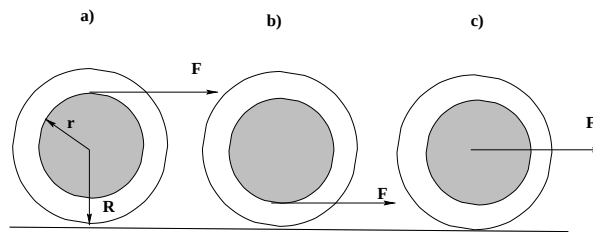


Dynamika ruchu obrotowego

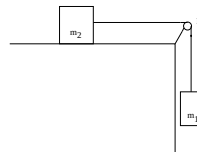
1. Mając dane $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ i $\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z$ znaleźć moment siły $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Pokazać, że jeżeli $\vec{r}$ i $\vec{F}$ leżą w danej płaszczyźnie, to $\vec{\tau}$ nie ma składowych w tej płaszczyźnie.
2. Jednorodny krążek zaczyna obracać się wokół nieruchomej osi i przyspiesza ze stałym przyspieszeniem kątowym. Początkowo obraca się z prędkością 10 obr/s. Po 60 pełnych obrotach jego prędkość kątowa wynosi 15 obr/s. Obliczyć:
 - a) przyspieszenie kątowe,
 - b) czas, w jakim dokonane zostało wspomniane 60 obrotów,
 - c) czas potrzebny do osiągnięcia prędkości kątowej 10 obr/s,
 - d) liczbę obrotów krążka od chwili rozpoczęcia ruchu do chwili, w której osiągnął on prędkość kątową 10 obr/s.
3. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego pręta o masie M i długości l względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez:
 - a) koniec pręta,
 - b) środek pręta.
4. Obliczyć moment bezwładności rury o przekroju kołowym względem osi równoległej do rury. Długość rury wynosi l, promień wewnętrzny R_1 , promień zewnętrzny R_2 , gęstość materiału ρ .
5. Obliczyć moment bezwładności prostokąta o bokach a i b i gęstości powierzchniowej ρ :
 - a) względem jego podstawy a jako osi,
 - b) względem osi prostopadłej do boku b, przechodzącej przez środek prostokąta.
6. Jednorodny walec o promieniu R i masie M stacza się z równi pochyłej o kącie nachylenia α . Współczynnik tarcia wynosi k. Znaleźć równanie ruchu, gdy walec toczy się z poślizgiem i bez poślizgu. Obliczyć prędkość liniową u podstawy równi, jeżeli stacza się z wysokości h (obydwa przypadki).
7. Przez nieruchomy krążek o promieniu R przerzucono nieważką nić, na której końcach zamocowano masy m_1 i m_2 . Moment bezwładności krążka względem osi obrotu wynosi I. Zakładamy, że nić nie ślizga się. Znaleźć przyspieszenie kątowe krążka i siły naciągu prostoliniowych odcinków nici w czasie ruchu.
8. Na wale o średnicy $d=4$ cm nawinięta jest nić, do której końca przywiązano ciężar o masie 100g. Obliczyć moment bezwładności I, jeżeli ciężar opada z przyspieszeniem $a=9.8 \text{ cm/s}^2$
9. Kula o promieniu r stacza się po pochyłości i przebiega pętlę pionową o promieniu R. Zaniedbując tarcie znaleźć najmniejszą wysokość h środka kuli nad środkiem pętli, przy której jest to możliwe.
10. Krążek, którego moment bezwładności wynosi $I=0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ osadzony jest na wale o promieniu $r=30$ mm. Na wał nawinięty jest sznur, za który ciągniemy siłą $F=150$ N. Jaka prędkość kątową osiągnie koło po upływie czasu $t=5$ s? Zaniedbać moment bezwładności wału oraz siłę tarcia.
11. Drewniany klocek o masie $m=500$ g i długości $l=50$ cm może obracać się wokół osi prostopadłej do osi klocka i przechodzącej przez jego środek. W koniec pręta uderza kula o masie $m_1=15$ g i prędkości $v=300$ m/s prostopadłej do klocka. Określić prędkość kątową, jaką uzyska klocek.
12. Walec jednorodny toczy się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ do poziomu. W jakim czasie przebędzie drogę $s=150$ cm? Rozwiązać to samo zadanie dla kuli jednorodnej.
13. Koło zamachowe o masie $m=500$ kg i ramieniu bezwładności $k=1$ m obraca się z prędkością kątową $\omega=50$ obr/min. Jaka siła powinna działać na obwód koła pasowego o średnicy $d=70$ cm, połączonego z wałem, aby koło zamachowe zatrzymać w przeciągu czasu $t=4$ min.

14. Obliczyć moment obracający koło napędowe silnika, jeżeli przy rozwijanej mocy $P=5$ kW daje on $n=2880$ obr/min
15. Moment bezwładności koła napędowego silnika wynosi $I=0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. W jakim czasie uzyska on prędkość kątową $\omega=1800$ obr/min, jeżeli moc silnika wynosi $P=200$ W.
16. O ile cm spadnie w czasie $t=2$ s masa $m=5$ g zawieszona na sznurku nawiniętym na walec o promieniu $r=2$ cm napędzającym koło o momencie bezwładności $I=200 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$?
Obliczyć pracę W ciężaru w tym czasie, porównać ją z energią kinetyczną koła oraz z energią kinetyczną spadającej masy.
17. Do koła o promieniu $R=0.5$ m i o momencie bezwładności $I=20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ przyłożono stały moment siły $M=50$ Nm. Znaleźć:
a) przyspieszenie kątowe,
b) prędkość liniową punktów na obwodzie koła w końcu dziesiątej sekundy.
Prędkość początkową przyjąć równą zeru.
18. W jakiej odległości od osi może utrzymać się ciało na powierzchni obracającego się koła, jeżeli koło wykonuje $n=0.5$ obr/s, a współczynnik tarcia wynosi $f=0.3$?
19. Na wale o promieniu $r=5$ cm osadzone jest koło zamachowe, które wprawiamy w obrót ciągnąc za sznur nawinięty na wale z siłą $F=50$ N. Ile wynosi prędkość kątowa wału wraz z kołem po upływie czasu $t=15$ s, jeżeli koło razem z wałem ma masę $m=50$ kg oraz ramię bezwładności $k=25$ cm. Moment tarcia osi w łożyskach wynosi 1 % momentu siły poruszającej wał.
20. Koło zamachowe, mające wraz z wałem moment bezwładności $I=200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ obraca się wykonując $n=180$ obr/min. Po dwóch minutach, od chwili, gdy na koło przestał działać moment siły zewnętrznej, zatrzymało się ono pod działaniem tarcia w łożyskach. Przyjmując to tarcie jako stałe obliczyć moment siły tarcia.
21. Kula o promieniu $r=3$ cm toczy się po podłodze i zatrzymuje pod wpływem tarcia po upływie czasu $t=2$ s, przebywszy drogę $s=2.8$ m. Określić współczynnik tarcia f w ruchu obrotowym.
22. Po równi pochyłej o kącie nachylenia α toczą się w dół z tej samej wysokości kula i walec jednorodny.
(a) Wyznaczyć przyspieszenia środków mas tych ciał, jeśli ruch odbywa się bez poślizgu.
(b) Znaleźć prędkość środków mas po przebyciu przez ciała drogi s , jeżeli w chwili $t=0$ były w spoczynku.
(c) Powtórzyć obliczenia z (b) przy założeniu, że kulka i walec zsuwają się bez tarcia.
(d) Znaleźć maksymalną wartość kąta α , dla którego ruch odbywa się bez poślizgu, jeżeli współczynnik tarcia wynosi f .
23. Pod górę równi o kącie nachylenia 30° wtacza się kula. Przy podstawie równi środek masy kuli miał prędkość 16 m/s.
a) Jak daleko wtoczy się kula na równię?
b) Ile czasu upłynie do chwili powrotu kuli do podstawy równi?
24. Koło obraca się z przyspieszeniem kątowym ϵ danym przez wyrażenie: $\epsilon = 4at^3 - 3bt^2$, gdzie a, b to stałe. Koło ma początkową prędkość kątową ω_0 . Napisać równania na prędkość kątową i drogę kątową w funkcji czasu.
25. Krążek o promieniu $R=10$ cm i ciężarze $Q=50$ N wiruje wokół osi przechodzącej przez jego środek z prędkością kątową podaną zależnością: $\omega = A + 8t$, gdzie $A=\text{const}$. Oblicz wartość siły stycznej przyłożonej do obwodu krążka. Tarcie pominąć.

26. Krążek o masie m i promieniu R obraca się wokół osi przechodzącej przez środek z częstotliwością f_0 . Po czasie t krążek ten zatrzymuje się pod wpływem momentu siły hamującej. Obliczyć:
- moment siły hamującej,
 - liczbę obrotów, które wykonał krążek do momentu zatrzymania.
27. Na bloczku o promieniu R i momencie bezwładności I_0 nawinięta jest nić, na końcu której wisi ciało o masie m . Jaką prędkość kątową będzie miał bloczek w chwili, gdy ciało opuści się na wysokość h .
28. Na obwodzie krążka o masie $M=1$ kg i promieniu $R=10$ cm przyczepiono ciało o masie $m=0.5$ kg. Znajdź przyspieszenie kątowe krążka i liniowe ciężarka. Jakie jest nareżenie nici? Krążek obraca się bez tarcia.
29. Jaką siłą trzeba ciągnąć sznur nawinięty na walcu o promieniu R i momencie bezwładności I , aby w ciągu czasu t doprowadzić walec do wykonywania n obrotów w ciągu sekundy dookoła osi walca?
30. Ciężka szpula z nawiniętą nicią stoi na płaszczyźnie poziomej, po której może się toczyć bez poślizgu. Obliczyć przyspieszenie a środka masy szpuli oraz siłę tarcia T , jeżeli do nici przyłożono siłę F w kierunku równoległym do płaszczyzny? Rozważyć przypadki, gdy siła jest przyłożona jak na rys. a), b) i c). Szpula ma masę m , moment bezwładności I_0 względem osi przechodzącej przez środek masy, promień wewnętrzny r i zewnętrzny R .



31. Jednorodnemu walcowi o promieniu r i masie m nadano początkową prędkość kątową ω_0 i puszczo na płaską poziomą powierzchnię. Kinetyczny współczynnik tarcia między walcem a powierzchnią wynosi f_k . Początkowo walec ślizga się, ale po czasie t zaczyna się wyłącznie toczyć. Jaka jest prędkość środka masy po czasie t ? Jaki jest czas t ?
32. Napisać równanie ruchu dla układu ciał przedstawionych na rysunku uwzględniając siłę tarcia działającą na masę m_2 (współczynnik tarcia wynosi μ) oraz moment bezwładności krążka I_0 , który ma promień R .



33. Na jednorodnym krążku o masie M i promieniu R nawinięta jest nierozciągliwa nić, której jeden koniec umocowany jest u sufitu. Oblicz przyspieszenie kątowe i liniowe środka ciężkości krążka oraz naciąg nici, jeżeli w pewnej chwili krążek zaczął spadać swobodnie.
34. Jednorodny krążek o masie M i promieniu R zawieszono na łożysku, które obraca się bez tarcia. Na obwodzie krążka nawinięty jest lekki sznur, do którego końca przyłożono stałą siłę T skierowaną w dół. Znaleźć przyspieszenie kątowe krążka i przyspieszenie styczne punktów znajdujących się na obwodzie.

35. Jednorodny krążek o masie M i promieniu R zawieszono na łożysku, które obraca się bez tarcia. Na obwodzie krążka nawinięty jest lekki sznur, do którego końca przyłożono stałą siłę T skierowaną w dół. Przyjmując, że krążek był początkowo w spoczynku, obliczyć pracę wykonaną przez moment przyłożonej siły działającej w ciągu dwóch sekund. Obliczyć przyrost energii kinetycznej ruchu obrotowego krążka.
36. Z wierzchołka dużej nieruchomej kuli o promieniu R zaczyna staczać się bez poślizgu mała kulka o promieniu r . Na jakiej wysokości, licząc od punktu początkowego oderwie się mała kulka od dużej? Jaka będzie wtedy jej prędkość obrotowa?
37. Z jaką prędkością kątową powinno obracać się naczynie w kształcie stożka ściętego, aby kulka, leżąca na jego dnie wyleciała z naczynia? Średnica dolnej podstawki wynosi d , ścianki nachylone są pod kątem α do podstawy. Ślizgania kulki nie uwzględniać.
38. Po równi pochyłej o długości L , nachylonej pod kątem α do podstawy, toczy się bez poślizgu walec. Ile wynosi prędkość środka masy walca w najniższym punkcie równi.
39. Dwie tarcze wirują wokół pionowej osi przechodzącej przez ich środek. Momenty bezwładności tarcz wynoszą I_1 i I_2 , a ich prędkościątowe ω_1 i ω_2 . Po upadku tarczy górnej na dolną obie obracają się dalej jak jedno ciało. Oblicz:
 - a) prędkość kątową tarcz po złączeniu,
 - b) pracę wykonaną przez siły tarcia.
40. Pocisk o masie m i prędkości v_0 uderza w lity walec o masie M i promieniu R . Walec może obracać się względem nieruchomej osi przechodzącej przez jego środek wzdłuż osi walca. Walec jest początkowo w spoczynku, a miejsce uderzenia pocisku jest w odległości d od osi obrotu. Jaka jest prędkość kątowna walca, jeżeli pocisk utkwiał tuż przy jego powierzchni?
41. Pętel o długości l i masie M leży na doskonale gładkim stole i może poruszać się w dowolny sposób po powierzchni stołu. Krążek hokejowy o masie m poruszający się z prędkością v zderza się sprężysto z pętem w odległości d od jego środka. Jakie wielkości są zachowane w tym zderzeniu? Jaka musi być masa krążka m , aby pozostał on w spoczynku bezpośrednio po zderzeniu?
42. Drewniana listwa o masie $m=500$ g i długości $l=50$ cm może obracać się wokół osi prostopadłej do osi klocka i przechodzącej przez jego środek. W koniec listwy uderza kulka o masie $m_1=15$ g i prędkości $v=300$ m/s prostopadłej do listwy. Określić prędkość kątową, jaką uzyska listwa, jeżeli pocisk w niej utkwiał.
43. Ołówek o długości $l=15$ cm i masie 20 g Ustawiono pionowo na stole. Ołówek się przewraca. Obliczyć dla momentu uderzenia o stół:
 - a) Prędkość kątową,
 - b) prędkość liniową środka ołówka,
 - c) prędkość końca ołówka,
 - d) jego energię kinetyczną.
 Przyjąć, że dolny koniec ołówka nie przemieszcza się.
44. Dziewczyna (masa M) stoi na brzegu karuzeli (brak tarcia, masa $10M$, promień R , moment bezwładności I), która się nie porusza. Rzuca kamień (masa m) w kierunku poziomym, który jest styczny do zewnętrznego brzegu karuzeli. Prędkość kamienia względem podłoża wynosi v . Jak jest;
 - a) prędkość kątowna karuzeli,
 - b) prędkość linowa dziewczyny,
 gdy kamień został rzucony.
45. Człowiek stoi na osi obrotowego stolika trzymając pionowo nad głową obracające się wokół pionowej osi (za którą trzyma człowiek) z prędkością kątową ω_0 koło rowerowe o momencie

- bezwładności I_0 . Wyznaczyć prędkość kątową ruchu obrotowego stolika po:
- obróceniu przez człowieka koła o kąt 180° ,
 - zahamowaniu koła przez człowieka, jeżeli moment bezwładności człowieka i stolika wynosi I .
46. Stolik poziomy obraca się z prędkością kątową ω . Na środku stolika stoi człowiek i trzyma w wyciągniętych rękach w odległości l od osi obrotu dwa ciężarki o masie m każdy. Jak zmieni się prędkość obrotów stolika, gdy człowiek opuści ręce? Ile razy wzrośnie energia kinetyczna układu. Moment bezwładności stolika wraz z człowiekiem (bez ciężarków) wynosi I .
47. Człowiek o masie M stoi na skraju obrotowego stolika o masie m i promieniu R . Stolik obraca się z prędkością kątową ω . Obliczyć pracę, jaką wykona człowiek przechodząc na środek stołu.
48. Na poziomo wirującym pręcie o masie M siedzi małpka o masie m . Pręt ma długość l i wiruje z prędkością ω . Jaka będzie prędkość pręta, po przejściu małpki do środka?
49. Kula o promieniu r stacza się bez poślizgu z wierzchołka nieruchomej sfery o promieniu $R > r$. Znaleźć prędkość kątową kuli w miejscu oderwania się od sfery.
50. Drabina stojąca na podłodze jest oparta o gładką pionową ścianę. Między drabiną a podłogą współczynnik tarcia wynosi μ . Przy jakim kącie α między podłogą a drabiną, drabina nie będzie się ślizgać po podłodze?