^2 \left(\frac{1}{6}h - h\beta \right) - \lambda \left(\frac{1}{3}h + h(1-2\beta) \right) + \frac{1}{6}h - h\beta & \lambda^2 \left(\frac{1}{3}h + h\beta \right) - \lambda \left(\frac{2}{3}h - h(1-2\beta) \right) + \frac{1}{3}h + h\beta \end{bmatrix}$$

> det("");

$$h^2 \beta + 6 \lambda^2 h^2 \beta - 4 \lambda h^2 \beta - 4 \lambda^3 h^2 \beta + \lambda^4 h^2 \beta + \frac{1}{12} h^2 - \frac{3}{2} \lambda^2 h^2 + \frac{2}{3} \lambda h^2 + \frac{2}{3} \lambda^3 h^2 + \frac{1}{12} \lambda^4 h^2$$

> solve("", lambda);

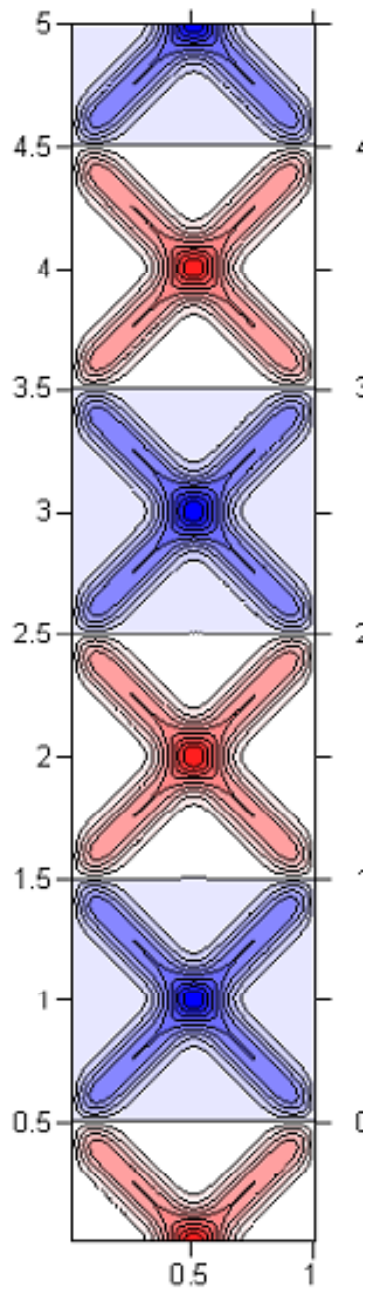
$$1, 1, \frac{1}{2} \frac{24\beta - 10 + 4\sqrt{-36\beta + 6}}{12\beta + 1}, \frac{1}{2} \frac{24\beta - 10 - 4\sqrt{-36\beta + 6}}{12\beta + 1}$$



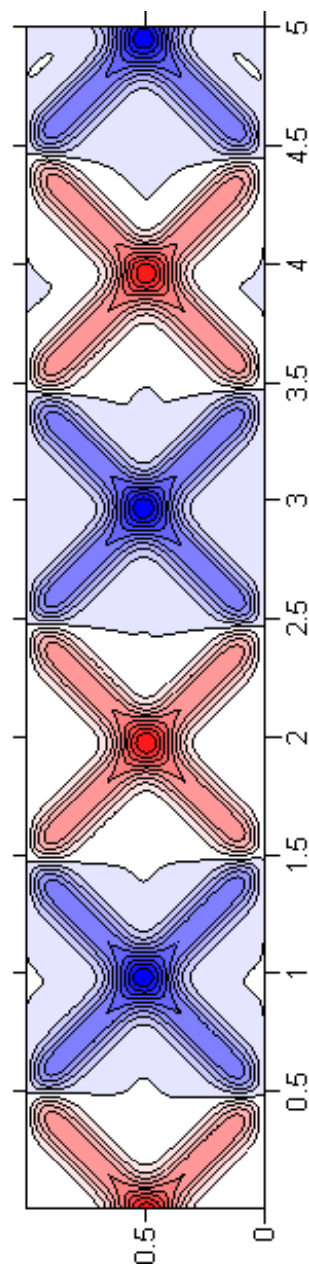
moduły 2 pierwiastków, stają się równe 1 dla $\beta \geq 1/6 = .16666$
 mamy odpowiedź: aby Newmark z MES
 jest stabilny dla $cdt=dx$, jeśli $\beta \geq 1/6$

udało nam się dogonić Verleta w MRS

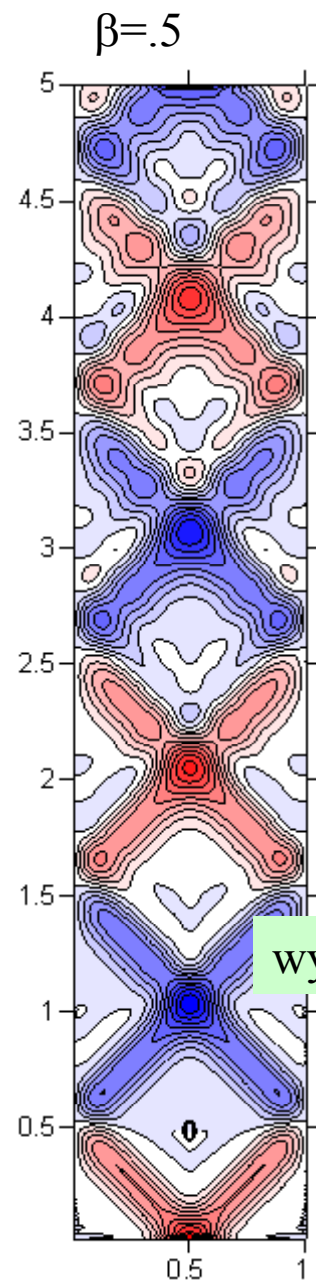
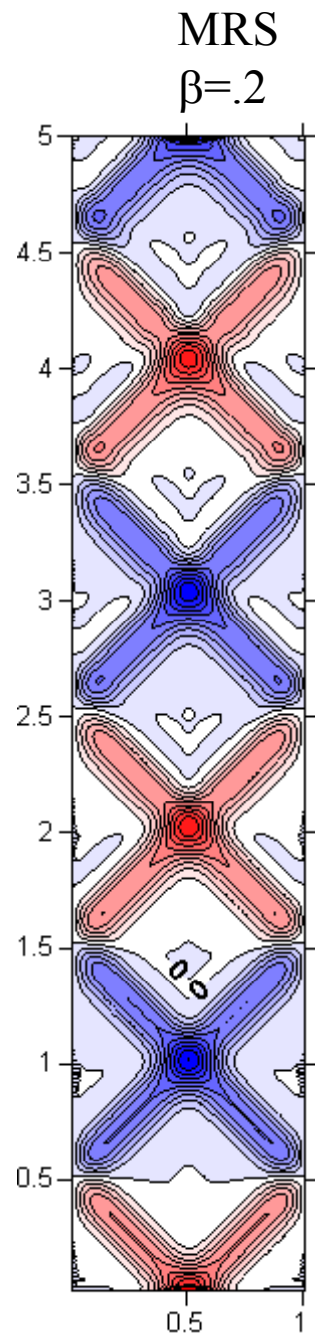
MRS, dt=dx, Verlet



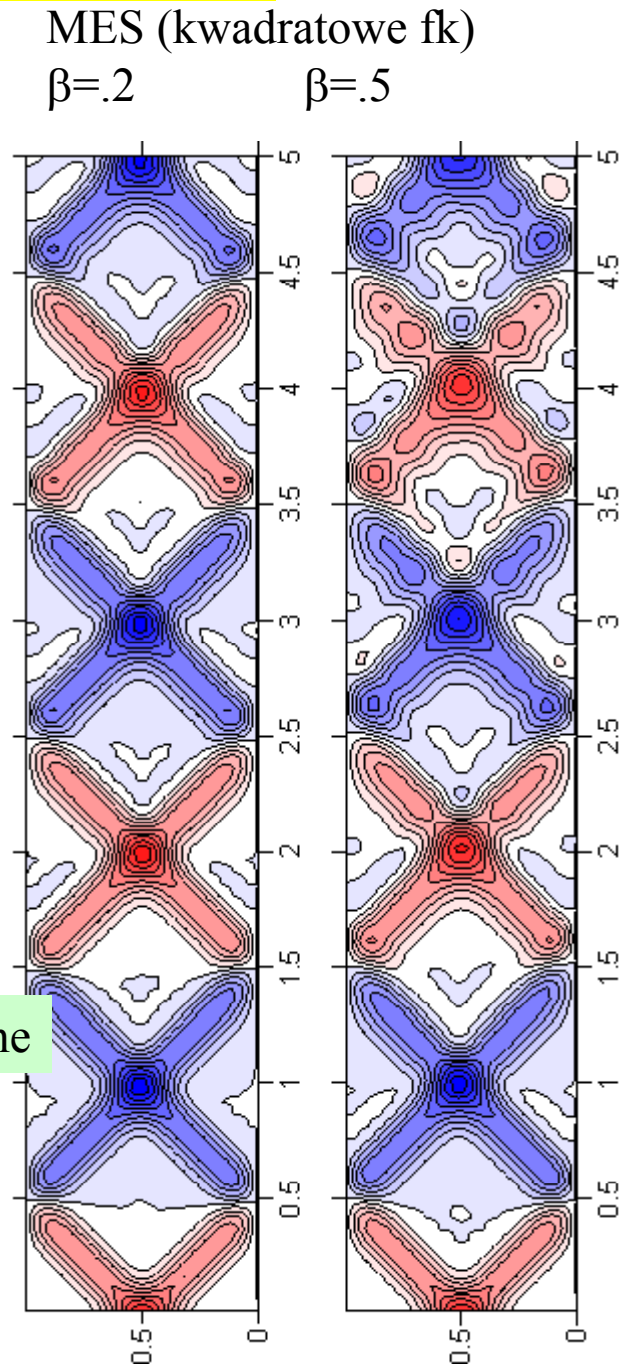
MES, dt=dx, **kwadratowe** fk $\beta=0.25$



wydlużmy krok czasowy $dt=2dx$, Newmark w MRS i MES



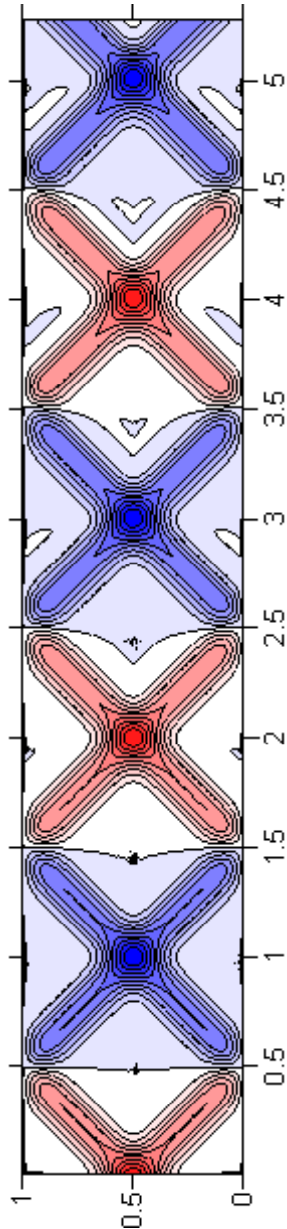
wyniki identyczne



FEM ze schematem Newmarka i kwadratowymi FK

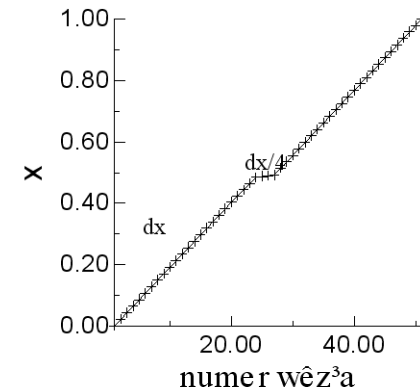
101 węzłów

$dt=dx, \beta=0.25$



zastosowanie schematu Newmarka dla MES przy nierównej siatce

Newmark ratuje sytuacje MES: można dobrać takie β aby uzyskać schemat stabilny dla każdego kroku czasowego



przekroczyliśmy ograniczenie Verleta $dt < dx/4/\sqrt{3}$ siedmiokrotnie

Wniosek:

MES pozwala na adaptację siatki,

która niemożliwa (trudna) w MRS

Tw. Ironsa: o stabilności decyduje najdrobniejszy element.

[problem podobny do sztywności]

Wyjście: MES zależne od czasu tylko

ze schematami, które w MRS są niejawne

i pozwalają na dowolny krok czasowy

(jawne nie są mniej złożone, a gorsze)