



# Podstawy fizyki – sezon 1

## **III. Praca i energia**

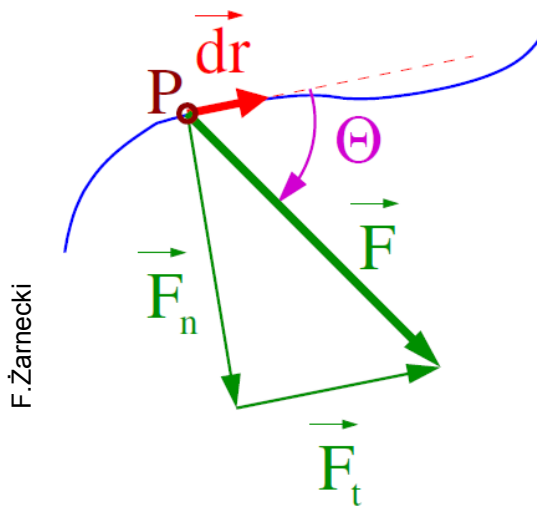
Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFiIS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,  
D11, pok. 111  
amucha@agh.edu.pl  
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

# Praca

- ▶ Rozważamy punkt materialny P, na który działa siła  $\vec{F}(\vec{r}, t, \vec{v}, \dots)$
- ▶ Praca, jaką wykonuje siła  $\vec{F}$  przy przesunięciu P o  $\vec{dr}$  :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$



Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy.

- siła dośrodkowa, siła Coriolisa, Lorentza...

Praca wykonana przez siłę  $\vec{F}$  nad punktem P przy przesunięciu z punktu A do B wynosi:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

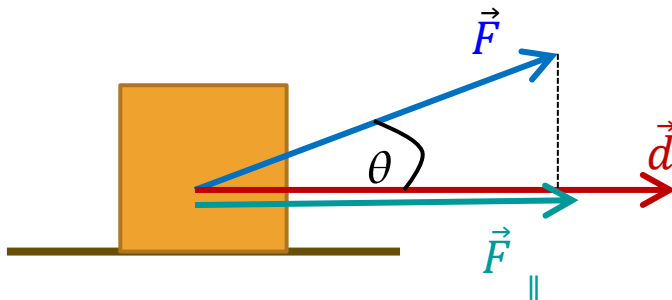


# Praca siły stałej

Jeśli na punkt P działa siła **stała**, to jej praca przy przemieszczeniu  $\vec{d}$  wynosi:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

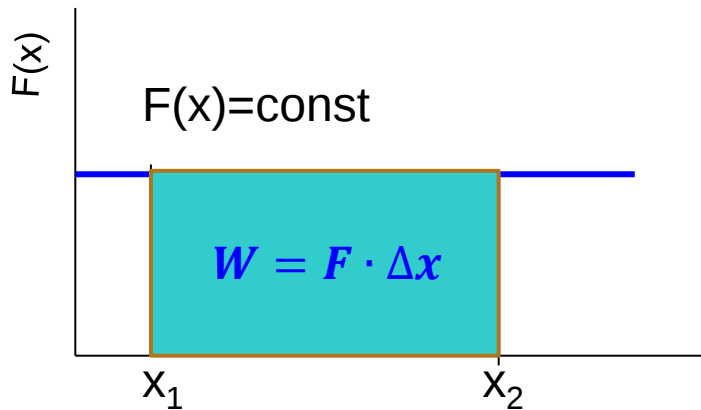
$$[J=N \text{ m}]$$



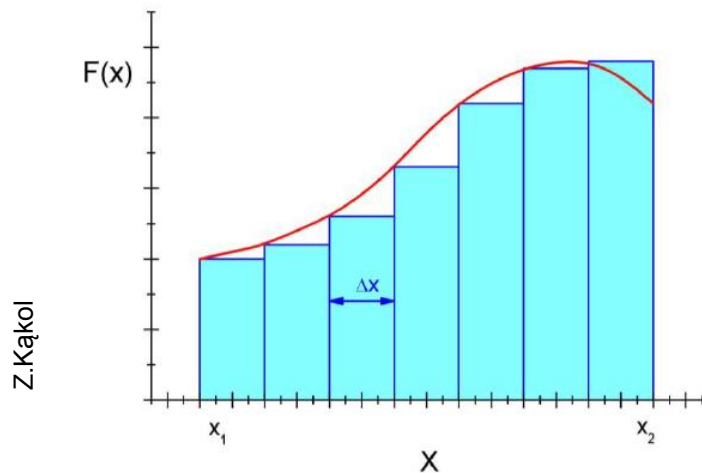
$$W = F d \cos \angle(\vec{F}, \vec{d}) = F_{\parallel} d$$

- ▶ Wzór określa pracę wykonaną wyłącznie przez siłę  $\vec{F}$ .
- ▶ Na ciało mogą działać również inne siły, np. siła tarcia, ciężar.  
Praca wypadkowej kilku sił jest równa sumie prac wykonanych przez poszczególne siły.
- ▶ Ciało może przemieszczać się w innym kierunku niż działa siła (np. przy rzucie w górę siła grawitacyjna działa w dół – jej praca jest ujemna).

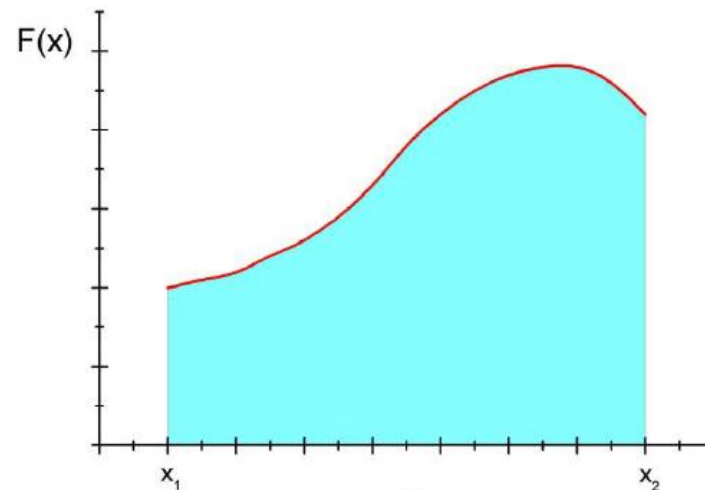
# Praca siły zmiennej a stałej



- ▶ Praca jest polem powierzchni pod wykresem siły.
  - W przypadku siły stałej jest to prostokąt.
  - Dla **siły zmiennej** – dzielimy wykres na jak największą liczbę prostokątów i sumujemy pola



$$W = \sum F_i \Delta x$$

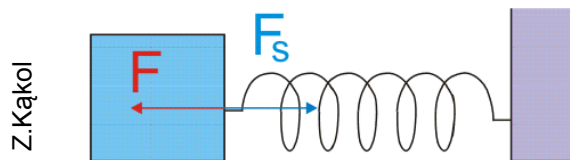


$$W = \lim_i \sum F_i \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

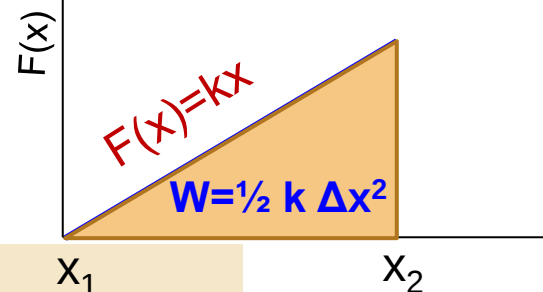
# Praca sił zmiennych - przykłady

Przykł. 1 – Praca siły sprężystości:  $F_s(x) = -kx$ .

Rozciągamy sprężynę, liczymy pracę, jaką wykona zewnętrzna siła  $F = kx$ :

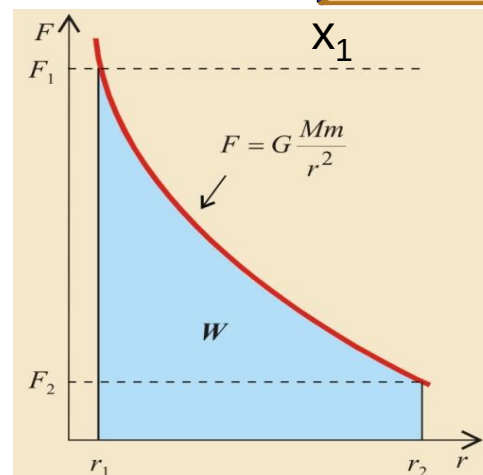
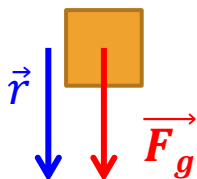


$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$



Przykł. 2 – Praca siły grawitacji:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} GMm \frac{1}{r^2} dr = -GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



## Energia kinetyczna (przyp. nierelatywistyczny)

Na ciało działa wypadkowa siła  $\mathbf{F}$  i nadaje mu przyspieszenie  $\mathbf{a}$ . Liczymy pracę tej siły nad ciałem (ruch wzdłuż osi  $x$ ,  $m = \text{const}$ ):

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \\ &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{K2} - E_{K1} = \Delta E_K \end{aligned}$$

gdzie zdefiniowano **energię kinetyczną**:  $E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$



oraz pokazano, że:

zmiana energii kinetycznej ciała jest równa pracy  $W$ , jaką wykonuje wypadkowa siła nad tym ciałem.

**Twierdzenie o pracy i energii.**

Twierdzenie jest prawdziwe niezależnie od postaci siły  $\vec{F}$  i drogi.

# Moc

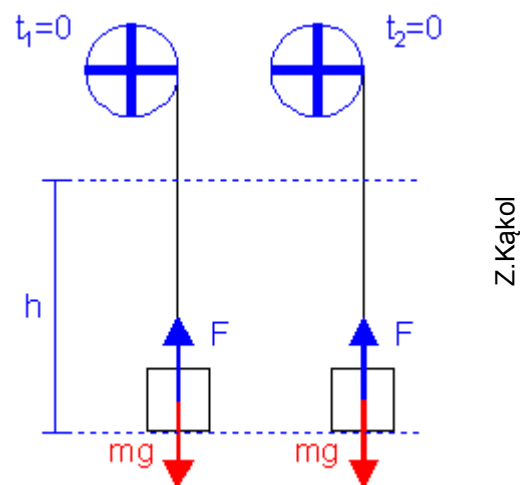
- ▶ Jeśli interesuje nas szybkość wykonania pracy, określamy **MOC**:

$$P = \frac{dW}{dt} \text{ - moc chwilowa [W=J/s], [kWh]}$$



$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \text{ - moc średnia}$$

dla stałej siły:  $\bar{P} = \frac{F s}{t} = F \bar{v}$

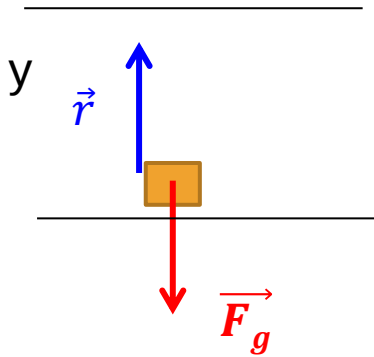


# Siły zachowawcze

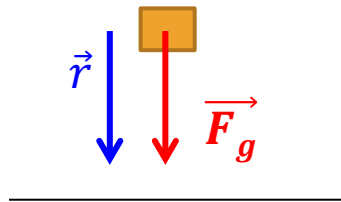
- ▶ Jeżeli praca pewnej siły zależy tylko od położenia punktu początkowego A i końcowego B, to siłę taką nazywamy **ZACHOWAWCZĄ**.

**Praca** takiej siły, wykonana po drodze zamkniętej **WYNOSI ZERO**.

Przykład: Liczymy pracę siły grawitacji (w pobliżu Ziemi, czyli  $F_g = mg$ , przy podnoszeniu i opuszczaniu ciała na wysokość  $y$ :

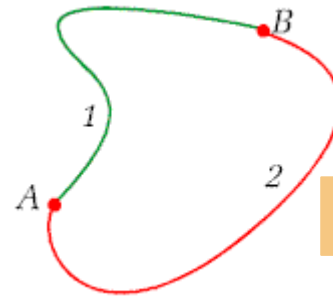


$$W_1 = -mgy$$



$$W_2 = mgy$$

$$W_1 = -W_2$$



$$W_{AB} + W_{BA} = 0$$

- ▶ Siłami zachowawczymi są np:

- siła grawitacji
- siła sprężystości

Siła tarcia jest siłą niezachowawczą.

# Energia potencjalna

- ▶ Siła jest zachowawcza, gdy jest ona funkcją jedynie położenia ciała:  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ , taką, że jej pracę można przedstawić w postaci:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = E_{pA}(\vec{r}_A) - E_{pB}(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$



gdzie  $\Delta E_p$  - zmiana energii potencjalnej

- ▶ Siła zachowawcza nie może zależeć ani od czasu, ani od prędkości.
- ▶ Energia potencjalna jest skalarną funkcją położenia  $\vec{r}$ .
- ▶ Jest to energia, jaką posiada ciało w polu danej siły  $\vec{F}$ .

$$E_{pB} = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + E_{pA}$$

- ▶ Wartość energii potencjalnej jest określona z dokładnością do pewnej stałej, zależnej od wyboru punktu odniesienia A.

$$E_{pB} = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + const$$

# Energia potencjalna

- ▶ Ustalmy jeden z punktów, np. A, tak, aby  $E_{pA} = 0$ .

Energia potencjalna wynosi zero w położeniu, gdy  $\vec{F}_A = 0$  (nierozciągnięta sprężyna, nieskończona odległość od Ziemi).

- ▶ Otrzymujemy zależność energii potencjalnej od siły:

$$Ep_B = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

czyli:

$$-\frac{dEp}{d\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

Bardziej ogólnie:

praca wykonana przez siłę  $\vec{F}(\vec{r})$  przy przesunięciu  $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$  wynosi:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dEp \\ &= -\frac{\partial Ep}{\partial x} dx - \frac{\partial Ep}{\partial y} dy - \frac{\partial Ep}{\partial z} dz \end{aligned}$$

czyli:

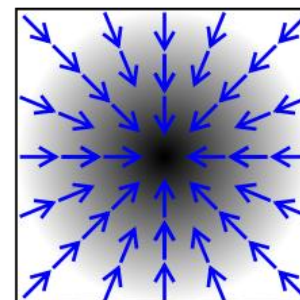
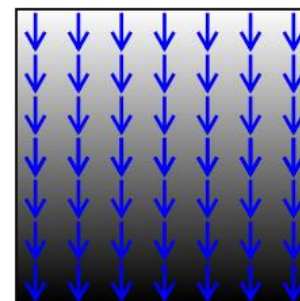
$$\vec{F} = -\nabla Ep$$

$\nabla$  operator różniczkowy-nabla

# Operatory wektorowe

- ▶ Jeżeli w każdym punkcie przestrzeni istnieje określona **wielkość wektorowa** (np. siła, natężenie), to mówimy o takim **polu wektorowe**.  
Np. pole grawitacyjne jest polem wektorowym.
- ▶ Do opisu pól wektorowych służą **operatory wektorowe**:
  - gradient:  $\text{grad } f(x, y, z) \equiv \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
  - dywergencja
  - rotacja
- ▶ **Gradient** wielkości skalarnej jest wektorem, który pokazuje spadek (lub narastanie) tej wielkości w określonym kierunku.
- ▶ W polu grawitacyjnym – siła jest wielkością (wektorem) pokazującą, jak szybko i w jakim kierunku zmienia się energia potencjalna (skalar)

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$



Ciemniejszy kolor pokazuje większą wartość pewnego skalaru (np.  $E_p$  lub temp), strzałki pokazują kierunek narastania tego skalaru (uwaga na „-”)

# Zasada zachowania energii

- Podsumujmy, co wiemy już o pracy, sile, energii kinetycznej i potencjalnej:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB} \quad - \text{praca siły zachowawczej}$$

$$W_{AB} = E_{KB} - E_{KA} \quad - \text{tw. o pracy i energii (dowolna siła)}$$

czyli:

$$E_{KB} - E_{KA} = E_{pA} - E_{pB}$$

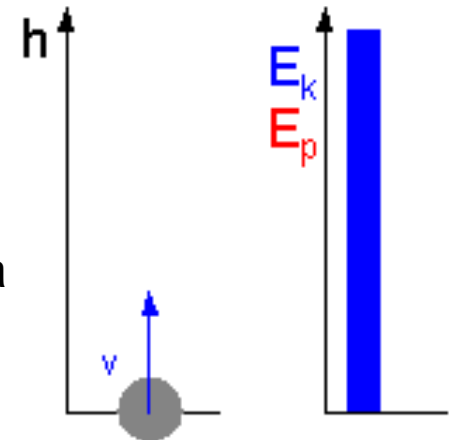
lub:

$$E_{KB} + E_{pB} = E_{pA} + E_{KA}$$

z czego wynika:

$$\boxed{E = E_p + E_K = \text{const}}$$

W polu sił zachowawczych całkowita energia  
jest zachowana



Z.Kąkol

# Siła, energia - przykłady

Przykład 1. Wyznaczenie energii potencjalnej w pobliżu Ziemi:

$$F(y) = -mg$$

$F$  jest stała. Przyjmujemy, że dla  $y = 0, E_p(0) = 0$ .

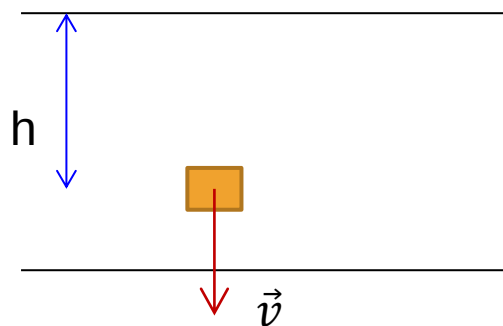
Wtedy

$$E_p(y) = -\int_0^y F(y)dy + E_p(0) = -\int_0^y (-mg)dy = mgy$$

Sprawdzenie

$$F = -\frac{dE_p(y)}{dy} = -\frac{d(mgy)}{dy} = -mg$$

Przykład 3. Spadek swobodny z wysokości  $h$



$$\begin{aligned}\Delta E_k &= -\Delta E_p \\ \frac{mv^2}{2} &= mgh \\ v &= \sqrt{2gh}\end{aligned}$$

Przykład 2. Wyznaczenie energii potencjalnej sprężyny

$$F(x) = -kx$$

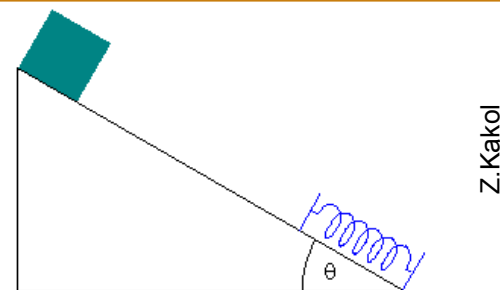
dla  $x = 0, E_p(0) = 0$ .

Wtedy

$$E_p = -\int_0^x (-kx)dx = \frac{kx^2}{2}$$

Sprawdzenie:

$$F = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -\frac{d\left(\frac{kx^2}{2}\right)}{dx} = -kx$$



# Energia potencjalna pola grawitacyjnego

Uwaga! Przyjmowane było, siła grawitacyjna w pobliżu Ziemi jest stała  $F = -mg$ .

Teraz znajdziemy energię potencjalną masy  $m$  znajdującej się w dowolnym punkcie nad powierzchnią Ziemi odległym o  $r$  od środka Ziemi.

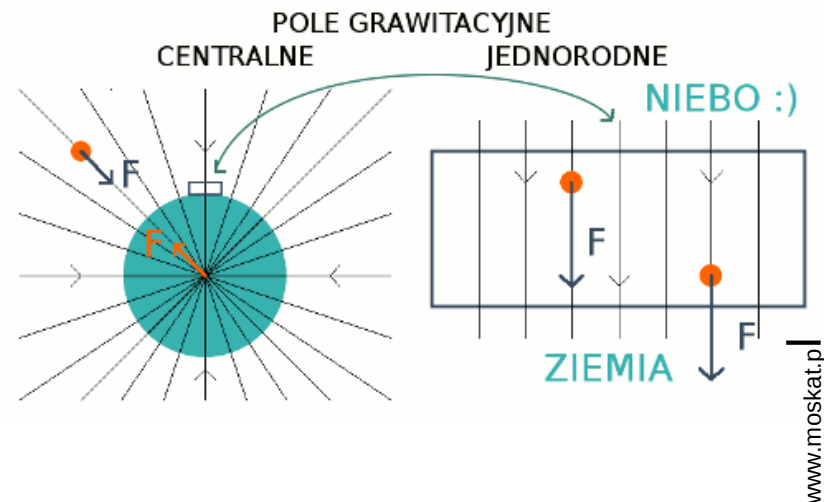
$$F_g = -GMm \frac{1}{r^2}$$

Znak „-” oznacza kierunek do środka Ziemi, siła przyciągająca.

$$E_{pB} = -W_{AB} + E_{pA}, \quad A \rightarrow \infty, \quad B \rightarrow r$$

$$E_p(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + E_{p\infty}, \quad E_{p\infty} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} E_p(r) &= - \int_{\infty}^r F(r) dr = - \int_{\infty}^r \left( -GMm \frac{1}{r^2} \right) dr = \\ &= -GMm \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^r = -GMm \frac{1}{r} \end{aligned}$$



# Energia potencjalna, potencjał

Energia potencjalna ma wartość równo zeru w nieskończoności (punkt odniesienia) i maleje w miarę zmniejszania się  $r$ .

$$E_p(r) = -GMm \frac{1}{r}$$

Potencjał pola grawitacyjnego:  $V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -GM \frac{1}{r}$



Przykł: Obliczyć jaką prędkość należy nadać obiektowi na Ziemi aby uciekł on z Ziemi na zawsze.

$$\begin{aligned} E_K + E_p(R_Z) &= E_p(R_Z + \infty) \\ \frac{1}{2}mv_{II}^2 - GM_Zm \frac{1}{R_Z} &= 0 \\ v_{II} &= \sqrt{2 GM_Z \frac{1}{R_Z}} \cong 11.2 \text{ km/s} \end{aligned}$$

jest to tzw. prędkość ucieczki – druga prędkość kosmiczna

Pierwsza prędkość kosmiczna - *najmniejszą* możliwą prędkość jaką musi mieć punkt materialny swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi.

# Energia dla sił niezachowawczych

- W układach oprócz sił zachowawczych działają zwykle siły niezachowawcze, np. tarcie.

- twierdzenie o pracy i energii, dla wszystkich sił:  $\Delta E_k = W_z + W_{nz}$
- a dla sił zachowawczych:  $W_z = -\Delta E_p$
- czyli:  $W_{nz} = \Delta E_K + \Delta E_p$

praca sił niezachowawczych została przekształcona w **energię wewnętrzną U**.

Zmiana energii wewnętrznej U jest równa stałonej energii mechanicznej:

$$\Delta E_K + \Delta E_p + \Delta U = 0$$

**Zasada zachowania energii całkowitej!**

Zasada zachowania energii należy do najbardziej podstawowych praw fizyki. Wszystkie nasze doświadczenia pokazują, że jest to prawo bezwzględnie obowiązujące; nie znamy wyjątków od tego prawa.

# Zasada zachowania energii całkowitej

- Jeżeli na ciało działa siła zewnętrzna (dowolna), siła zachowawcza (np. grawitacji) oraz niezachowawcza (np. tarcia), to można napisać:

$$F_{\text{wyp}} = F_{\text{zew}} + F_z + F_{\text{nz}}$$

a z tw. o pracy i energii:  $\Delta E_K = W_{\text{zew}} + W_z + W_{\text{nz}}$

czyli:

$$\Delta E_K = W_{\text{zew}} - \Delta E_p - \Delta U$$

$$W_{\text{zew}} = \Delta E_K + \Delta E_p + \Delta U$$

## Praca siły zewnętrznej a zasada zachowania energii całkowitej

- Każda praca wykonana na ciele przez czynnik zewnętrzny równa się wzrostowi energii kinetycznej plus wzrost energii potencjalnej plus wzrost energii wewnętrznej.
- *Cała energia została zarejestrowana.*
- Wynika z niego, że *energia może być przekształcona z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczona;*

**Energia całkowita jest wielkością stałą.**

# Podsumowanie

---

- ▶ Praca siły zmiennej i stałej (grawitacji, sprężystości).
- ▶ Energia kinetyczna.
- ▶ Moc.
- ▶ Siły zachowawcze.
- ▶ Energia potencjalna.
- ▶ Zasada zachowania energii mechanicznej.
- ▶ Gradient.
- ▶ Potencjał.
- ▶ Pole grawitacyjne.
- ▶ Zasada zachowania energii całkowitej (w przypadku działania sił niezachowawczych oraz zewnętrznych)