

Podstawy fizyki – sezon 1

V. Ruch obrotowy 1 (!)

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFliS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 111
amucha@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

Kinematyka ruchu po okręgu

- Ruch punktu P po okręgu jest złożeniem ruchu w dwóch kierunkach:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \varphi \\ y(t) = R \sin \varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{s}{R} [\text{rad}]$$

- **Ruch jednostajny po okręgu** – w pewnym przedziale czasu t , punkt przebywa ten sam łuk (ten sam kąt)

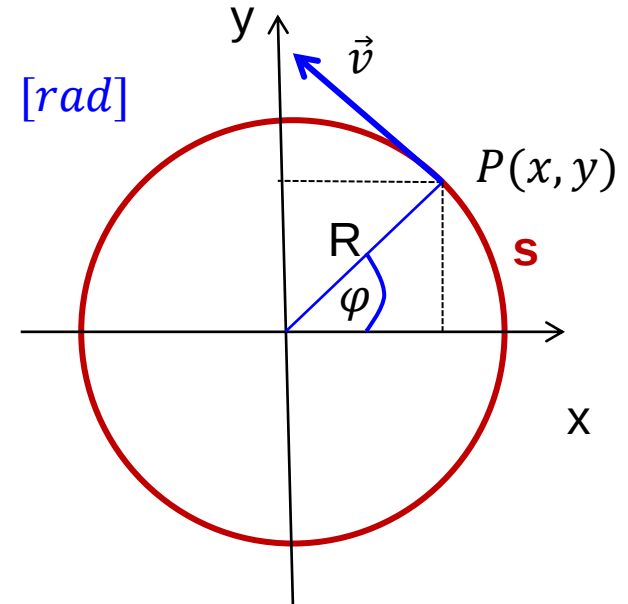
Prędkość kątowa jest stała:



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = -R\omega \sin \omega t \\ v_y(t) = R\omega \cos \omega t \end{cases}$$



$$\omega = \frac{d}{dt} \frac{s}{R} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

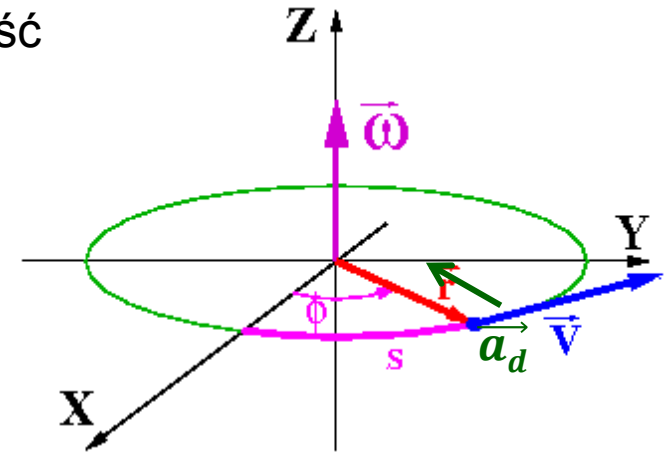
zależność pomiędzy prędkością kątową a liniową

Ruch jednostajny po okręgu

- ▶ Prędkość liniowa $\vec{v}$ jest wektorem, czyli prędkość kąтова $\vec{\omega}$ też jest wektorem: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

- ▶ Parametry ruchu jednostajnego po okręgu:

- Okres $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [s],
- częstotliwość $f = \frac{1}{T}$ [Hz]



- ▶ **Przyspieszenie dośrodkowe** – związane ze zmianą kierunku wektora $\vec{v}$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t = -R\omega^2 x(t) \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = R\omega^2 \sin \omega t = -R\omega^2 y(t) \end{cases}$$

czyli: $\vec{a}_d = -R\omega^2 \hat{r}$
przyspieszenie dośrodkowe skierowane
jest przeciwnie do wektora $\vec{r}$

Zapamiętajmy- jeśli wektor prędkości jest prostopadły do promienia – mamy do czynienia z ruchem obrotowym względem pewnego punktu

Ruch jednostajnie zmienny po okręgu

- ▶ Punkt porusza się **ruchem zmiennym**, gdy w tych samych przedziałach czasu przebywa różne odcinki (nieformalna def)
- ▶ W ruchu po okręgu oznacza to, że $\omega = \omega(t) \neq \text{const}$
- ▶ Liczymy zatem **przyspieszenie kątowe**, jako pochodną prędkości kątowej po czasie (def):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



I korzystamy z analogii do wzorów z kinematyki ruchu prostoliniowego:

	r. prostoliniowy	r. po okręgu
droga	$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$
prędkość	$v(t) = v_0 + at$	$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$
przyspieszenie	$\vec{a}$	$\vec{\varepsilon}$

Przyspieszenia w ruchu po okręgu

- ▶ W ruchu po okręgu określiliśmy dotychczas przyspieszenia:
 - dośrodkowe (zmiana kier. prędkości $\vec{v}$)
 - kątowe (zmiana wartości prędkości kątowej ω)
- ▶ Brakuje jeszcze przyspieszenia związanego ze zmianą wartości prędkości liniowej $\vec{v}$:

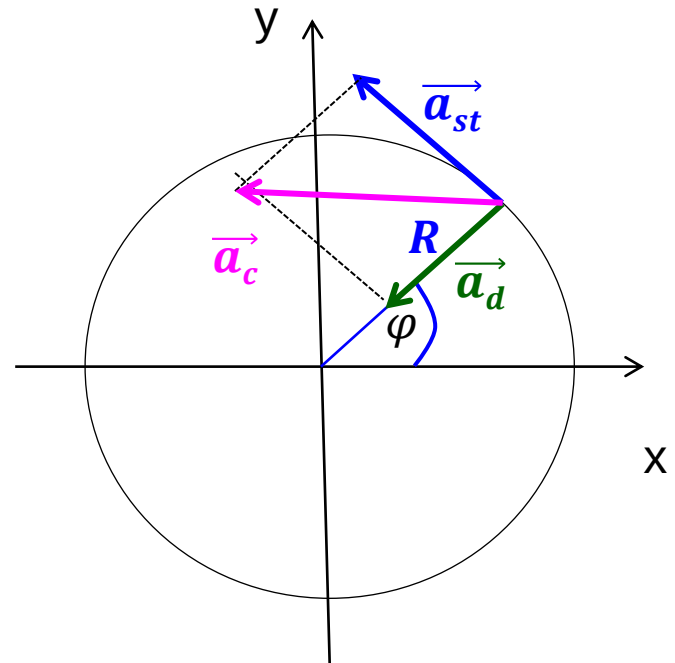
przyspieszenie styczne:



$$\vec{a}_{st} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- ▶ Mamy zatem przyspieszenie całkowite: $\vec{a}_c = \vec{a}_d + \vec{a}_{st}$
- ▶ związek przyspieszenia stycznego z kątowym:

$$\varepsilon = \frac{a_{st}}{R}$$

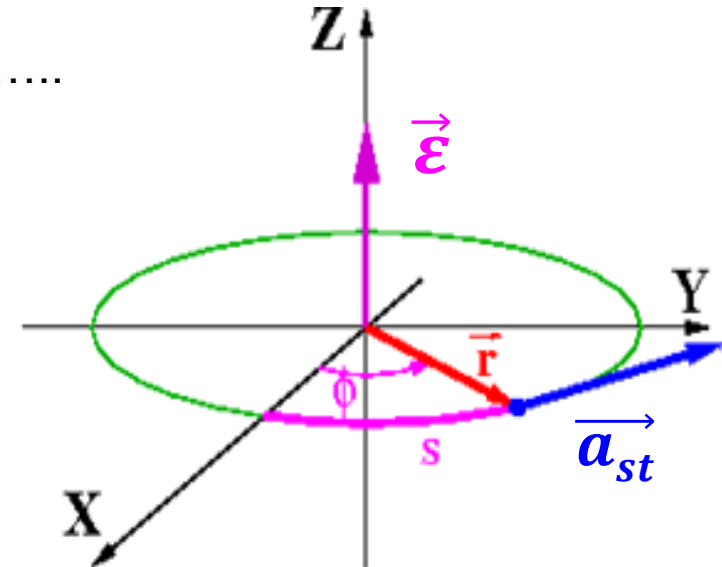


Przyspieszenie kątowe

- ▶ Przyspieszenie kątowe również jest wektorem.....

$$\vec{a}_{st} = \vec{\epsilon} \times \vec{r}$$

- ▶ Można teraz zadać pytanie (filozoficzne):
 - skoro źródłem przyspieszenia liniowego $\vec{a}$ jest siła, to co jest przyczyną przyspieszenia kątowego?



Siła kątowa?

No... prawie. Ciało porusza się z przyspieszeniem kątowym, gdy działa

MOMENT SIŁY

Moment siły jest jednym z najważniejszych pojęć dla każdego młodego mechanika

Moment siły

- ▶ Moment siły (moment obrotowy) informuje, jaką siłę i jakim miejscu należy przyłożyć, aby spowodować obrót ciała

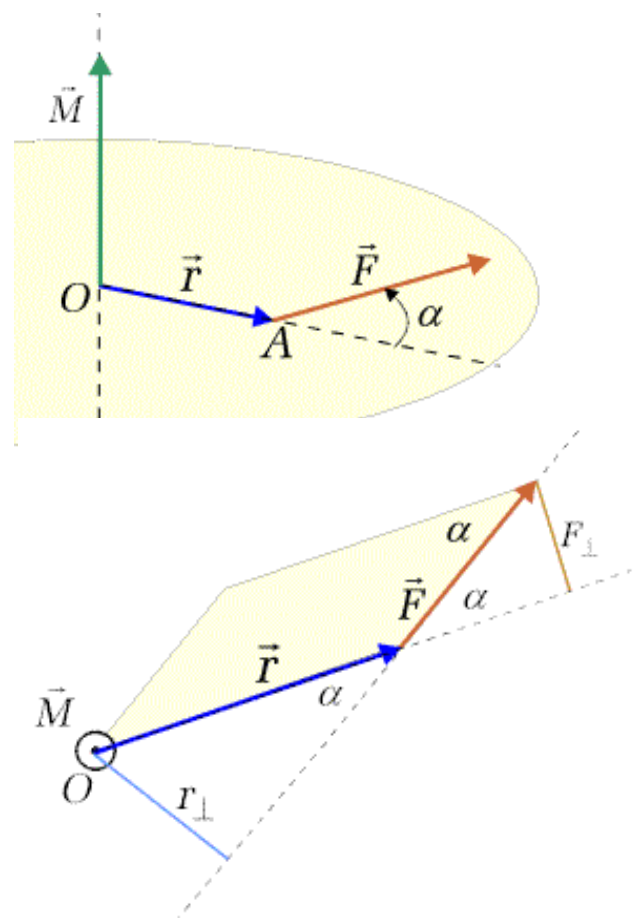


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Moment siły $\vec{F}$ przyłożonej w punkcie **A**, określony względem punktu **O**, jest **iloczynem wektorowym** promienia wodzącego $\vec{r}$ mającego początek w punkcie **O** i siły $\vec{F}$

Wartość momentu siły $\vec{F}$ obliczymy z zależności:

$$M = r (F \sin \alpha) = r_{\perp} F$$



Prawa dynamiki w języku zmiennych kątowych

- ▶ Formułowaliśmy już zasady dynamiki dla:
 - punktu materialnego,
 - ciała, ale tylko dla środka masy tego ciała
- ▶ Proszę teraz samodzielnie przedstawić I II zas. dynamiki Newtona dla obracającego się ciała:

Jeżeli na ciało nie działa moment siły lub momenty sił się równoważą, ciało pozostaje w spoczynku lub obraca się ze stałą prędkością kątową.

Jeżeli na ciało działa niezerowy wypadkowy moment siły, to porusza się ono z przyspieszeniem kątowym $\vec{\epsilon}$ proporcjonalnym do tego momentu siły, a odwrotnie proporcjonalnym do (za chwilę dokończymy)

$$\vec{M} \propto \vec{\epsilon}$$

II zasada dynamiki

► Dla ruchu postępowego było: $\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

► A jak zmienić **MOMENT PĘDU** $\vec{L}$?

siła powoduje zmianę pędu



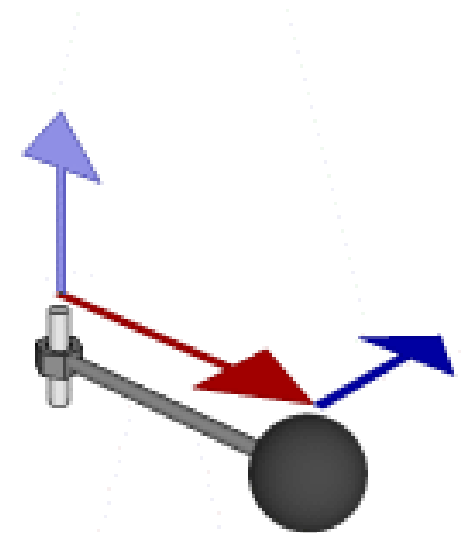
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$$= 0, \text{ bo } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \parallel \vec{p}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \end{aligned}$$



http://pl.wikipedia.org/wiki/Moment_p%C4%99du

Zasada zachowania momentu pędu

Wypadkowy moment siły powoduje zmianę **MOMENTU PĘDU** $\vec{L}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- ▶ Moment pędu układu jest zachowany, jeżeli wektorowa suma momentów sił działających na ten układ wynosi zero.

$$\sum \vec{M}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Siły, pędy i momenty

		II zas. dynamiki	Zasada zachowania
pęd	$\vec{p} = m \vec{v}$	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\sum \vec{F}_i = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{P} = \text{const}$
siła	$\vec{F} = m \vec{a}$		
moment pędu	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{M}_i = 0 \Leftrightarrow$ $\vec{L} = \text{const}$
moment siły	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$		

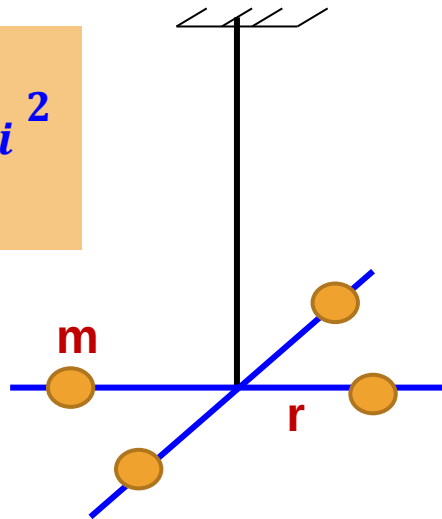
Moment bezwładności

- ▶ Opisywaliśmy do tej pory ruch punktu materialnego. Do opisu układu wielu punktów lub ciał potrzeba parametru opisującego, jak masa rozłożona jest względem pewnego punktu (np. środka masy lub wybranego punktu obrotu).
- ▶ Ograniczymy się do **brył sztywnych**, tzn ciał, w których odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami nie zmienia się podczas ruchu.

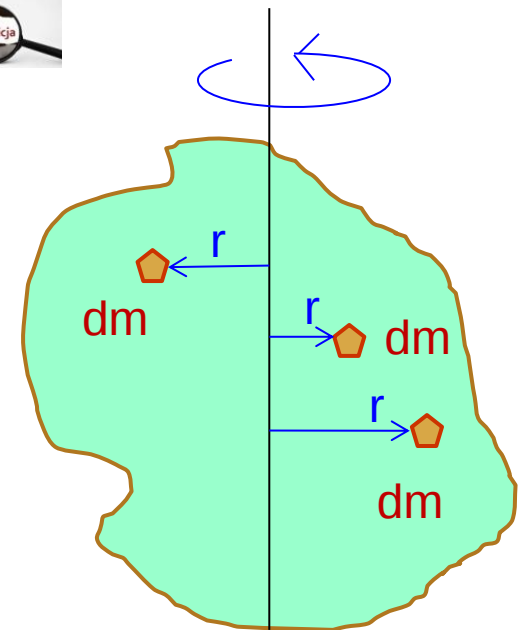
MOMENT BEZWŁADNOŚCI:



$$I = \sum m_i r_i^2$$



$$I = \int r^2 dm$$



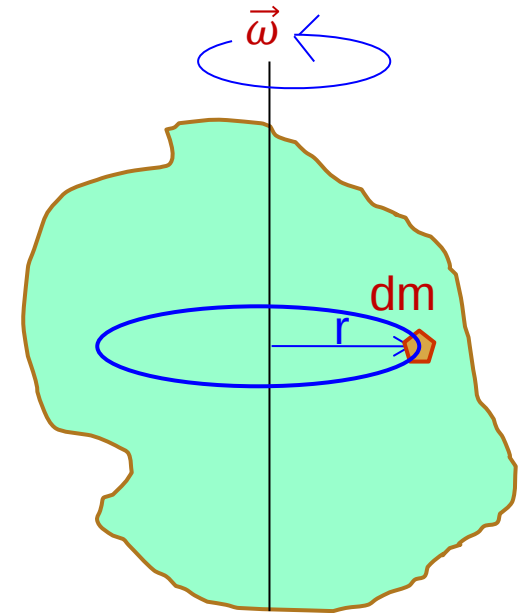
Dynamika bryły sztywnej

- ▶ Obrót bryły sztywnej wokół nieruchomej osi obrotu jest równoznaczny z ruchem po okręgu każdego punktu dm z prędkością obrotową $\vec{\omega}$ i prędkością liniową $\vec{v}$
- ▶ Energia kinetyczna obracającej się bryły:

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \boxed{\sum m_i r_i^2}$$

$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

$\boxed{\sum m_i r_i^2}$
 $\downarrow$
 $= I$



- ▶ Energia kinetyczna obracającego się ciała zależy od rozkładu masy względem osi obrotu i wyboru osi obrotu

- ▶ Analogicznie moment pędu:

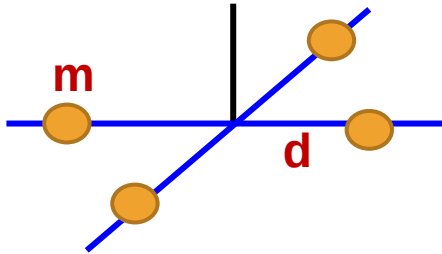
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Uwaga na moment bezwładności - **TENSOR**

Moment bezwładności

Przykłady obliczeń:

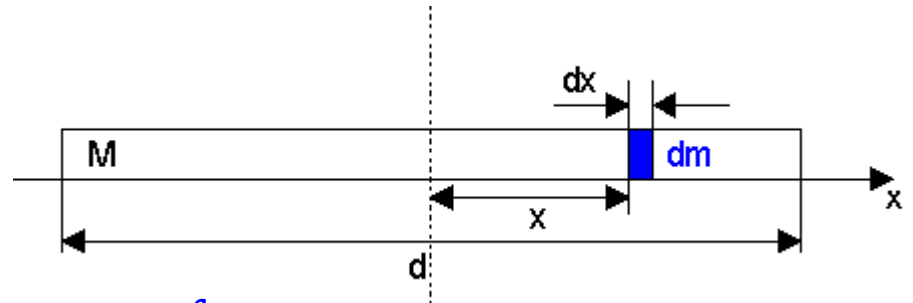
moment bezwładności można obliczyć tylko dla prostych geometrycznie układów:



$$I = \sum m_i r_i^2 = 4 m d^2$$

kula	$I = \frac{2}{5} MR^2$
walec	$I = \frac{1}{2} MR^2$

pręt względem osi przechodzącej przez środek



$$I = \int x^2 dm$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{M}{d}$$

$$I = \frac{M}{d} \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{M}{3d} x^3 \Big|_{-d/2}^{d/2} = \frac{Md^2}{12}$$

Moment bezwładności - spostrzeżenia

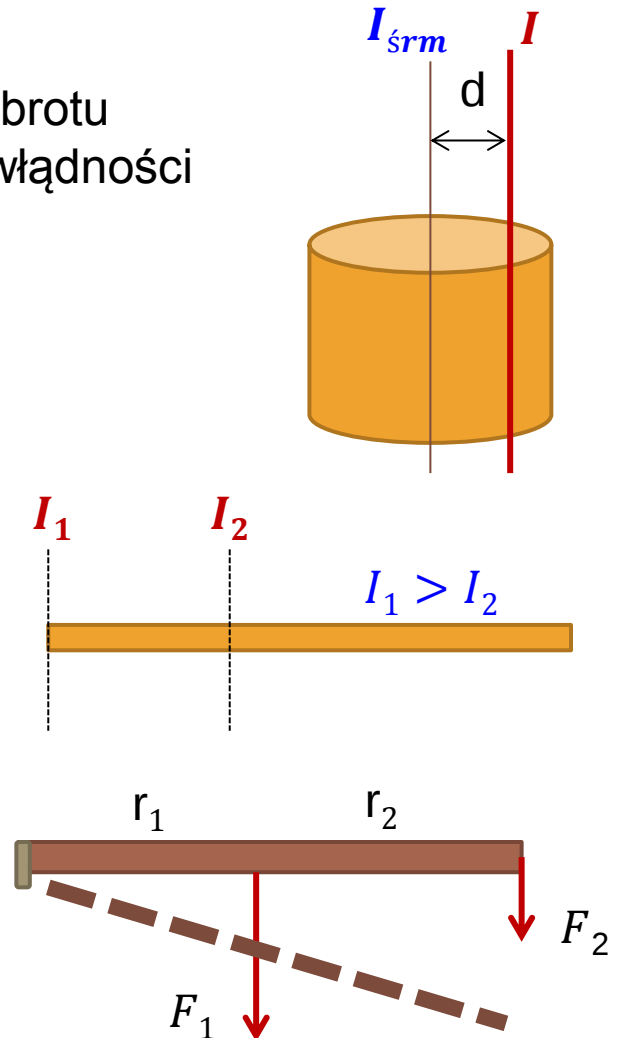
Twierdzenie Steinera:

Jeśli znamy moment bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez środek masy, to moment bezwładności względem dowolnej osi równoległej do niej wynosi:

$$I = I_{\text{śrm}} + Md^2$$

- ▶ Moment bezwładności jest miarą oporu jaki stwarza ciało przy próbie wprowadzenia go w ruch obrotowy.
- ▶ Zależy od wyboru osi obrotu i rozkładu masy względem osi obrotu.
 - do uzyskania tej samej prędkości kątowej, w przypadku I_2 potrzeba mniejszej siły,
 - ale drzwi lepiej otwierać przykładając siłę najdalej od zawiasów, bo wtedy jest największy moment siły:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$



Dynamika bryły sztywnej

- ▶ Do bryły sztywnej przykładamy siłę $\vec{F}$.

Bryła może obracać się wokół nieruchomej osi prostopadłej do ciała, w punkcie „O”.

- ▶ Na ciało działa moment siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- ▶ Ciało obraca się zgodnie z II zas. dyn. Newtona:

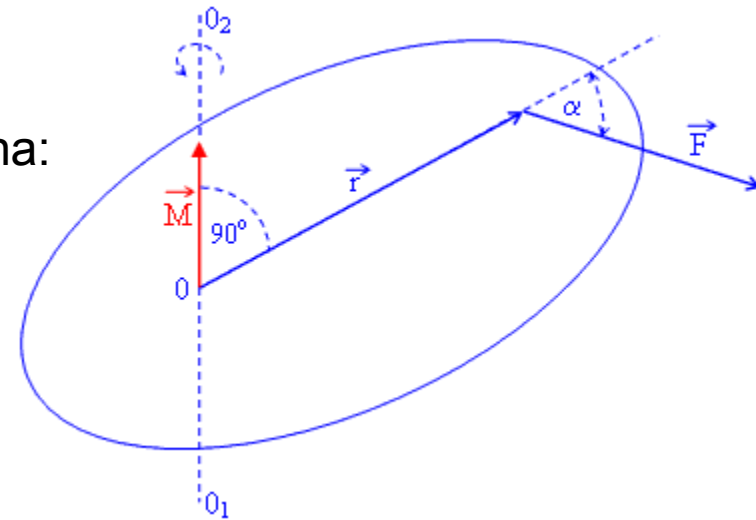
$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- ▶ Ciało obracając się o kąt φ wykonuje pracę:

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} d\vec{\varphi}$$

- ▶ Moc w ruchu obrotowym:

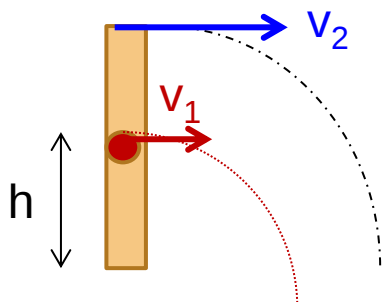
$$P = M \omega$$



zad: dopisać analogiczne wzory dla ruchu prostoliniowego...

Zasady zachowania w ruchu bryły sztywnej - przykłady

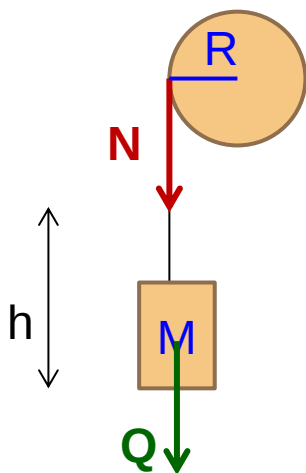
Zasada zachowania energii:



$$\Delta E_K + \Delta E_p = 0$$

$$Mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Tw. o pracy i energii:



Zmiana en. kinetycznej krążka jest równa pracy wykonanej przez ciężarek

$$\Delta E_k = W$$

$$\frac{1}{2} I \Delta \omega^2 = Qh$$

Zasada zachowania momentu pędu:



$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad L_2 = I_2 \omega_2$$

$$L_1 = L_2, \quad I_1 > I_2 \\ \Rightarrow \omega_1 < \omega_2$$

helikopter – wirnik spycha powietrze w dół i wytwarza siłę unoszącą

Równania ruchu:

$$N R = I \varepsilon$$

$$M a = Q - N$$

$$a = \varepsilon R$$

zad: sformułować ww zasady (założenie-teza)

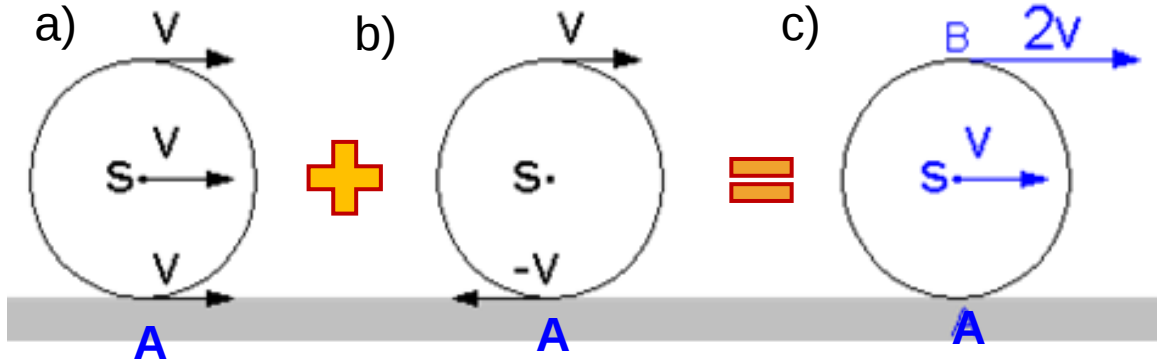
Toczenie (na dwa sposoby)



► **Toczenie** (bez poślizgu) – ruch postępowo-obrotowy

Z. Kąkol

I. Złożenie ruchu **postępowego** środka masy (a) i **ruchu obrotowego** względem środka masy (b)



$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

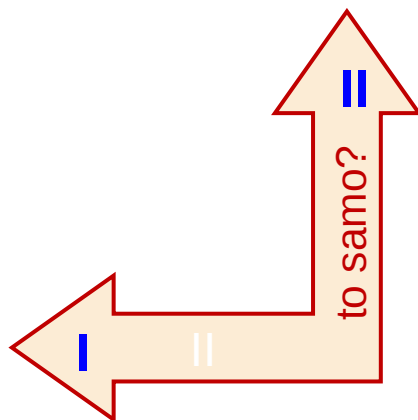
gdy koło się nie ślizga: $\omega = \frac{v}{R}$

LUB:

Toczenie II

II. Ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu:

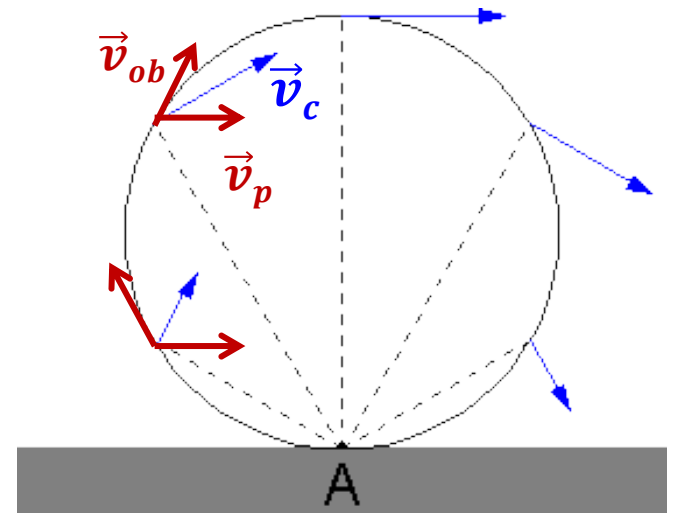
- punkt A spoczywa – porównaj z poprzednim rys.
- każdy inny punkt porusza się dookoła ptu A z prędkością $\vec{v}_c$, która jest złożeniem prędkości liniowej ruchu postępowego i obrotowego względem środka masy $\vec{v}_{ob}$. Jeżeli nie ma poślizgu, te prędkości mają równe długości.
- wektory prędkości $\vec{v}_c$ są $\perp$ promienia – ruch obrotowy względem pewnego punktu (p.slajd 4.)



$$E_k = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

$$I_A = I + MR^2$$

moment bezwładności
wzgl.ptu A (z tw. Steinera)



Podsumowanie

- ▶ Kinematyka ruchu obrotowego (prędkość kąтова, przyspieszenie dośrodkowe, styczne, kątowe).
- ▶ Dynamika ruchu obrotowego (moment siły, moment pędu)
- ▶ Moment bezwładności (bryły dyskretne i ciągłe)
- ▶ Zasady zachowania w ruchu obrotowym
- ▶ Toczenie jako złożenie ruchu postępowego i obrotowego

Pokazy doświadczeń

- ▶ Moment bezwładności i moment siły
 - ▶ Ruch szpulki z nawiniętą nitką (nieposłuszna szpulka).
 - ▶ Stolik obrotowy – człowiek z hantlami, obracający się dysk