

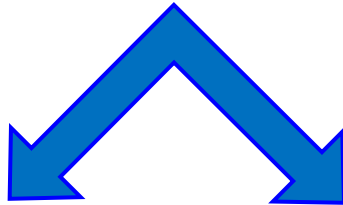
Podstawy fizyki – sezon 1

IX. Mechanika płynów

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

AGH,WFiIS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 111
amucha@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

Mechanika płynów



Hydrostatyka

Hydrodynamika

PŁYNY = CIECZE + GAZY

- ▶ Opis jest różny od mechaniki bryły sztywnej (zmiana kształtu, ściśliwość)
- ▶ W płynach brak regularnego uporządkowania atomów i cząsteczek (jak w sieci krystalicznej ciał stałych).
- ▶ Płyn – substancja zdolna do przepływu, przyjmuje kształt naczynia, w którym się znajduje,
- ▶ W płynach w spoczynku nie występują żadne naprężenia ścinające.
- ▶ Na płyny działają tylko siły prostopadłe do ich powierzchni. Powierzchnia ustawia się zawsze normalnie do siły zewnętrznej (dośw)
- ▶ Zamiast wyznaczać masę i siłę, opisujemy **gęstość i ciśnienie**

Ciśnienie

- ▶ **Ciśnienie** – wartość siły prostopadłej na jednostkę powierzchni:

$$p = \frac{F_{\perp}}{S} \quad \left[\frac{N}{m^2} = 1 Pa \right]$$

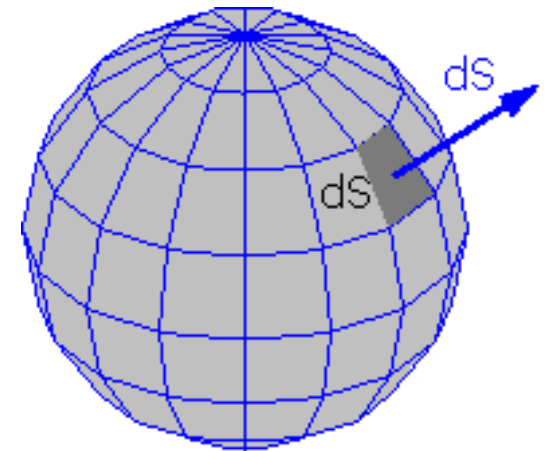
$$10^5 Pa = 1 bar ; \quad 1 atm = 1013,25 hPa = 760 mmHg$$

- ▶ **Wektor powierzchni**- długość wektora \vec{dS} jest równa polu powierzchni dS , jego kierunek jest **prostopadły** do powierzchni, a zwrot na zewnątrz powierzchni.

- ▶ Siła wywierana przez płyn na tę powierzchnię:

$$\vec{dF} = p \vec{dS}$$

- ▶ **Gęstość** - $\rho = \frac{dm}{dV}$ - zależy od temperatury, ciśnienia



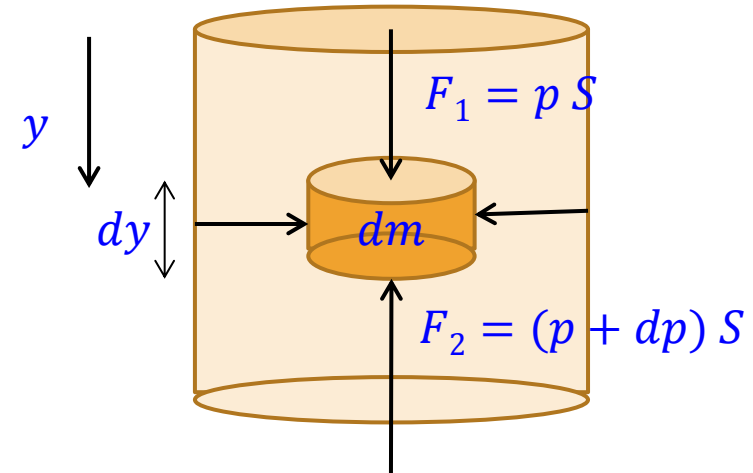
Ciśnienie wewnątrz płynu (hydrostatyka)

- ▶ Ciśnienie wywierane przez płyn **WEWNĄTRZ** naczynia:

na górną i dolną powierzchnię cienkiego walca, o wysokości dy , znajdującego się na głębokości y , działają siły:

$$F_1 = p S, \quad F_2 = (p + dp) S$$

$$dp = \frac{dm g}{S} = \frac{\rho S dy g}{S} = \rho g dy$$



$\frac{dp}{dy} = \rho g$ zmiana ciśnienia w zależności od zmiany głębokości
ciężar właściwy cieczy

- ▶ Ciśnienie hydrostatyczne cieczy na głębokości y (całkujemy powyższe):

$$p = p_0 \pm \rho g y$$

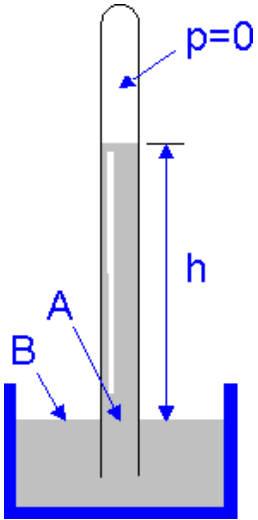
ciśnienie atmosferyczne

- ▶ ciśnienie rośnie wraz z głębokością (nurek),
- ▶ ciśnienie maleje z wysokością (treking),
- ▶ ciśnienie jest jednakowe dla punktów na tej samej głębokości, nie zależy od kształtu naczynia (paradoks hydrostatyczny).

Pomiar ciśnienia

- ▶ Do pomiaru ciśnienia – barometr

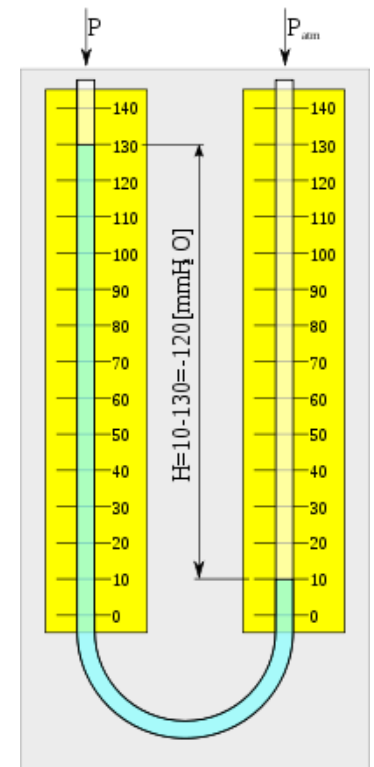
Barometr Torricellego (1643) – pomiar ciśnienia atmosferycznego za pomocą rurki z rtęcią



$$p_A = \rho g h$$
$$p_B = p_{atm}$$
$$p_A = p_B$$
$$p_{atm} = \rho g h$$



Współcześnie:



Barometry, manometry

- ▶ Ze względu na rodzaj pomiaru barometry można podzielić na:
 - bezwzględne – wskazują ciśnienie absolutne, czyli w odniesieniu do próżni,
 - różnicowe – wskazują różnicę ciśnień,
 - względne (manometry) – wskazują ciśnienie względem ciśnienia otoczenia (względne) i większe od niego,
- ▶ Manometry:
 - hydrostatyczne,
 - sprężynowe,
 - elektryczne
- ▶ Próżniomierze



Ciśnienie

- ▶ Ciśnienie pod wodą – po każdym zanurzeniu o 10 m ciśnienie zwiększa się o 1 atm.

$$p = p_0 + rgh$$

$$p = 1013 \text{ hPa} + (998 \text{ kg/m}^3)(10 \text{ m/s}^2)(10\text{m}) \approx 1 \text{ atm} + 1\text{atm}$$

Rekord nurkowania swobodnego (free-diving) to ponad 270m !

- ▶ Łodzie podwodne 200-400m
- ▶ Ciśnienie atmosferyczne na wysokości H:

$$p = p_0 - \rho_{\text{pow}} g H \quad \text{ale:} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$$

co daje: $\frac{dp}{dh} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p$

$$p = p_0 e^{-g \frac{\rho_0}{p_0} h}$$

wzór barometryczny

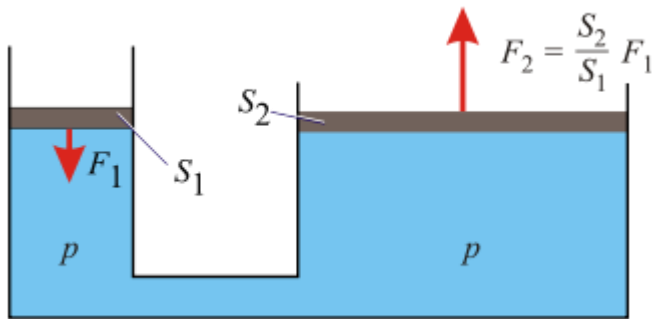
rozwiązać lub sprawdzić!



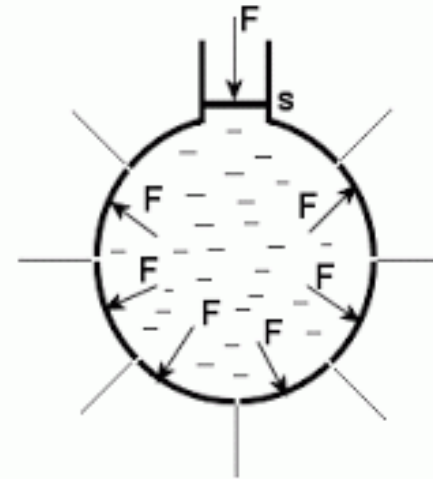
4000 m 2700 m 300 m

Prawo Pascala

- ▶ W zamkniętej objętości płynu (nieściśliwego) zmiana ciśnienia jest przenoszona do każdego miejsca w płynie i do ścian zbiornika (prasa hydrauliczna, hamulce, ciśnienie w oponie jest w każdym miejscu jednakowe, itp.)

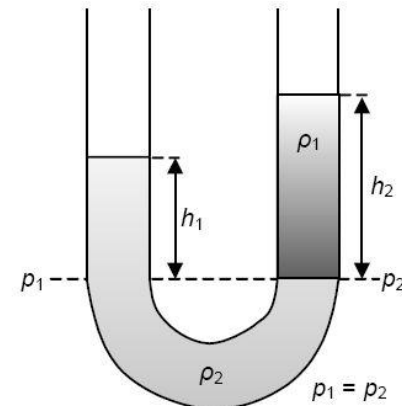
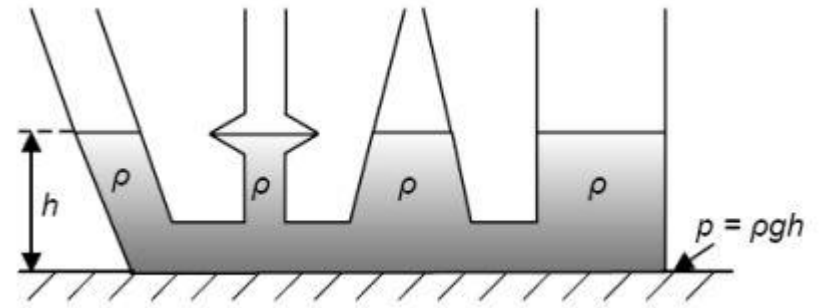
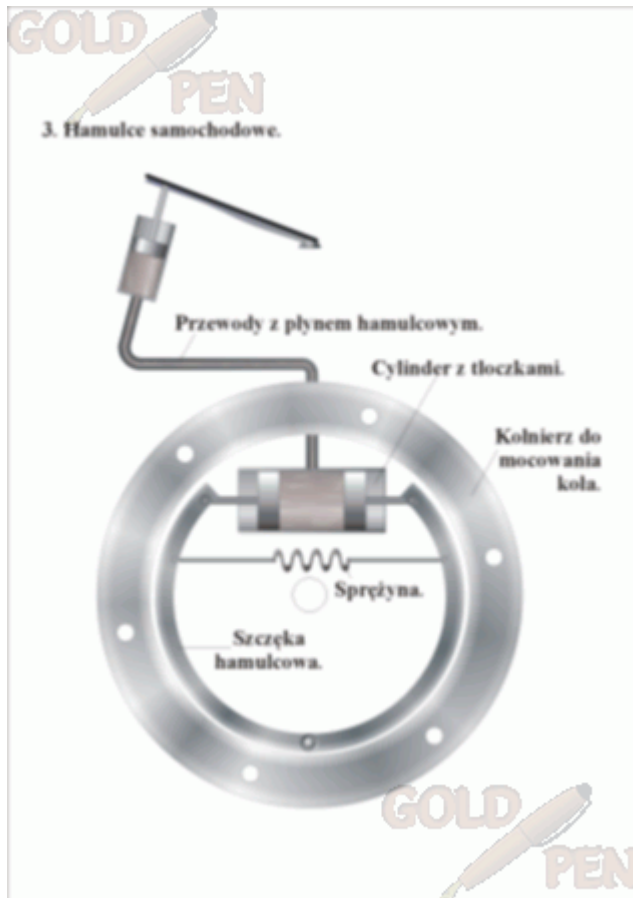


$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$



- Można działać mniejszą siłą w celu podniesienia większego ciężaru (kosztem drogi).
- Przyrost ciśnienia jest w każdym miejscu taki sam, niezależny od głębokości

Prawo Pascala - przykłady



$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$p_0 + \rho_1 h_1 g = p_0 + \rho_2 h_2 g$$

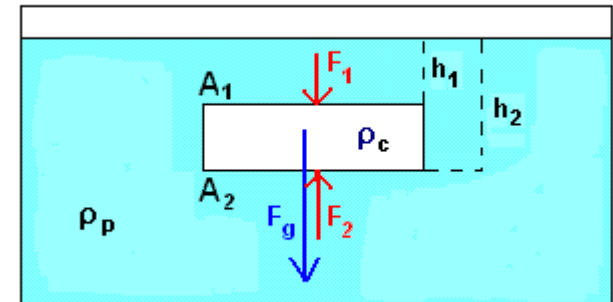
Prawo Archimedesesa

- ▶ Na ciało zanurzone w cieczy działa siła grawitacyjna – gdy ciało się nie porusza musi ona być zrównoważona przez inną siłę – zwaną **siłą wyporu**
- ▶ Siła wyporu wynika z **różnicy ciśnień** działających na górną i dolną powierzchnię ciała.

$$p(h) = p_0 - \rho g h$$

$$F_w = p(h_2)A_2 - p(h_1)A_1$$

$$F_w = \rho g (h_2 - h_1)A$$



$$F_w = \rho g V$$

PRAWO ARCHIMEDESA: na ciało zanurzone w płynie działa siła wyporu, skierowana pionowo do góry, a jej wartość jest równa ciężarowi wypartej przez ciało cieczy.

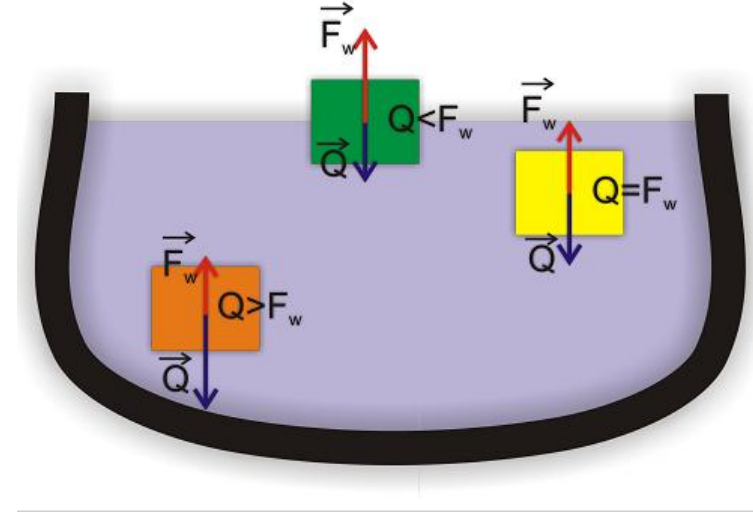
Pływanie ciał

- ▶ Warunki pływania- gdy ciało pływa, wartość działającej na nie siły wyporu F_w jest równa wartości działającej na nie siły ciężkości.

$$F_w = mg$$

$$\rho_{\text{płynu}} V_{\text{ciała}} g = \rho_{\text{ciała}} V_{\text{ciała}} g$$

$$\rho_{\text{płynu}} = \rho_{\text{ciała}}$$



- ▶ Statki powinny wypierać ciecz o ciężarze równym własnemu ciężarowi.

$$M_s g = \rho_w V g$$

zanurzenie jest proporcjonalne do $V = \frac{M_s}{\rho_w}$, czyli zależy od gęstości wody (temp, zasolenia)

Pływanie ciał

Przykład: Jaka część objętości góry lodowej wystaje nad powierzchnię morza? Gęstość lodu wynosi 920 kg/m^3 a gęstość wody morskiej 1030 kg/m^3 .

$$Q_l = \rho_l V_l g \quad \text{Ciężar góry lodowej}$$

$$Q_w = \rho_w V_w g \quad \text{Ciężar objętości } V_w \text{ wypartej wody morskiej.}$$

$$\rho_l V_l g = \rho_w V_w g \quad \text{Warunek pływania.}$$

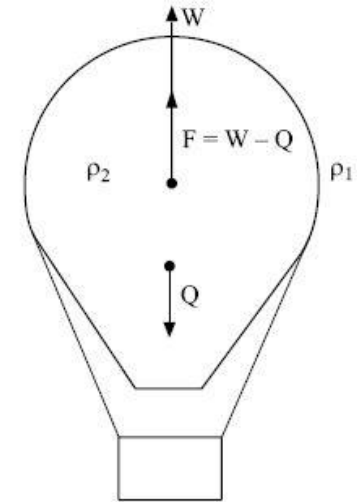
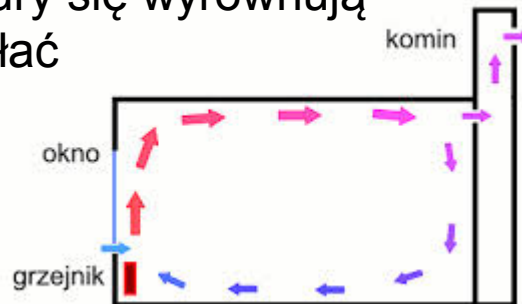
$$\frac{V_w}{V_l} = \frac{\rho_l}{\rho_w} = \frac{920}{1030} = 0.89$$

Objętość wypartej wody równa się objętości zanurzonej części góry lodowej, czyli 89% góry znajduje się pod wodą.



Siła wyporu powietrza

- ▶ Na każde ciało znajdujące się w powietrzu przy powierzchni Ziemi działa siła wyporu równa ciężarowi wypartego powietrza. Ciało o objętości 1m^3 wypiera 1m^3 powietrza, którego ciężar jest około 12N - każde ciało, ważone przy powierzchni Ziemi naciska na wagę siłą o ok. 12N mniejszą od ich ciężaru (co waży więcej – ton puchu czy tona kamieni?) – poprawki na pomiar masy
- ▶ Wentylacja grawitacyjna działa dzięki różnicy temperatury wewnątrz i na zewnątrz budynku - lżejsze, ciepłe powietrze płynie ku górze, a na jego miejsce napływa powietrze zimniejsze - cięższe. Latem temperatury się wyrównują - wentylacja przestaje działać



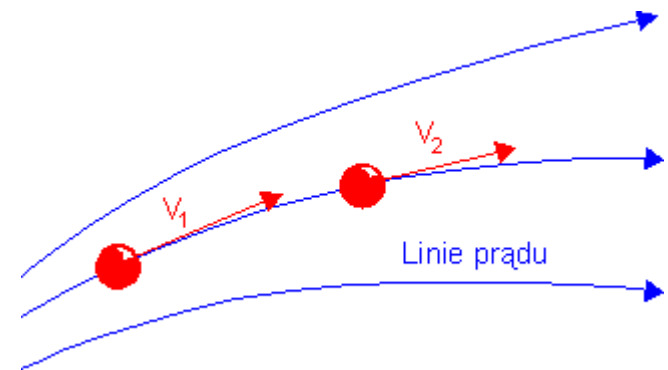
- ▶ Wypełnione gazem balony, które wznoszą się w powietrzu mają gęstość mniejszą niż powietrze.

Dynamika płynów

- ▶ Dwa podejścia do opisu ruchu płynu:
 - Lagrange'a – opisujemy ruch każdej cząstki $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$,
 - Eulera – wyznaczamy gęstość i prędkość w każdym punkcie, w każdym momencie czasu: $\rho(\vec{r}, t)$, $\vec{v}(t)$ - zamiast opisu, co się dzieje z każdą cząstką- opis co się dzieje w określonym punkcie przestrzeni.

Prędkość każdego punktu cieczy w funkcji czasu – pole wektorowe

- tor każdej cząstki to linia prądu
- prędkość jest styczna do linii prądu,
- struga – wiązka lini prądu



Podział przepływów

► Podział przepływów:

- **stacjonarny** (ustalony, **laminarny**) – prędkość płynu w dowolnie wybranym punkcie jest stała w czasie tzn. każda cząsteczka przechodząca przez dany punkt zachowuje się tak samo - niskie prędkości przepływu.
 - **bezwiowy** - w żadnym punkcie cząsteczka nie ma wypadkowej prędkości kątowej.
 - **nieściśliwy** - gęstość płynu jest stała, zazwyczaj w cieczech, w gazach tylko przybliżenia
 - **nielepki** – odpowiednik tarcia w ciałach stałych
- Dalsze rozważania dotyczą przepływów: **laminarnych, bezwiowych, nieściśliwych, nielepkich.**

Równanie ciągłości strugi

- W takich przepływach wektory **prędkości są równoległe** do kierunku przepływu (**linii prądu**).
- Linie prądu się nie przecinają.
- Wszystkie cząstki cieczy przepływające przez dany punkt mają wtedy **ten sam wektor prędkości**.

Masy płynu przechodzące przez dwa przekroje S_1 i S_2 w tej samej jednostce czasu t są takie same:

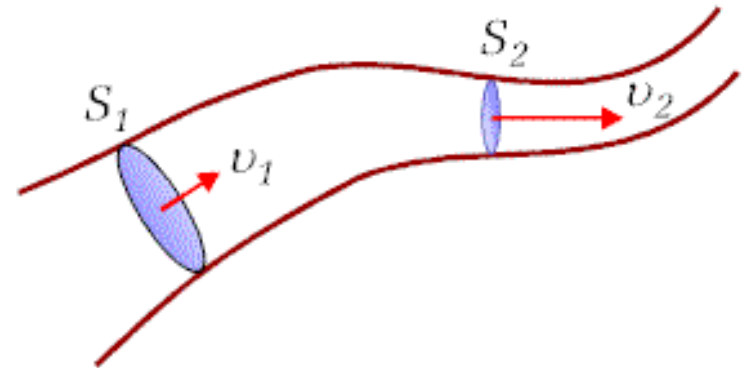
$$m_1 = \rho S_1 v_1 t \quad m_2 = \rho S_2 v_2 t$$

a zatem:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

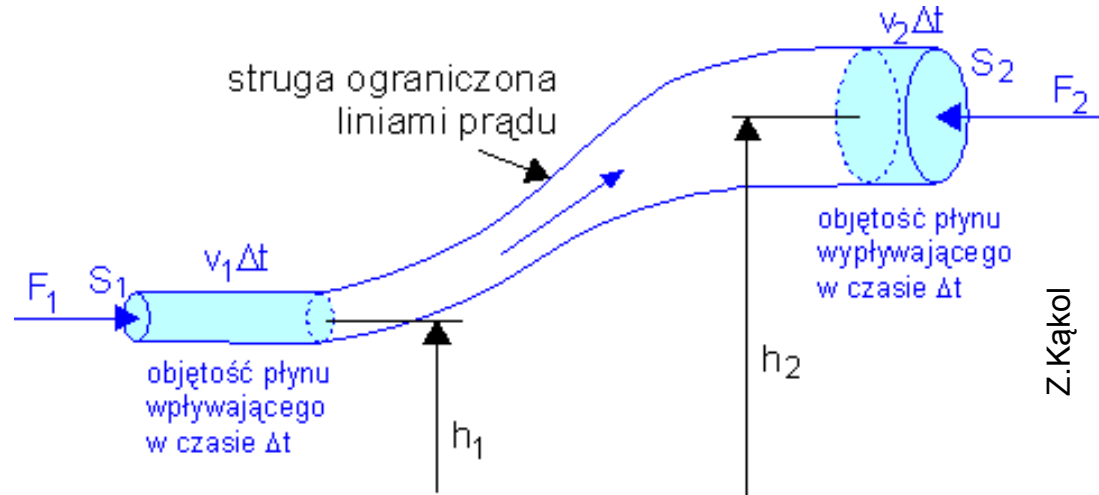
jest to **prawo ciągłości strugi**

Prędkość płynu nieściśliwego przy ustalonym przepływie jest odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju strugi



Prawo Bernoulliego

- ▶ Twierdzenie o pracy i energii – praca wykonana przez wypadkową siłę jest równa zmianie energii kinetycznej.



Praca:

- wykonywana przez siłę ciężkości:

$$W_Q = -mg(h_2 - h_1) = -\rho V g(h_2 - h_1)$$

(siła i przemieszczenie mają przeciwne kierunki)

- wykonywana nad płynem:

$$W_p = -(F_2 - F_1)\Delta x = -(p_2 S_2 - p_1 S_1)\Delta x = -(p_2 - p_1)V$$

$$W = W_Q + W_p = -\rho V g(h_2 - h_1) - V(p_2 - p_1)$$

Prawo Bernouliego

Zmiana energii kinetycznej: $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

jest równa pracy:

$$-\rho V g(h_2 - h_1) - V(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

czyli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

Prawo Bernouliego

ciśnienie hydrodynamiczne

Prawo Bernoulliego

- ▶ Jeśli ciecź płynie w rurze poziomej:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$



ciśnienie dynamiczne

ciśnienie statyczne

suma ciśnienia statycznego i dynamicznego jest stała (przykł.: **paradoks hydrostatyczny**)

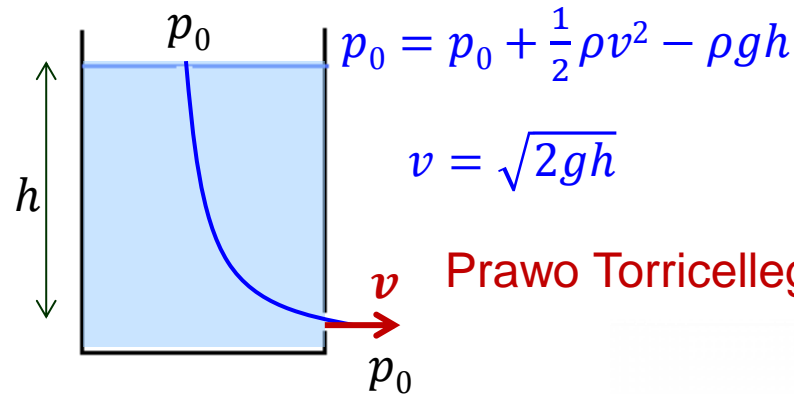
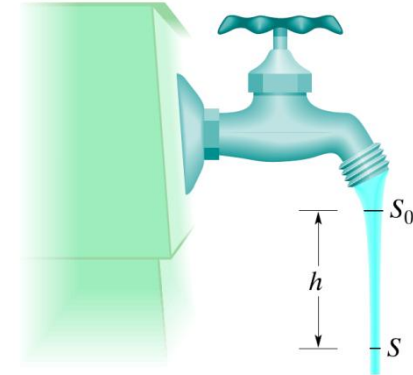
$Sv = \text{const}$, czyli gdy przekrój jest mniejszy, to rośnie prędkość, a więc ciśnienie p maleje

Ciecź płynąc w rurze o zmieniającym się przekroju ma mniejsze ciśnienie na odcinku gdzie przekrój jest mniejszy.

Prawo Bernoulliego ma zastosowanie do **plynu idealnego**, nieściśliwego – przepływu lamilarnego, bez lepkości.

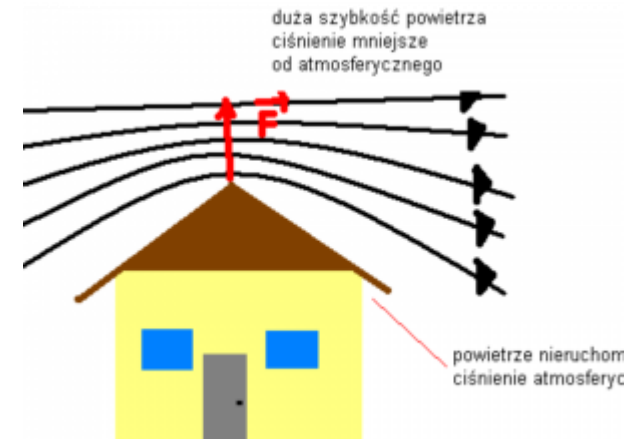
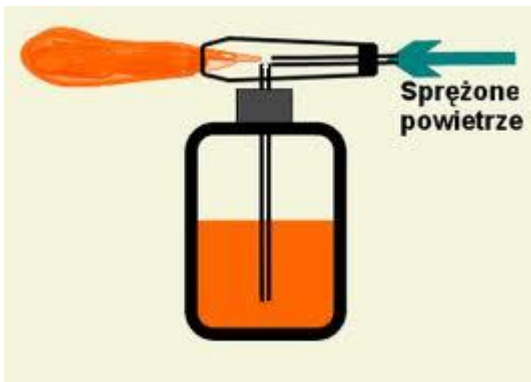
Mechanika płynów w życiu

- ▶ Struga wody zwęża się, gdy wzrasta jej prędkość.
- ▶ Wąż ogrodowy – większa prędkość, gdy zmniejszymy otwór
- ▶ Wyptyw wody ze zbiornika:



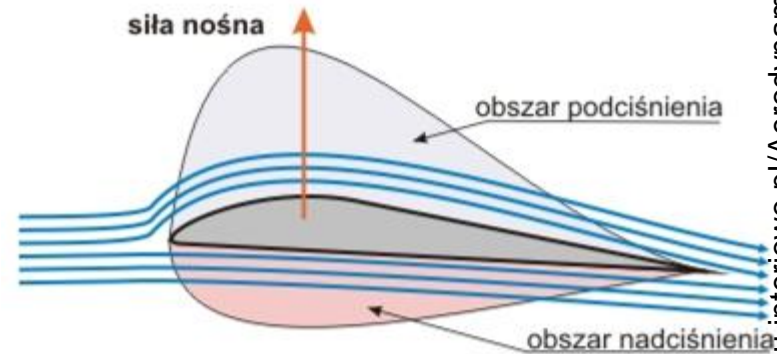
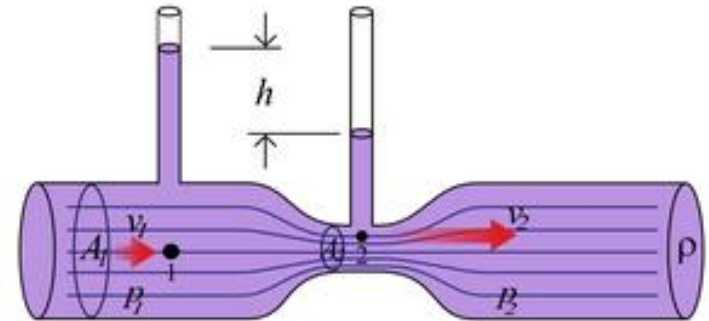
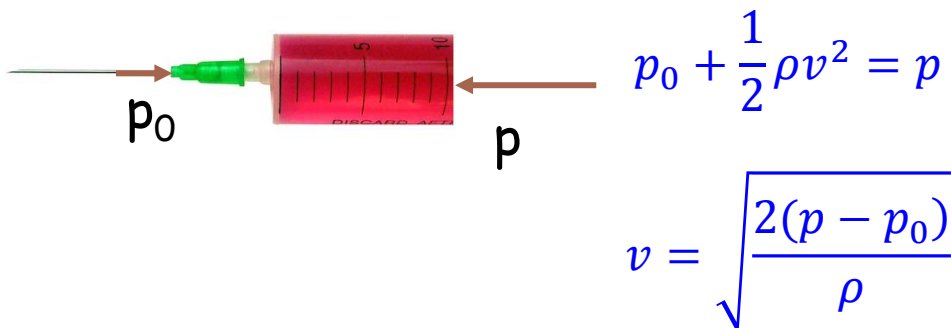
Prawo Torricellego

- ▶ Rozpylacz:



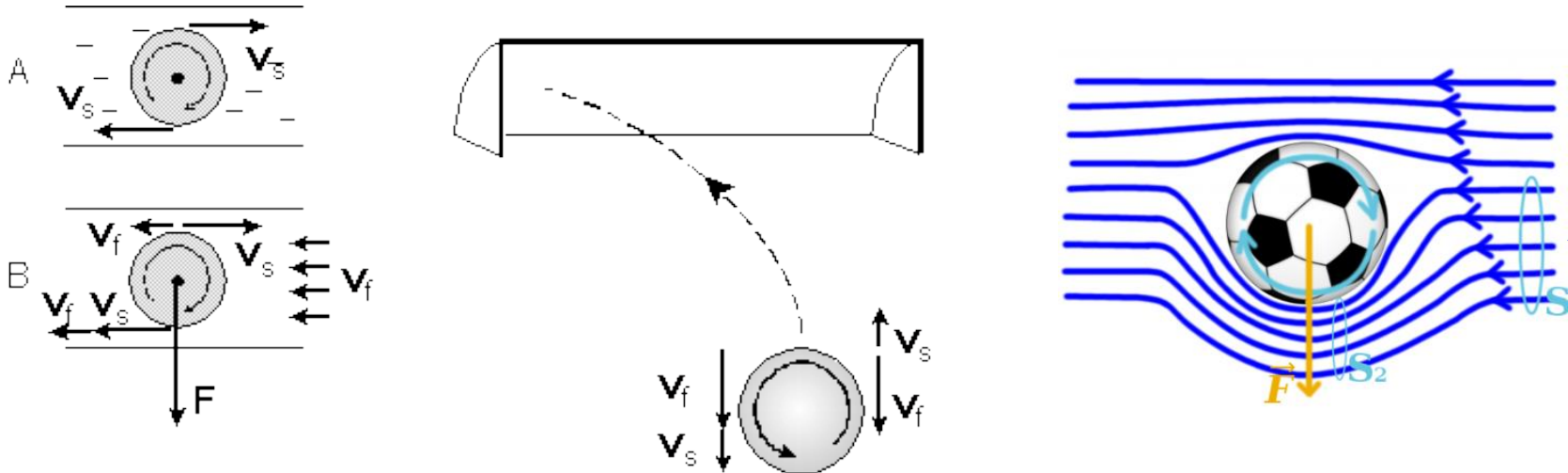
Prawo Bernoulliego w technice

- ▶ Ciśnienie jest najmniejsze tam, gdzie prędkość jest największa (nurkowanie)
- ▶ Siła nośna skrzydła samolotu: strugi powietrza są zagęszczone nad skrzydłem, a rozrzedzone – pod nim. Jak widać na rysunku, cząsteczki powietrza (lub cieczy) mają do przebycia większą drogę nad skrzydłem, mają tam większą szybkość niż pod skrzydłem
- ▶ Strzykawka



Dla piłkarzy

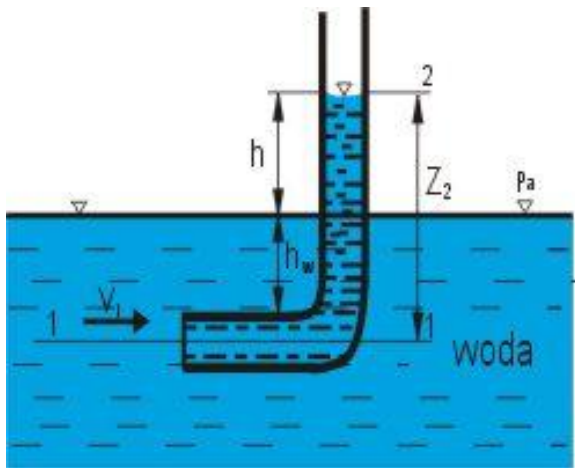
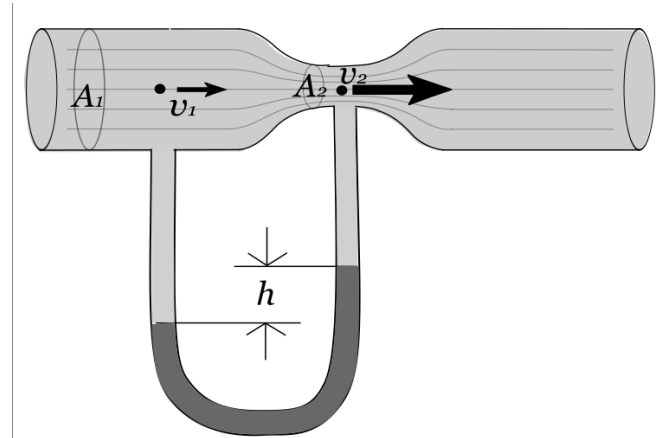
- ▶ Walec obracający się w przepływającej, lepkiej cieczy / podkręcona piłka



- W nieruchomym płynie (piłce niepodkręconej) – obracające się ciało powoduje obrót płynu z v_s ,
- Gdy płyn ma prędkość v_f – ciecz u góry jest spowalniana $v_g = v_f - v_s$, na dole przyspieszana: $v_d = v_s + v_f$
- Ciśnienia $p_g > p_d$:
$$\frac{1}{2}\rho (v_f - v_s)^2 + p_g = \frac{1}{2}\rho (v_s + v_f)^2 + p_d$$
- Powstaje **siła Magnusa** skierowana w dół (efekt Magnusa)

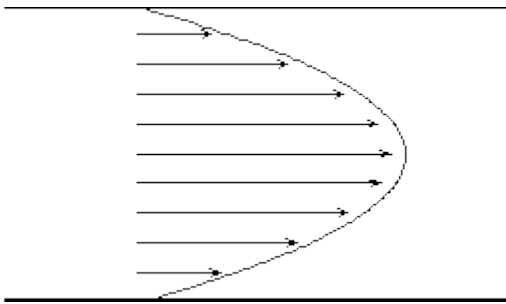
Pomiar prędkości przepływu

- ▶ Strumień objętościowy: $Q = v S$
- ▶ Pomiar prędkości przepływu:
 - zwężka Venturiego,
 - rurka Prandla (rzeki)

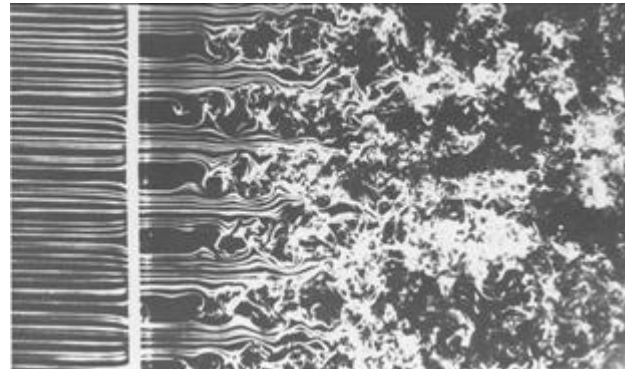


Przepływy turbulentne

- ▶ Prędkość w przepływie lamilarnym:



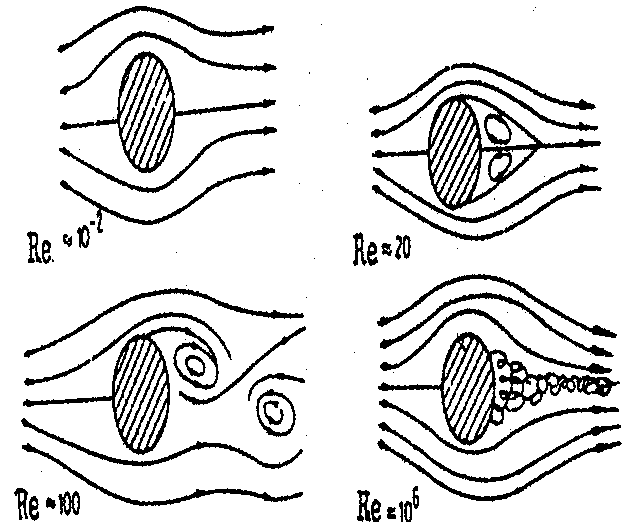
- ▶ Przepływ turbulentny



- ▶ Po przekroczeniu pewnej prędkości granicznej strumień zamienia się na wiry – przepływ turbulentny.

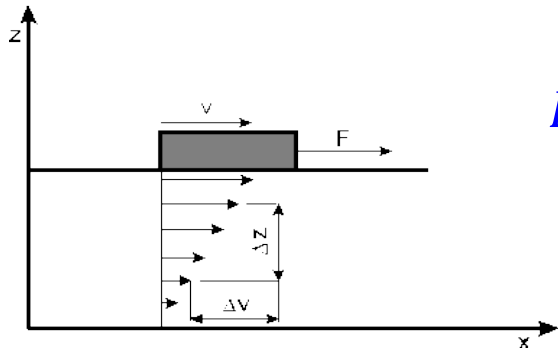
- ▶ Liczba Reynoldsa - $Re = \frac{2 \bar{v} \rho}{\eta} \approx 2300$
oznacza turbulencje

- ▶ Lepkość - η

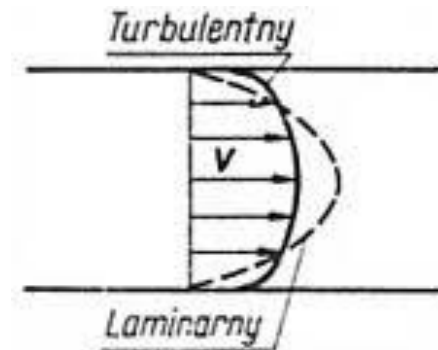


Lepkość

- ▶ Lepkość – tarcie pomiędzy warstwami cieczy. Opisuje siły ścinania istniejące w poruszającej się cieczy
- ▶ W rurze prędkość jest największa w środku i maleje przy ściankach – ciecz składa się z małych walcowatych warstw, które poruszają się z różnymi prędkościami - tarcie
- ▶ Lepkość η – wartość siły F , jaką należy przyłożyć do ciała, aby poruszało się ze stałą prędkością v .



$$F = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S$$



- ▶ Związek lepkości z turbulencjami.

Pokazy doświadczeń

- ▶ Demonstracja prawa Pascala.
- ▶ Paradoks hydrostatyczny
- ▶ Nurek Kartezjusza
- ▶ Ciśnienie dynamiczne w strudze cieczy-lewitująca piłeczka
- ▶ Paradoks aerodynamiczny
- ▶ Prawo Bernoulliego

Podsumowanie

- ▶ Ciśnienie. Pomiar.
- ▶ Prawo ciągłości strugi Pascala, Archimedesesa. Przykłady.
- ▶ Równanie Bernoulliego. Opis zjawisk.
- ▶ Rodzaje przepływów.
- ▶ Turbulencje.
- ▶ Lepkość.
- ▶ Liczba Reynoldsa