1. Jednorodny krążek zaczyna obracać się wokół nieruchomej osi i przyspiesza ze stałym przyspieszeniem kątowym. Początkowo obraca się z prędkością 10 obr/s. Po 60 pełnych obrotach jego prędkość kątowa wynosi 15 obr/s. Obliczyć:
a) przyspieszenie kątowe,
b) czas, w jakim dokonane zostało wspomniane 60 obrotów,
c) czas potrzebny do osiągnięcia prędkości kątowej 10 obr/s,
d) liczbę obrotów krążka od chwili rozpoczęcia ruchu do chwili, w której osiągnął on prędkość kątową 10 obr/s.

1

1.

$\varepsilon = const \Rightarrow$ ruch jednostajnie zmienny po okręgu (przyspieszony)

$\omega_0 = 10\ obr/s = 10\ \frac{2\pi}{s} = 20\pi\ s^{-1}$

$n_k = 60$

$\omega_k = 15\ obr/s = 15 \cdot \frac{2\pi}{s} = 30\pi\ s^{-1}$

$\varepsilon = ?,\ t_1,\ t_k,\ n_1$

a) $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ df, $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; θ - droga kątowa

tutaj: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_k - \omega_0}{t_k}$, bo $\varepsilon = const$

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

mamy $n = 60$ obrotów, $\Rightarrow \theta_k = 60 \cdot 2\pi$

$\theta_k = n_k \cdot 2\pi$

$$\begin{cases} \theta_k = \omega_0 t_k + \frac{1}{2}\varepsilon t_k^2 \\ \omega_k = \omega_0 + \varepsilon t_k \end{cases} \quad t_k = \frac{\omega_k - \omega_0}{\varepsilon} \quad (1)$$

$$\theta_k = \omega_0 \frac{\omega_k - \omega_0}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon \frac{(\omega_k - \omega_0)^2}{\varepsilon^2}$$

$$\theta_k = (\omega_k - \omega_0)\left(\omega_0 + \frac{\omega_k - \omega_0}{2\varepsilon}\right)$$

$$\theta_k = (\omega_k - \omega_0)\frac{\omega_k + \omega_0}{2\varepsilon}$$

$$\theta_k = \frac{\omega_k^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = ?$$

porównać do: $x = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2a}$

b) czas 60 obrotów ~~tk~~ policzę z ① podstawiając ε

$$\underline{t_k} = \frac{\omega_k - \omega_0}{\omega_k^2 - \omega_0^2} 2\theta = \frac{2\theta}{\omega_k + \omega_0} = \underline{\frac{2 \cdot n_k \cdot 2\pi}{\omega_k + \omega_0}}$$

c) czas t_1 do $\omega_1 = 10 \frac{obr}{s} = 10 \cdot \frac{2\pi}{s}$

ε jest takie samo jak w b)

$$\omega_1 = \omega_0 + t_1 \cdot \varepsilon \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\varepsilon}$$

$$\underline{t_1 = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_k^2 - \omega_0^2} \cdot 2\theta_1}$$

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \varepsilon t_1^2 \quad \theta_1$$

d) θ_1 - droga kątowa do osiągnięcia $\omega_1 = 10 \frac{obr}{s}$

$$\theta_1 = \omega_0 \frac{\omega_1 - \omega_0}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\omega_1 - \omega_0}{\varepsilon}$$

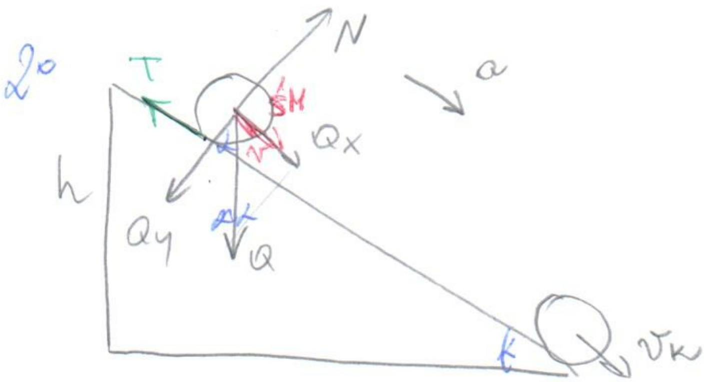
{tak samo jak w a)}

$$\Rightarrow \underline{\theta_1} = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{\omega_k^2 - \omega_0^2} 2\theta$$

$$2\pi n_1 = \theta_1 \Rightarrow \underline{n_1 = \frac{2\pi}{\theta_1}}$$

2. Jednorodny walec o promieniu R i masie M stacza się z równi pochyłej o kącie nachylenia α. Współczynnik tarcia wynosi f. Znaleźć równanie ruchu, gdy walec toczy się z poślizgiem i bez poślizgu. Obliczyć prędkość liniową u podstawy równi, jeżeli stacza się z wysokości h (obydwa przypadki). Jak zmienią się wyniki, gdy zamiast walca staczać się będzie: a) kula, b) obręcz?

2°



toczenie = złożenie ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego wzgl środka masy

- ruch postępowy ŚM: $ma = Q_x - T$
- ruch obrotowy wzgl ŚM: $I\varepsilon = M_T$

→ brak poślizgu ⇒ $a = \varepsilon \cdot R$

3 równania do obliczenia a i T

$$\begin{cases} ma = mg\sin\alpha - T \\ I\dfrac{a}{R} = T\cdot R \end{cases} \qquad \cancel{Ia = \frac{TR^2}{I}} \quad T = \frac{Ia}{R^2}$$

$$ma = mg\sin\alpha - \cancel{\frac{TR^2}{I}}\ \frac{Ia}{R^2}$$

$$a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mg\sin\alpha$$

$$\boxed{a = \frac{mg\sin\alpha}{m + I/R^2}}$$

$I_{walca} = \frac{1}{2}mR^2$

$I_{kuli} = \frac{2}{5}mR^2$

$$a_W = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{1}{2}m} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

$$a_K = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{2}{5}m} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$$

⇒ z poślizgiem ⇒ brak tarcia, brak ruchu obrotowego

$$ma = Q_x \Rightarrow a = g\sin\alpha$$

4

zasada zach. en. w ruchu obrotowym

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

en. kin ruchu ~~obr~~ postępowego — en. kin ruchu obr

bez poślizgu $\omega = v/R$, czyli:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I v^2/R^2$$

np. dla walca $I = \frac{1}{2} mR^2$

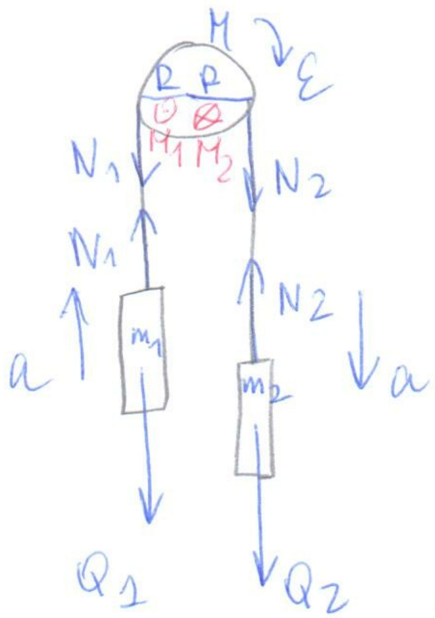
$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \frac{v^2}{\cancel{R^2}}$$

$$mgh = \frac{3}{4} m v^2$$

pr. końcowa jest mniejsza niż bez obrotu

3. Przez nieruchomy krążek o promieniu R przerzucono nieważką nić, na której końcach zamocowano masy m_1 i m_2. Moment bezwładności krążka względem osi obrotu wynosi I. Zakładamy, że nić nie ślizga się. Znaleźć przyspieszenie kątowe krążka i siły naciągu prostoliniowych odcinków nici w czasie ruchu. 5

3°



r. ruchu ciężarków

$$N_1 - Q_1 = m_1 a \quad (1)$$
$$Q_2 - N_2 = m_2 a$$

r. ruchu krążka (obraca się)

$$I\varepsilon = M \cdot R$$

moment siły $M = M_2 - M_1$

$$M_2 = N_2 R, \quad M_1 = N_1 R$$

bez poślizgu: $\varepsilon = a/R$, $I = \frac{1}{2} M R$

$$I \cdot \frac{a}{R} = (N_2 - N_1) R$$

$$N_2 - N_1 = \frac{Ia}{R^2}$$

wstawiam do (1)

$$N_1 - m_1 g = m_1 a$$
$$+ \; m_2 g - N_2 = m_2 a$$
$$N_1 - N_2 - m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) a$$

$$-\frac{Ia}{R^2} + g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2)$$

$$a\left(-\frac{I}{R^2} - (m_1 + m_2)\right) = -g(m_2 - m_1)$$

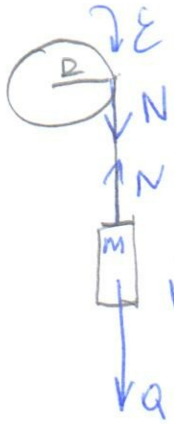
$$\boxed{a = \frac{g(m_2 - m_1)}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}}$$

siły naciągu: $N_1 = m_1 a + m_1 g$

podstawiam ...

4. Na wale o średnicy $d = 4\ cm$ nawinięta jest nić, do której końca przywiązano ciężar o masie $100g$. Obliczyć moment bezwładności I, jeżeli ciężar opada z przyspieszeniem $a = 9.8\ cm/s^2$.

4°



ciężar: $Q - N = ma$

krążek: $I\varepsilon = NR \Rightarrow N = \frac{I\varepsilon}{R}$

oraz $\varepsilon = \frac{a}{R}$

wstawiam: $mg - \frac{I}{R}\frac{a}{R} = ma$

$I = \ldots$

7. Łyżwiarz, wiruje z wyciągniętymi ramionami wykonując 2 obroty na sekundę. Jaka będzie jego prędkość obrotowa, gdy opuści ramiona? Przyjmij brakujące dane na podstawie własnych pomiarów.

7°

I_0 | I_1
L_0 | L_1
ω_0 | ω_1

zasada zachowania momentu pędu:

$L = const$

$L = I\omega$

$I_0\omega_0 = I_1\omega_1$

$\omega_0 = \frac{I_1}{I_0}\omega_1$