

Podstawy fizyki – sezon 1

IV. Pęd, zasada zachowania pędu

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFiIS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 111
amucha@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

Pęd

- ▶ Rozważamy punkt materialny P, o masie m i prędkości $\vec{v}$, na który działa siła $\vec{F}$
- ▶ Siła działająca na punkt przez czas t powoduje zmianę jego pędu:

$$\int_0^t \vec{F} dt = \int_{v_0}^v m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m\vec{v}(t) - m\vec{v}_0 = \Delta\vec{p} \quad \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

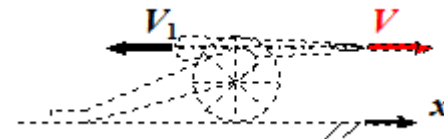
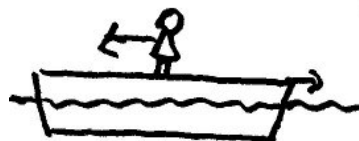
Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na ciało wynosi zero, to całkowity wektor pędu pozostaje stały.

$$\sum \vec{F}_i = 0 \Leftrightarrow \vec{P} = \text{const}$$

Zasada zachowania pędu

Przykłady:

- ruch po łódce,
- armata,
- zderzenia,



Zderzenia

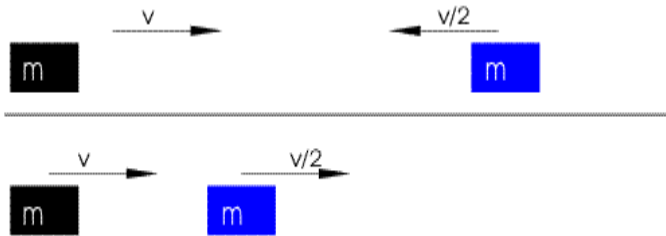
SPRĘŻYSTE

Zas. zach. pędu (3 równania):

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{przed} = (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2)_{po}$$

Zas.zach.energii

$$E_{K1} + E_{K2} = E'_{K1} + E'_{K2}$$



z dwóch zas.zachowania (energii i wektora pędu)
można policzyć prędkość po zderzeniu, np., gdy
masy są równe, ciała „wymieniły się”
prędkościami

NIESPRĘŻYSTE

Zas. zach. pędu (3 równania):

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)_{przed} = (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2)_{po}$$

$$(\sum E_{kin})_{przed} = (\sum E'_{kin})_{po} + \Delta E$$

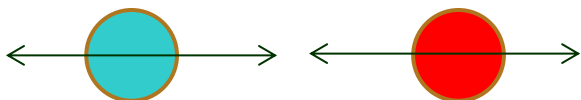
stracona energia na
odkształcenia, ogrzanie, itp



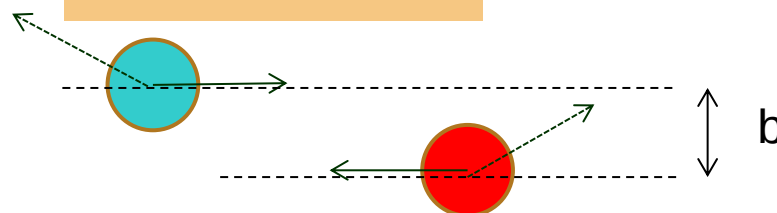
wystarczy zas. zach pędu, aby
obliczyć parametry ruchu po
zderzeniu

Zderzenia niecentralne

CENTRALNE

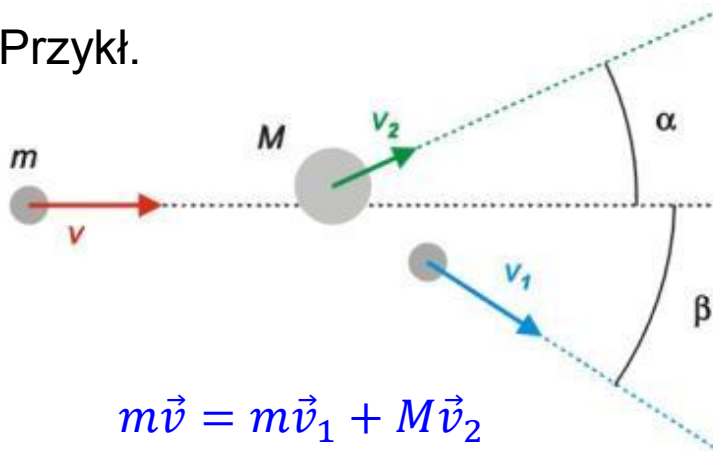


NIECENTRALNE



Środki kul nie leżą na prostej przechodzącej przez kierunek ruchu pierwszej kuli

Przykł.



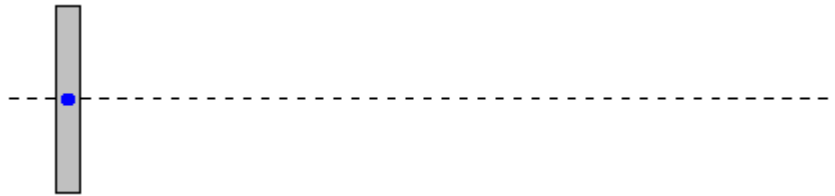
$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2$$

- ▶ gdy kule są o tej samej masie (bilard)- po zderzeniu poruszają się pod kątem prostym względem siebie, a kąty α i β zależą od **parametru zderzenia** b (odległości między pierwotnym kier., a środkiem kuli spoczywającej) (sprawdzić!)

Środek masy

- ▶ Dotychczas ciała opisywane były jako punkty materialne, tzn. obdarzone masą bezwymiarowe cząstki.
- ▶ Ciała rzeczywiste poruszać się mogą w sposób bardziej skomplikowany niż punkty materialne:

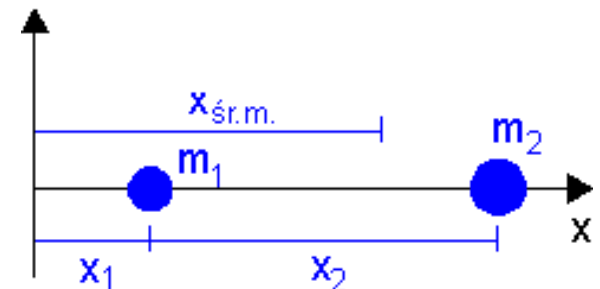


- ▶ Jest jednak jeden punkt, którego ruch możemy opisać poznanymi zasadami:

ŚRODEK MASY

$$\vec{R}_{\dot{M}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

położenie środka masy



$$X_{\dot{M}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Z.Kąkol

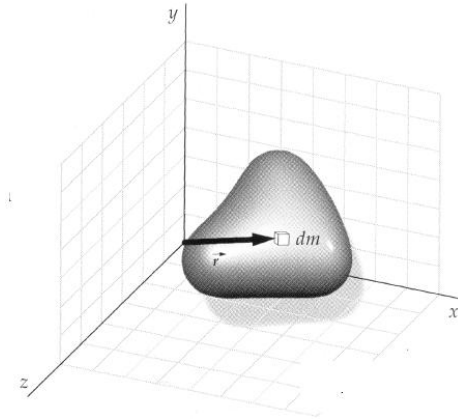


Środek masy – jak znaleźć?

- Dla ciał o budowie ciągłej:

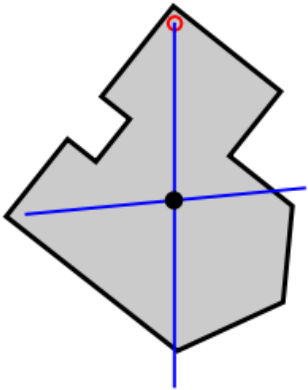
ŚRODEK MASY

$$\vec{R}_{\dot{S}M} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$



Uwaga!

Jeżeli pole sił ciężkości jest **jednorodne** ($g=\text{const}$), to położenie **środka masy** pokrywa się z położeniem **środka ciężkości** (położenie wypadkowej sił ciężkości działających na cały układ mas)



Środek masy można:

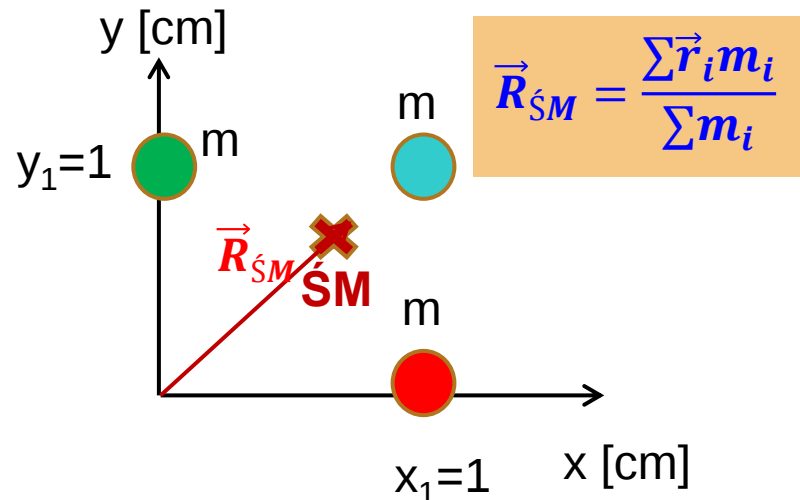
- **obliczyć** (dla ciał o prostej geometrii)
- **wyznaczyć doświadczalnie** – zawieszamy ciało w dwóch punktach, rysujemy pionową linię, miejsce przecięcia jest środkiem masy

Środek masy – obliczenia

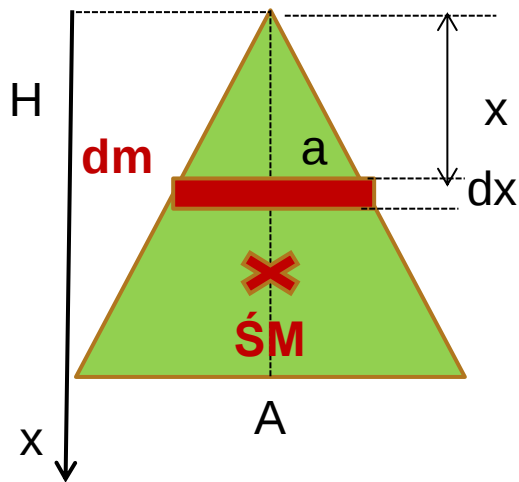
Przykład 1. Oblicz $\vec{R}_{\dot{S}M}$ układu mas z rys.

$$x_{\dot{S}M} = \frac{mx_1 + mx_1 + m \cdot 0}{3m} = \frac{2}{3}x_1 = \frac{2}{3}cm$$

$$y_{\dot{S}M} = \frac{my_1 + my_1 + m \cdot 0}{3m} = \frac{2}{3}y_1 = \frac{2}{3}cm$$



Przykład 2. Obl. współrzędne środka masy jednorodnego trójkąta o masie M , gęstości σ



$$x_{\dot{S}M} = \frac{1}{M} \int x dm$$

$$dm = \sigma a dx, \quad \sigma = \frac{M}{\frac{1}{2}AH}, \quad \frac{a}{x} = \frac{A}{H}$$

$$x_{\dot{S}M} = \frac{1}{M} \int_0^H \frac{2M}{AH} \frac{x A}{H} x dx = \int_0^H \frac{2}{H^2} x^2 dx = \frac{2}{3H^2} x^3 \Big|_0^H = \frac{2}{3}H$$

Ruch środka masy

- ▶ Prędkość środka masy:

$$\vec{V}_{\dot{M}} = \frac{d\vec{R}_{\dot{M}}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{v}_i m_i}{\sum m_i}$$

Jeżeli suma sił zewnętrznych wynosi zero (czyli pęd jest zachowany), to:

$$\vec{V}_{\dot{M}} = \text{const}$$

- ▶ Przyspieszenie środka masy:

$$\vec{a}_{\dot{M}} = \frac{d\vec{v}_{\dot{M}}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sum \vec{v}_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{a}_i m_i}{\sum m_i}$$

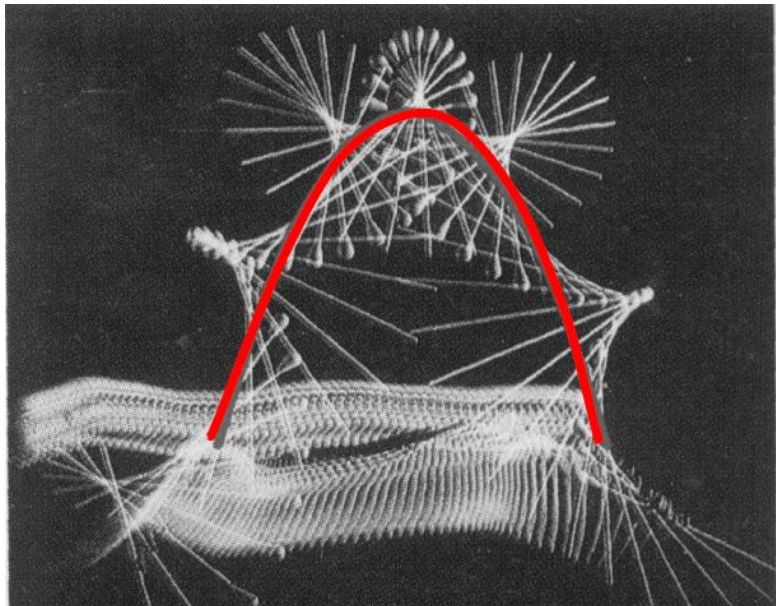
$$\sum \vec{a}_i m_i = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{zew} \quad (\text{II zas. dyn})$$

Środek masy układu punktów materialnych porusza się w taki sposób, jakby cała masa układu była skupiona w środku masy i wszystkie siły były do niego przyłożone

Dynamika układu punktów

- ▶ Jeśli wypadkowa siła zewnętrzna wynosi zero, to dla układów o stałej masie, środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. (I zas. dynamiki Newtona)
- ▶ Przyspieszenie środka masy jest określone przez siłę zewnętrzną (II zas.dyn.)
- ▶ Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ wynosi zero, to całkowity wektor pędu jest zachowany (zas.zach. pędu)

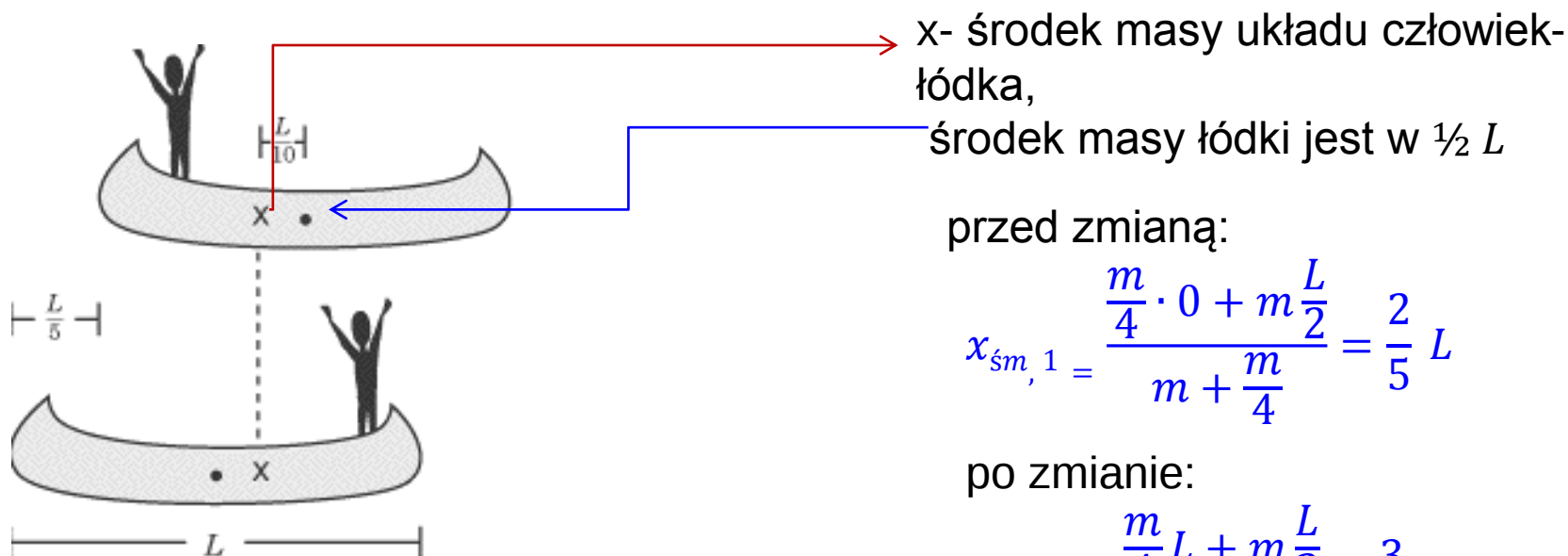
Rys. przedstawia ruch metalowego pręta rzuconego w górę – pręt wykonuje skomplikowane ruchy, ale środek masy porusza się po paraboli



<http://cmf.p.lodz.pl/posmykiewicz/>

Ruch środka masy - przykłady

Przykł. 3: Człowiek (o masie $m/4$) przeszedł po łódce (masa m) z dziobu na rufę. O jaką odległość przesunęła się łódka?



przed zmianą:

$$x_{\text{śm}, 1} = \frac{\frac{m}{4} \cdot 0 + m \frac{L}{2}}{m + \frac{m}{4}} = \frac{2}{5} L$$

po zmianie:

$$x_{\text{śm}, 2} = \frac{\frac{m}{4} L + m \frac{L}{2}}{m + \frac{m}{4}} = \frac{3}{5} L$$

nie działa żadna siła zewnętrzna – środek masy układu powinien pozostać w spoczynku, czyli łódka przesunęła się o odcinek $1/5 L$

Podsumowanie

- ▶ Ruch ciała opisywany jest jako złożenie ruchu środka masy (dzisiejszy wykład) i ruchu wokół środka masy (następny wykład).
- ▶ Wyznaczanie środka masy układów dyskretnych i ciągłych.
- ▶ Kinematyka i dynamika układów punktów materialnych i ich środka masy.
- ▶ Zasada zachowania pędu (teoria+przykłady).

Pokazy doświadczeń

- ▶ Kinematyka - ruch krążka na stole poduszkowym: ruch jednostajny, zmienny, złożenie ruchów.
- ▶ Dynamika: I i II zasada,
- ▶ Siła odśrodkowa (wirownica)
- ▶ Siła Coriolisa (wahadło Foucaulta)
- ▶ Zasada zachowania energii i pędu – zderzenia