Podstawy fizyki – sezon 2
7. Układy elektryczne RLC

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

AGH, WFIiS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 111
amucha@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~amucha

AGH

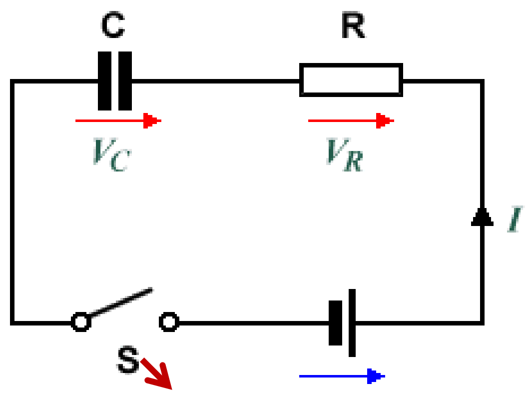
Układ RC

- Podczas ładowania kondensatora zmienia się natężenie prądu w obwodzie i napięcie na oporze.
- Napięciowe prawo Kirchoffa:

$$\mathcal{E} - U_R - U_C = 0$$

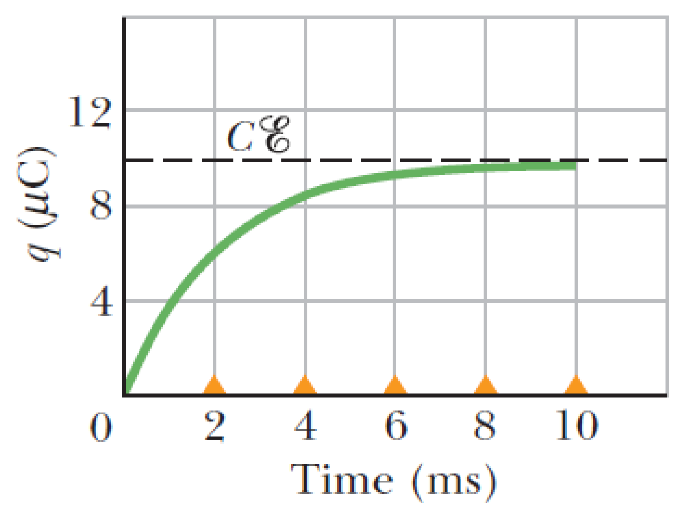
$$\boxed{\mathcal{E} - IR - \frac{q}{C} = 0} \qquad I = \frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}}$$



Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

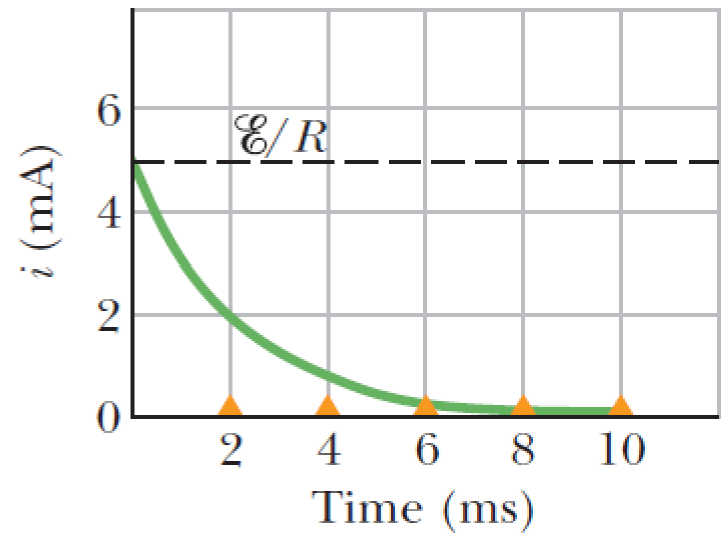
$$\boxed{q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/(RC)}\right)}$$



Stała czasowa RC

- Prąd w obwodzie RC:

$$I = \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R}\right) e^{-t/(RC)}$$



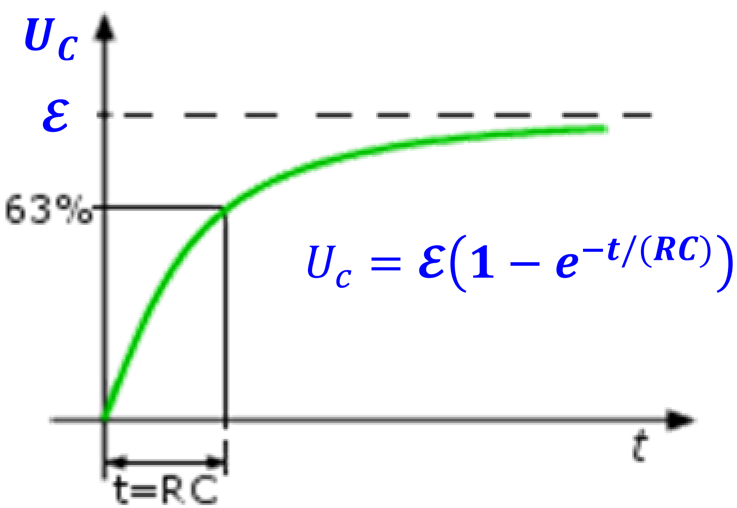
- Kondesator po naładowaniu jest po prostu przerwą w obwodzie, przepływ prądu jest w istocie rozładowaniem kondensatora.

- Napięcie na kondensatorze:

$$U_c = \frac{q}{C} = \boldsymbol{\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/(RC)}\right)}$$

- Iloczyn oporu i pojemności – **stała czasowa** układu - $\boldsymbol{\tau = RC}$

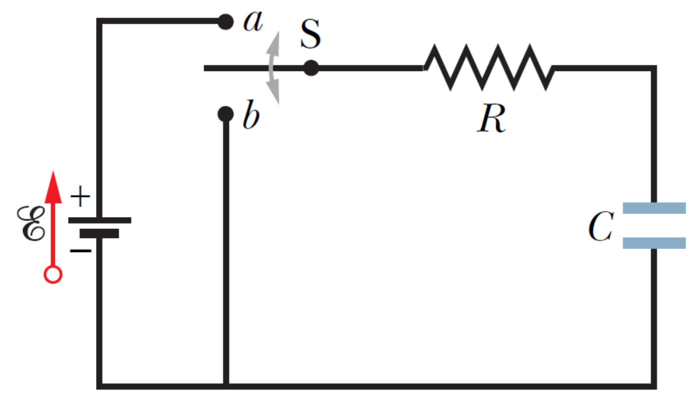
  Im większa stała czasowa, tym dłużej kondensator się rozładowuje



Rozładowanie kondensatora

- Jeżeli teraz kondesator zacznie się rozładowywać – przełącznik w pozycji „b”

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$



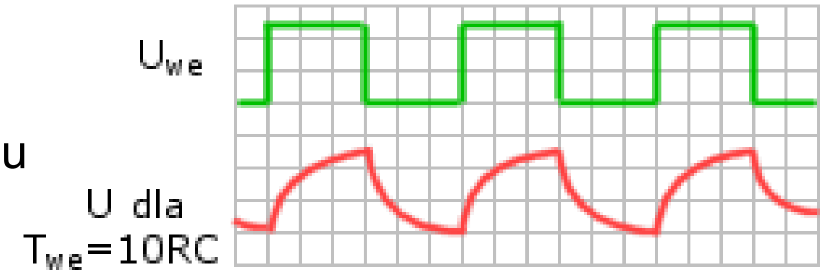
  - Rozwiązanie – zależność ładunku od czasu:

$$\boxed{q(t) = q_0 e^{-t/(RC)}}$$

  - A natężenie prądu:

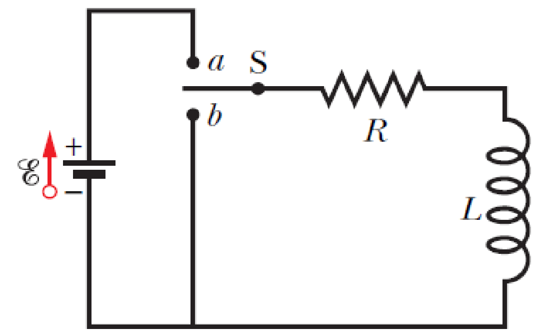
$$\boxed{I = \frac{dq}{dt} = -\left(\frac{q_0}{RC}\right) e^{-t/(RC)}}$$

- Jeżeli ładowanie i rozładowanie nastąpią wielokrotnie, to otrzymamy oscylacje prądu (ładunku, napięcia)



Układy RL

- Mamy obwód z opornikiem i cewką:



- Najpierw (pozycja „a" przełącznika) prąd ze źródła napięcia zaczyna płynąć przez opornik i cewkę.
- Prąd rośnie, zatem w cewce wytwarza zmienne pole magnetyczne i wyindukowane SEM:

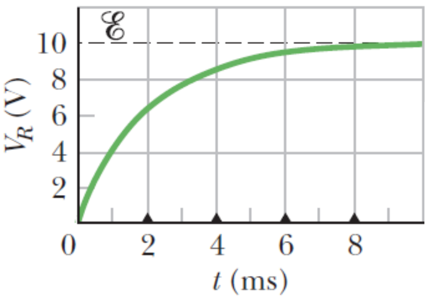
$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathscr{E}$$

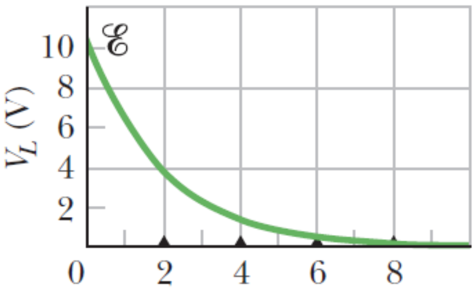
- Rozwiązaniem tego równania jest:

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

stała czasowa układów RL:

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

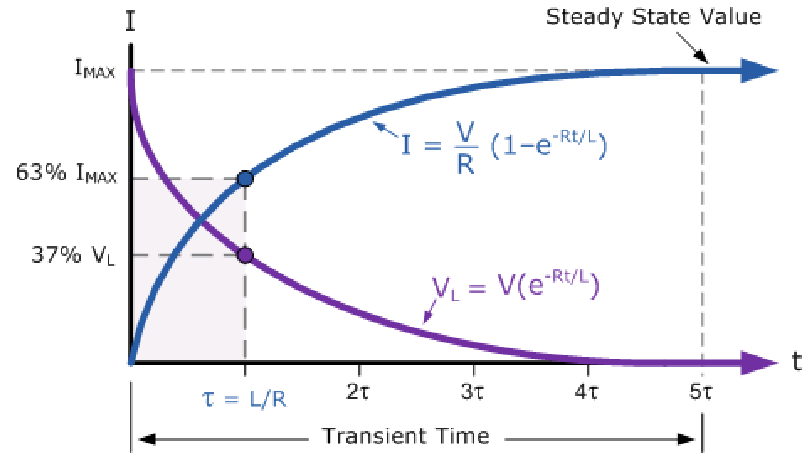




Układy RL

- Prąd w cewce rośnie do wartości maksymalnej

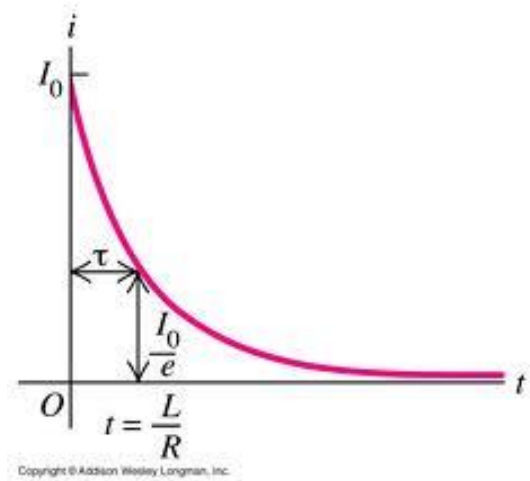
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$



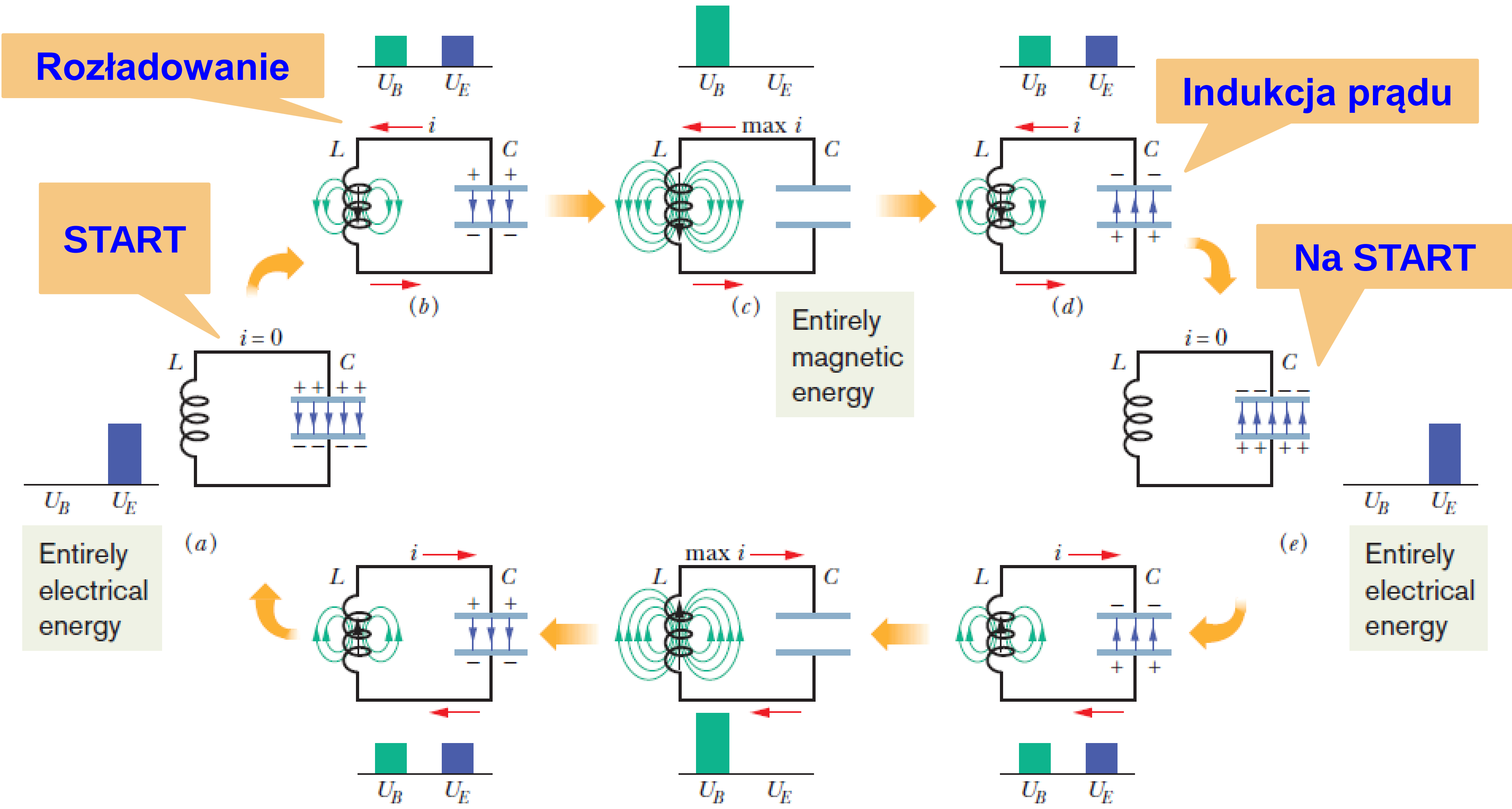
- Jeżeli odłączymy źródło:

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0$$

$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau_L} = i_0 e^{-t/\tau_L}}$$



Czas na układ cewka-kondensator (LC)



Drgania układu LC

- **START** – zaczynamy od całkowicie naładowanego kondensatora. Prąd nie płynie, cała energia pochodzi z pola elektrycznego kondensatora:

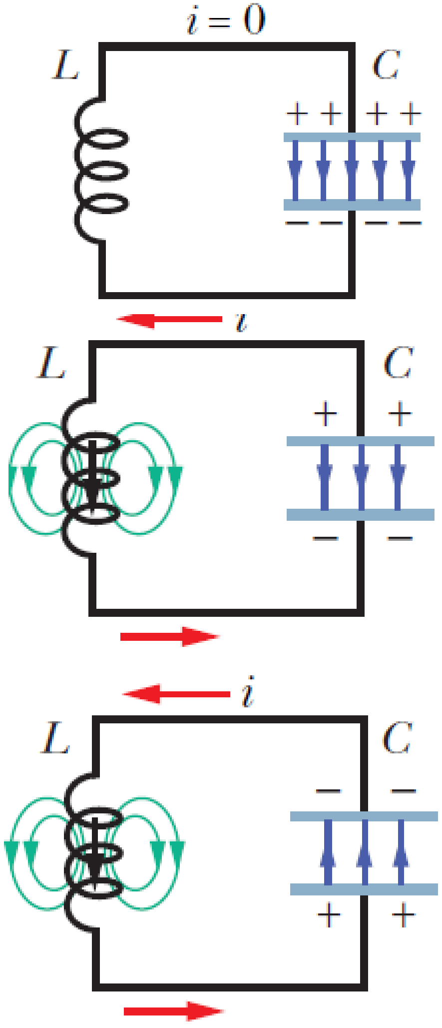
$$E_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

- **ROZŁADOWANIE** – kondensator się rozładowuje, przez układ zaczyna płynąć prąd. Energia kondensatora maleje, rośnie energia cewki:

$$E_B = \frac{1}{2} LI^2$$

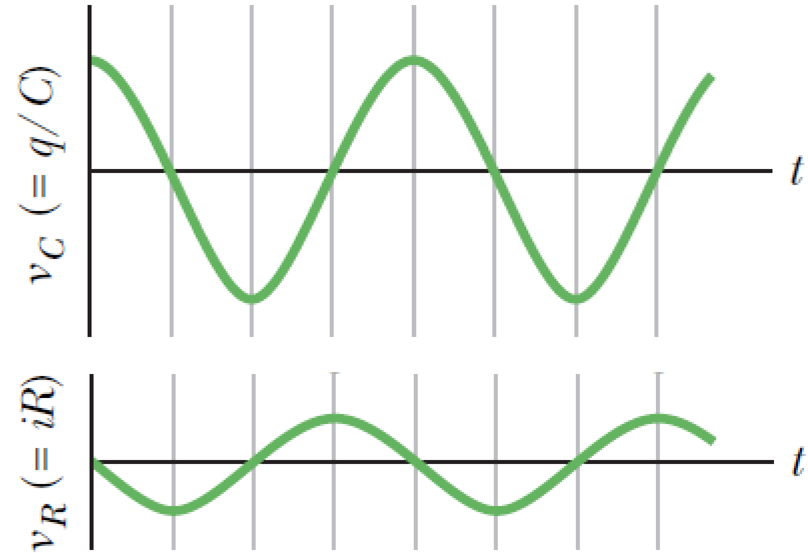
- **INDUKCJA PRĄDU** w cewce – malejący prąd przepływający przez cewkę indukuje w niej prąd, który podtrzymuje pierwotny prąd. Ładuje wtedy kondensator, ale z przeciwną polarnością.

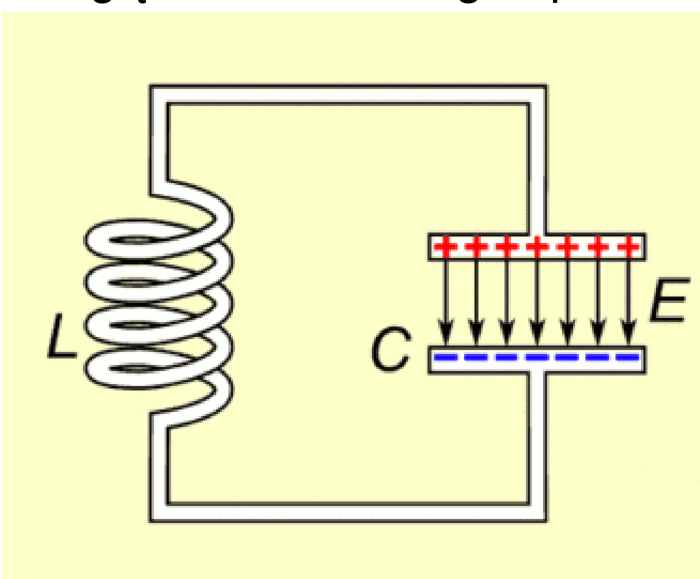
- **NA START-** cykl powtarza się, ale prąd płynie w **przeciwną stronę.**



Drgania LC

- Napięcie na kondensatorze zmienia się okresowo z czasem:
- A napięcie w obwodzie (z uwzględneniem małego oporu układu):

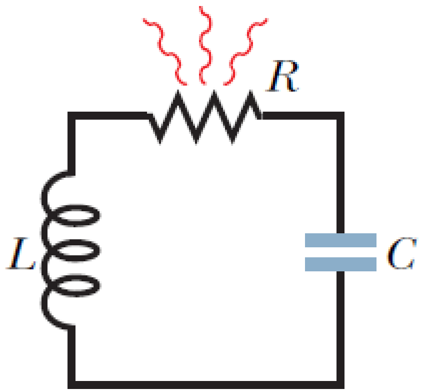




- W rzeczywistym układzie LC drgania zanikają z powodu strat energii na oporze

http://en.wikipedia.org/wiki/RLC_circuit

Drgania tłumione RLC



- Energia zgromadzona w kondesatorze i cewce:

$$E_{C,B} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2$$

jest rozpraszana na oporniku (w postaci enegii cieplnej) z szybkością:

$$\frac{dE}{dt} = -I^2R$$

- Równanie dla układu RLC (zasada zachowania energii):

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 = -I^2R \qquad I = \frac{dq}{dt}$$

czyli:

$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0}$$

rozwiązanie:

$$q(t) = q_{max}\, e^{-Rt/2L}\cos\left(\omega' t + \phi\right)$$

gdzie: $$\omega' = \sqrt{{\omega_0}^2 - (R/2L)^2}$$ sprawdzić!

Tłumienie w układach RLC

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ częstość drgań nietłumionych (własnych) (LC)

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

wsp. tłumienia w ukł RLC

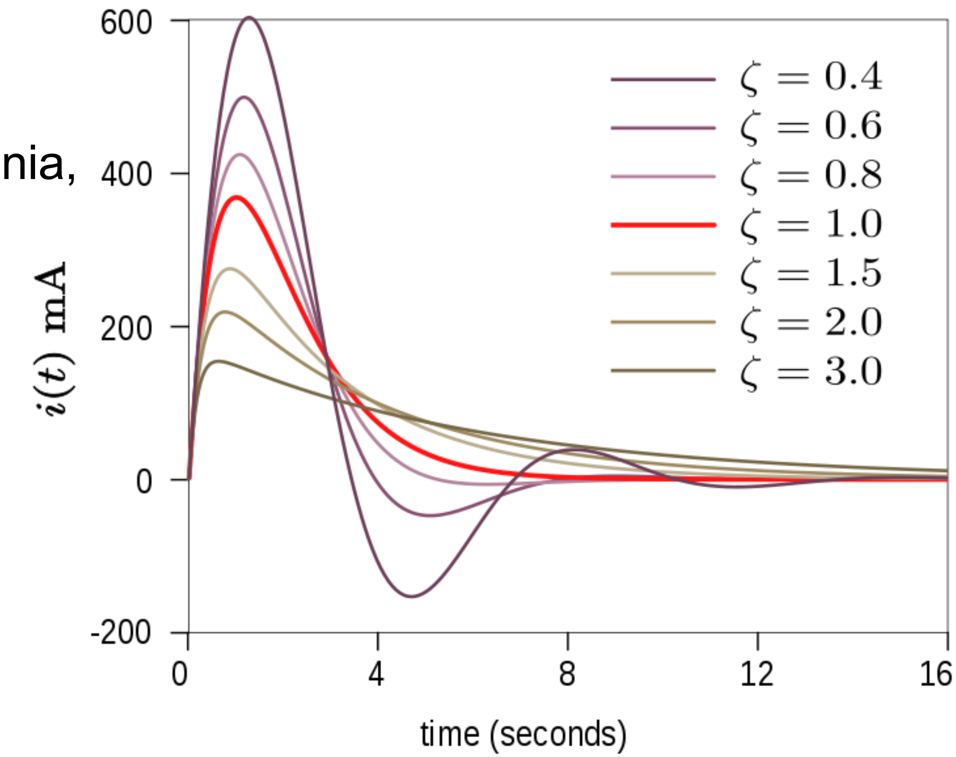
$\alpha = \frac{R}{2L}$ wsp. tłumienia w ukł RL

- W zależności od współczynnika tłumienia, drgania maja charakter:
  - ruch aperiodyczny: $\xi > 1$

    $R > 2\sqrt{L/C}$
  - tłumienie krytyczne: $\xi = 1$;

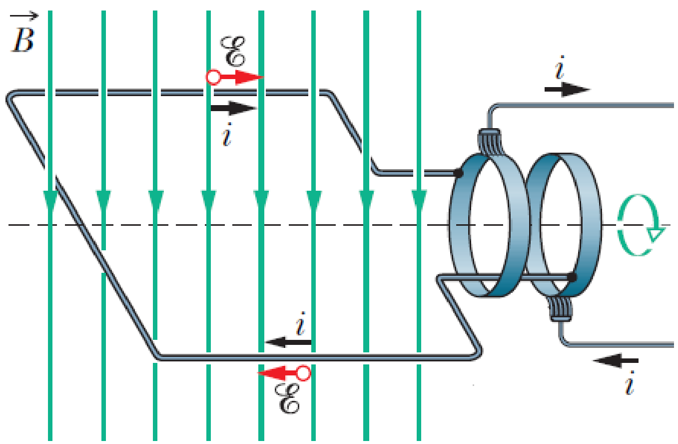
    $R = 2\sqrt{L/C}$
  - tłumiona oscylacja $\xi < 1$;

    $R < 2\sqrt{L/C}$



Wymuszenie w RLC

- W celu podtrzymania drgań w układach RLC stosowane jest zewnętrzne źródło SEM.
- Przeważnie SEM zmienia się okresowo (AC):
  - zmiana amplitudy napięcia dzięki transformatorowi,
  - mniejsze straty energii przy przesyłaniu,
  - zastosowania domowe i przemysłowe: prądnice, silniki



PRĄDNICA

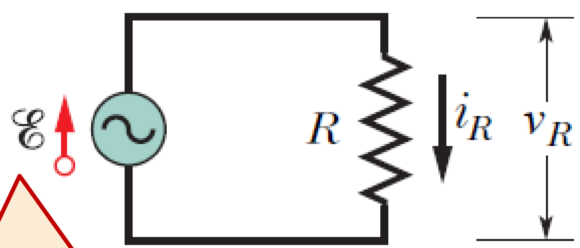
Ramka jest obracana w zewnętrznym polu magnetycznym.
Indukowana SEM:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t$$

$$I = I_{max}(\sin \omega t - \phi)$$

Obwody AC

- Do źródła prądu zmiennego przyłączamy najpierw wyłącznie opornik (**obciążenie oporowe**):



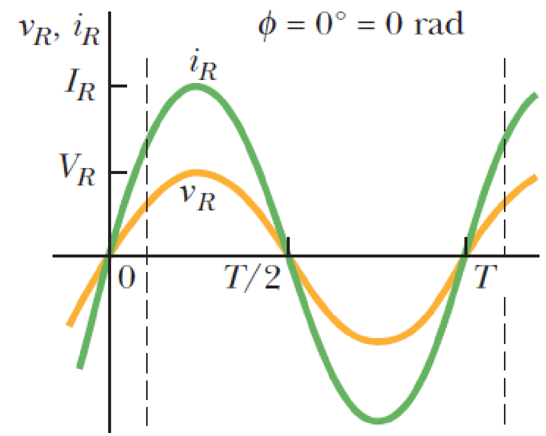
$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t}$$

$$\mathcal{E} - U_R = 0$$

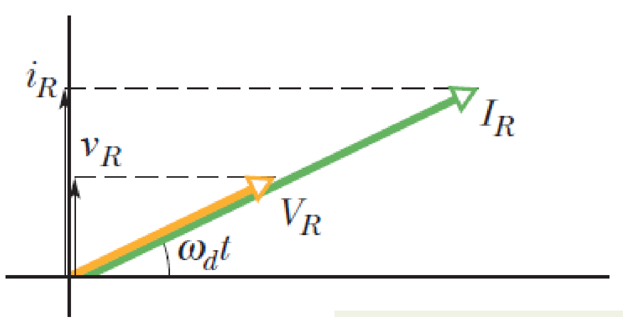
$$U_R = \mathcal{E}_{R\,max} \sin \omega t$$

$$I_R = I_{R\,max}(\sin \omega t - \underbrace{\phi}_{\phi\,=\,0})$$

$$I_R = U_R/R$$



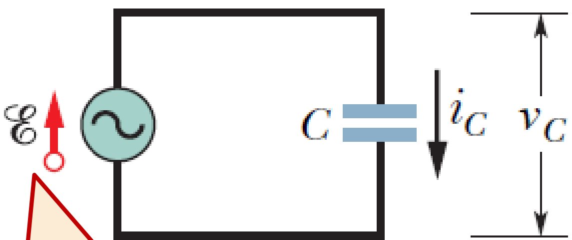
Zależności U_R i I_R, przedstawia się za pomocą **wskazów** (lub liczb zespolonych – za chwilę!)



Prąd i napięcie na oporniku drgają w zgodnej fazie (max i min pokrywają się w czasie)

$$\boxed{I_R = \frac{U_{R\,max}}{R} \sin \omega t}$$

Obciążenie pojemnościowe



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t$$

$$\mathcal{E} - U_C = 0$$

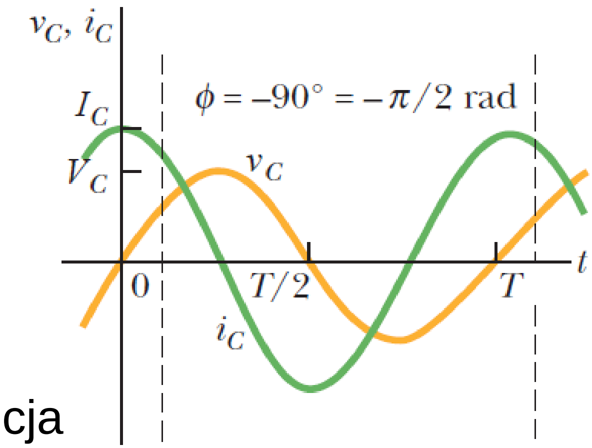
$$U_C = U_{C\,max} \sin \omega t$$

$$q = CU_C = CU_{C\,max} \sin \omega t$$

$$I_C = \frac{dq_C}{dt} = \underbrace{\omega C \;\; U_{C\,max}}\cos \omega t$$

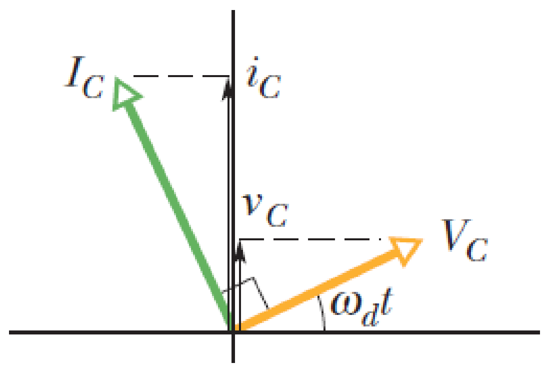
$$I_{C\,max} = U_{C\,max}/X_C$$

reaktancja pojemnościowa (def)



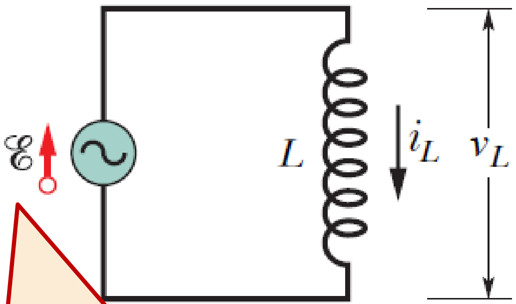
- Możemy również zapisać:

$$I_C = \frac{U_{C\,max}}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Natężenie prądu w obwodzie pojemnościowym wyprzedza napięcie.

Obciążenie indukcyjne



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t$$

$$\mathcal{E} - U_L = 0$$

$$U_L = U_{L\,max} \sin \omega t$$

$$U_L = L\,\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_{L\,max}}{L}\,\sin \omega t$$

$$I_L = \int I_L dt = \frac{U_{L\,max}}{L}\int \sin \omega t\, dt =$$

$$-\frac{1}{\omega L} U_{L\,max} \cos \omega t$$

$$\boxed{X_L = \omega\, L}$$ def.

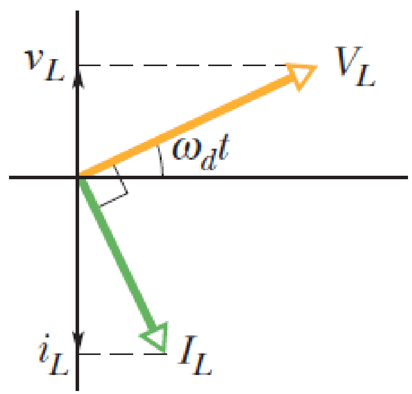
reaktancja indukcyjna

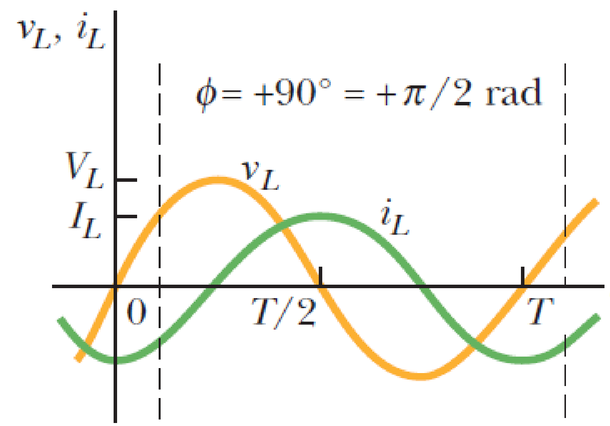
$$\boxed{I_{L\,max} = U_{L\,max}/X_L}$$

- Możemy również zapisać:

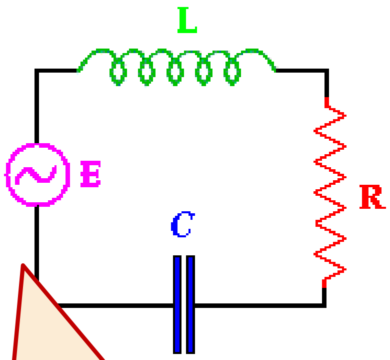
$$I_L = \frac{U_{L\,max}}{X_L}\, sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Natężenie prądu w obwodzie indukcyjnym opóźnia się w stosunku do napięcia.





Szeregowy układ RLC



$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t$$

$$\mathcal{E} - U_R - U_L - U_C = 0$$

$$I = I_{max} (\sin \omega t - \phi)$$

(na wzór poprzednich)

$$I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{Z}$$

gdzie: $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$ def. impedancja obwodu

$$\boxed{I_{max} = \frac{\mathcal{E}_{max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}}$$

Gdy $X_L - X_C = 0,$ natężenie prądu w obwodzie osiąga maksimum. Układ jest w stanie rezonansu elektrycznego.

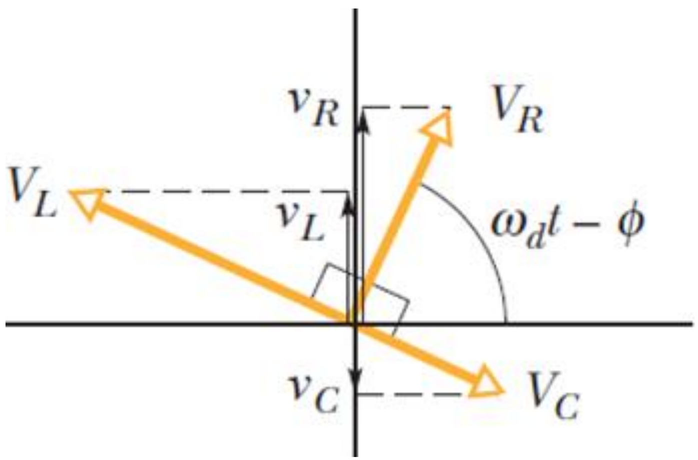
$$X_L = X_C \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

czyli, SEM wymuszające ma częstotliwość (zwaną rezonansową) równą:

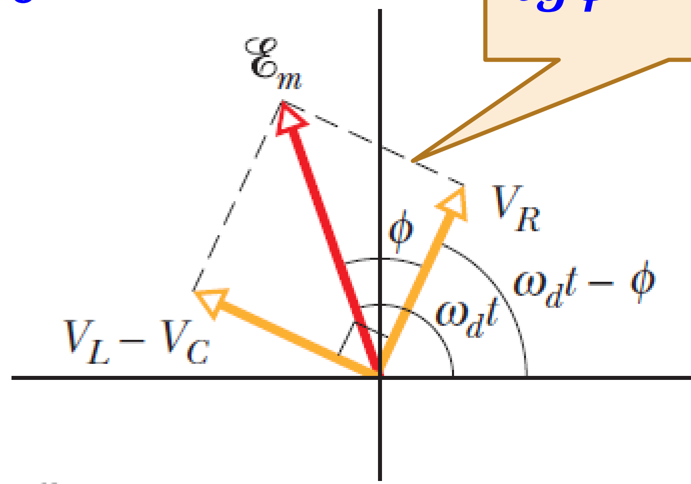
$$\boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Wskazy w RLC

$$\mathcal{E} - U_R - U_L - U_C = 0$$



$$tg\phi = \frac{U_L - U_C}{U_R}$$

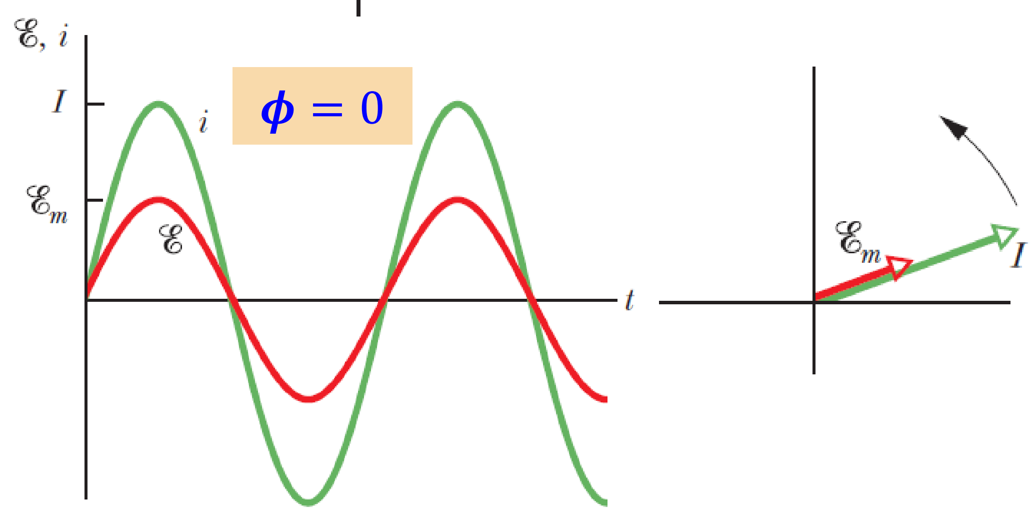


$$tg\phi = \frac{I\,X_L - I\,X_C}{I\,R}$$

- Faza początkowa:

$$\boxed{tg\phi = \frac{X_L - X_C}{R}}$$

- Gdy $X_L = X_C$, to napięcie zmienia się w fazie z natężeniem, układ jest w **rezonansie**

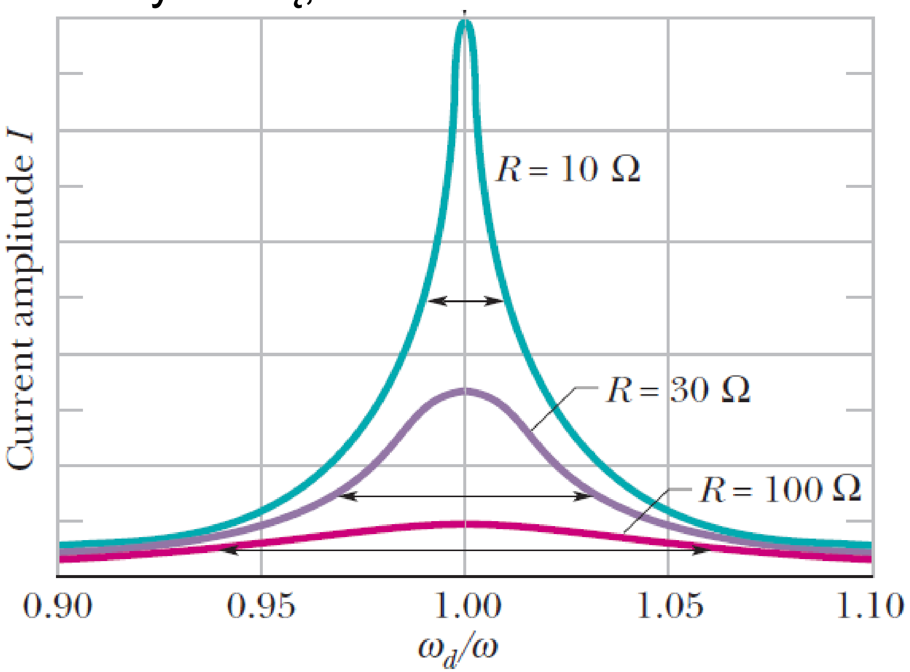


Rezonans elektryczny

- Gdy częstotliwość SEM wymuszającej dopasowana jest do częstości drgań swobodnych:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

  - natężenie prądu osiąga wartość maksymalną,
  - a układ jest w rezonansie.



Moc

- W układach ze zmiennym prądem, moc (szybkość rozpraszania energii) wyrażona jest przez funkcję zależną od czasu:

$$P = I^2\, R = I^2{}_{max}(\sin^2 \omega t - \phi)\, R$$

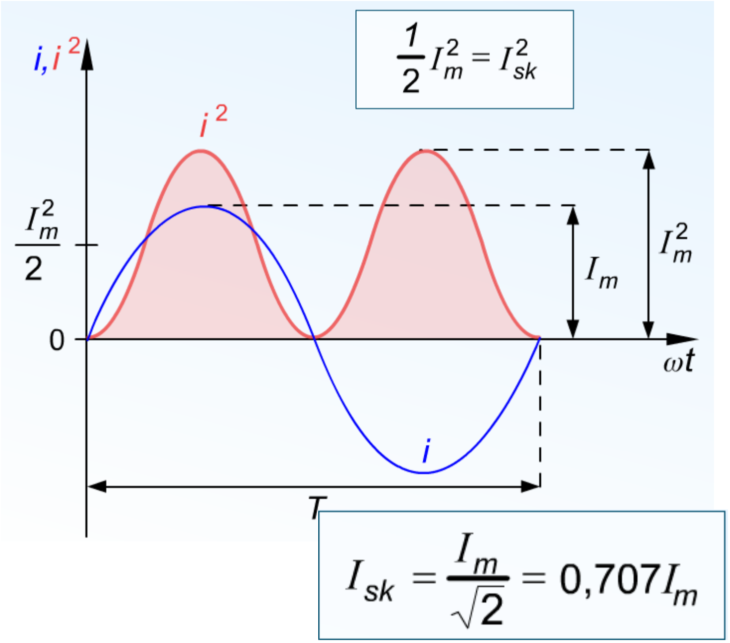
- Natomiast **średnia moc:**

$$P_{śr} = \frac{I^2{}_{max}\, R}{2} = \underbrace{\left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right)}_{I_{sk}}{}^2\, R$$

wartość skuteczna natężenia prądu

$$\boxed{P_{śr} = I^2{}_{sk}\, R}$$

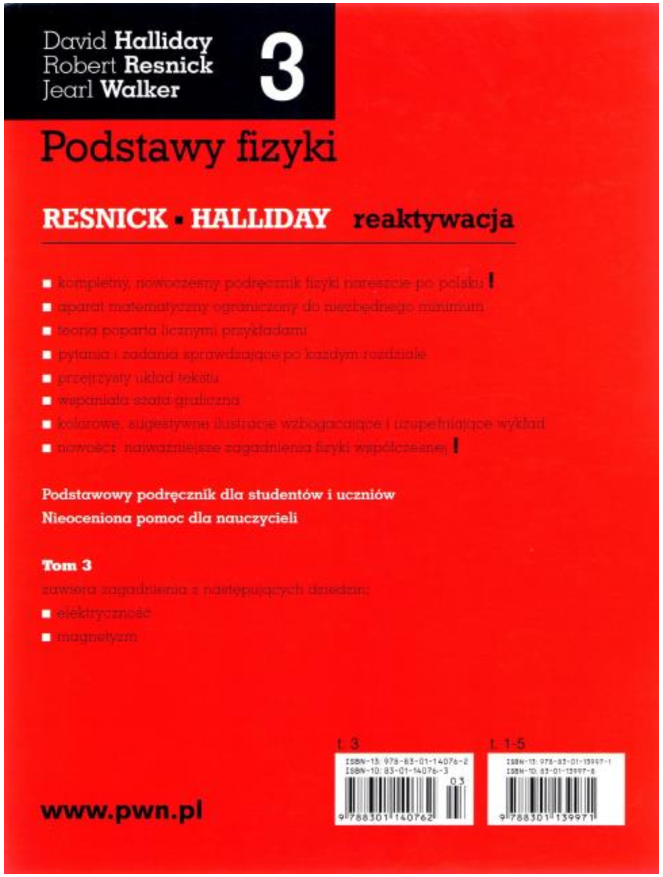
analogicznie: napięcie skuteczne: $U_{sk} = \dfrac{U_{max}}{\sqrt{2}}$



http://static.scholaris.pl/main-file/108/wartosc_skuteczna_pradu_64551.swf

Podsumowanie

- Drgania LC.
- Układy RLC (równanie Kirchoffa, rozwiązanie, impedancja, rezonans, faza początkowa)
- Prąd skuteczny, moc średnia w układach ze zmiennym prądem.



* rysunki pochodzą z: „Fundamentals of Physics. Part 3
David Halliday, **Robert Resnick**, **Jearl Walker**