

Wprowadzenie matematyczne

1. Oblicz pochodną funkcji $y = (2x^2 - 5x + 1) e^x$.
2. Oblicz pochodną funkcji $y = \frac{x+1}{x-1}$.
3. Oblicz pochodną funkcji:
 $y = (x^2 - x + 1)^2$. $y = \sin^2 \sqrt{x}$, $x > 0$
4. Na płaszczyźnie określamy dwa układy współrzędnych: kartezjański (x, y) oraz (x', y') , które są związane relacją: $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$, gdzie $\theta = \text{const}$. Oblicz element długości w układzie (x', y') oraz wykaż, że jest równy elementowi długości w układzie (x, y) .

Rachunek wektorowy i kinematyka

- Dane są dwa wektory: $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ i $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$. Obliczyć:
 - długość każdego wektora,
 - iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$
 - cosinusy kierunkowe, d) kąt zawarty między nimi,
 - sumę i różnicę $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$,
 - iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$.
- Dane są trzy wektory: $\vec{a} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$
 $\vec{b} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$
 $\vec{c} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$
Znaleźć:
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
 $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$
 $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$
- Upartego osła pcha dwóch chłopców, działając siłami 60 N i 80 N wzajemnie prostopadłymi do siebie. Wypadkowa tych sił skierowana jest na północ. Wyznaczyć wartość siły wypadkowej i kierunki sił.
- Dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{w}$ mają współrzędne: $\vec{u} = (-2, 2, 0)$, $\vec{w} = (1, -1, 0)$.
 - Oblicz kąt zawarty pomiędzy wektorami $\vec{u}$ i $\vec{w}$.
 - Znajdź wektor $\vec{c}$ prostopadły do $\vec{u}$ i $\vec{w}$.
- Wektor o długości 10 cm tworzy z osiami X i y kąty o miarach odpowiednio $\pi/3$ i $\pi/4$, a z osią z kąt $\gamma\pi/2$. Znaleźć jego składowe i kąt, jaki tworzy z osią z .
- Dwie cząstki zostały wysłane z jednego źródła i po pewnym czasie przemieszczenia ich wynoszą:
 $\vec{r}_1 = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 8\hat{k}$ i $\vec{r}_2 = 2\hat{i} + 10\hat{j} + 5\hat{k}$.
 - Narysować położenia cząstek i napisać wyrażenie na przemieszczenie $\vec{r}$ cząstki 2 względem 1.
 - Obliczyć kąty pomiędzy wszystkimi możliwymi parami tych trzech wektorów.
 - Obliczyć rzut $\vec{r}_1$ na $\vec{r}_2$.
 - Obliczyć iloczyn wektorowy $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.
- Sprawdzić, czy wektory $\vec{u} = [1, 1, 0]$, $\vec{v} = [1, -1, 0]$ i $\vec{w} = [0, 0, 1]$ są do siebie prostopadłe.
- Znaleźć współczynniki (α, β, γ) przedstawienia wektora $\vec{a} = [3, 2, 1]$ przez wektory z poprzedniego zadania.
- Wykazać, że jeśli $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ to $\vec{a}$ jest prostopadły do $\vec{b}$.
- Krawędzie równoległościanu zadane są wektorami $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{b} = 4\hat{j}$ i $\vec{c} = \hat{j} + 3\hat{k}$ wychodzącymi z początku układu współrzędnych. Oblicz objętość tego równoległościanu.
- Jaki kąt tworzą z sobą dwie wewnętrzne przekątne sześcianu? (Przekątna wewnętrzna łączy dwa wierzchołki i przechodzi przez środek)
- W kartezjańskim układzie współrzędnych punkt P ma współrzędne (P_x, P_y) . Znaleźć współrzędne (P'_x, P'_y) punktu P w układzie, którego osie tworzą kąt α z osiami układu (x, y) . Sprawdzić, że przy obrocie układu odległość punktu P od początku układu nie zmienia się.
- Pilot chce osiągnąć punkt 200 km na wschód od aktualnego położenia. Wiatr wieje z prędkością 30 km/h z północnego zachodu. Wyznacz wektor prędkości samolotu względem powietrza, jeśli zgodnie z planem samolot powinien dotrzeć do celu po 40 min.

14. Proton ma w pewnej chwili prędkość (w m/s): $\vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, a w 4 sekundy potem: $\vec{v} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$. Wyznacz średnią prędkość i przyspieszenie w czasie tych 4 sekund wyrażając je: a) za pomocą wektorów, b) przez jego długość i kierunek.
15. Z dworca jednocześnie wyjechał autobus i pociąg. Autobus jedzie w kierunku północnym ze średnią prędkością 60 km/h, pociąg - w kierunku wschodnim z prędkością 80 km/h. Z jaką prędkością oddalają się od siebie te pojazdy?
16. Samolot leci w kierunku północno-zachodnim z prędkością v_1 względem powietrza. Wiatr wieje ze stałą prędkością v_2 w kierunku zachodnim. Znaleźć odległość, jaką pokonuje ten samolot nad powierzchnią ziemi w czasie t oraz ustalić kierunek, w którym porusza się samolot.
17. Położenie punktu materialnego w czasie opisane jest równaniami: $x(t) = R \cos \omega t$, $y(t) = R \sin \omega t$. Oblicz prędkość i przyspieszenie tego punktu oraz znajdź kąt pomiędzy tymi wektorami.
18. Dwie cząstki 1 i 2 poruszają się wzdłuż osi x i y z prędkościami $\vec{v}_1 = 2\hat{i}$ cm/s i $\vec{v}_2 = 3\hat{j}$ cm/s. W chwili $t=0$ są one w punktach o współrzędnych: $x_1=-3$ cm, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=-3$ cm.
 - a) Znaleźć wektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, który określi położenie cząstki 2 względem 1 w funkcji czasu.
 - b) Kiedy i gdzie obie cząstki będą najbliżej siebie?
19. a) Dwa okręty poruszają się z prędkościami $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, które tworzą ze sobą kąt α . Jaka jest prędkość jednego okrętu względem drugiego?
 b) Dwa okręty wyruszyły równocześnie w drogę w dwóch kierunkach do siebie prostopadłych, jeden z prędkością $v_1=20$ km/h, drugi z $v_2=30$ km/h. Obliczyć prędkość wzajemnego oddalania się okrętów oraz ich odległość po upływie czasu $t=4$ h.
20. Dwa punkty poruszają się prędkościami odpowiednio 3 cm/s i 4 cm/s. Co można powiedzieć o zwrotach i kierunkach ich prędkości, jeżeli względna prędkość jednego punktu względem drugiego wynosi 1 m/s?
21. Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym wzdłuż tej samej prostej. Gdy zwroty ich prędkości są przeciwne, to odległość między nimi maleje o 4 metry w ciągu jednej sekundy, gdy zgodne - o 4 metry w ciągu dziesięciu sekund. Ile wynoszą wartości prędkości obu ciał?
22. Wioślarka może nadać łodzi prędkość 6.4 km/h na spokojnej wodzie.
 - a) Chce przepłynąć przez rzekę, w której woda płynie z prędkością 3.2 km/h tak, aby dotrzeć na drugi brzeg dokładnie naprzeciw miejsca, z którego wypływa. Pod jakim kątem do brzegu powinna skierować łódź?
 - b) Ile czasu zajmie jej przeprawa przez rzekę o szerokości 6.4 km?
 - c) Ta sama wioślarka płynie 3.2 km w dół rzeki i z powrotem. Ile czasu jej to zajmie? A jak popłynie w górę rzeki?
 - d) Pod jakim kątem do brzegu powinna skierować łódź ta wioślarka, aby przepłynąć przez rzekę jak najszybciej? Ile wynosi ten minimalny czas przeprawy?
23. Żaglowiec ma dopłynąć do miejsca odległego od punktu wejściowego o 120 km w kierunku na północ. Niespodziewany sztorm spycha go o 100 km na wschód od miejsca wyjściowego.
 - a) Jaką drogę musi teraz przebyć żaglowiec?
 - b) W jakim kierunku musi płynąć, aby dotrzeć do ustalonego celu podróży?
24. Promień wodzący punktu materialnego zmienia się w czasie w następujący sposób:
 $\vec{r} = 5t\hat{i} + \exp(-t)\hat{j} + \sin(4t)\hat{k}$
 Znajdź zależność prędkości i przyspieszenia od czasu tego punktu materialnego.
25. Zależność wektora położenia ciała od czasu dana jest wzorem: $\vec{r}(t) = [t, 2t - t^2]$. Oblicz wartości bezwzględne prędkości początkowej i przyspieszenia.

26. Cząstka rozpoczyna ruch i porusza się ze stałym przyspieszeniem $\vec{a} = (2\hat{i} = 4\hat{j})m/s^2$. Obliczyć prędkość i przyspieszenie po czasie t_1 .
27. Stałe siły $\vec{F}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ N i $\vec{F}_2 = 4\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$ N działają równocześnie na cząstkę w czasie przesunięcia z punktu A=(20,15,0) do punktu B=(0,0,7) m.
 a) Jaka praca została wykonana przy przesunięciu cząstki?
 b) Zakładamy, że działają te same siły, ale ruch odbywa się od punktu B do A. Jaka praca została wykonana w tym przypadku przy przesunięciu cząstki?
28. Zależność drogi od czasu pewnego ciała można przedstawić równaniem: $s(t) = A + Bt + ct^2$, gdzie A=3m, B=2 m/s, C=1 m/s². Oblicz średnią prędkość i przyspieszenie ciała w pierwszej, drugiej i trzeciej sekundzie ruchu.
29. Punkt materialny porusza się z przyspieszeniem $\vec{a}=[3,1] m/s^2$, a jego prędkość początkowa wynosi $\vec{v}_0=[0,2] m/s$ oraz wektor położenia początkowego $\vec{r}_0=[1,0] m$. Oblicz prędkość i położenie po czasie t=8 s.

30. Znaleźć prędkość i przyspieszenie w ruchu opisanym równaniami:

$$x = A \cos(Bt^2), \quad y = A \sin(Bt^2) \quad (1)$$

gdzie A i B są stałymi. Znaleźć równanie toru. Jaki to jest ruch?

31. Pociągi A i B jadą po sąsiednich torach z prędkościami 60 km/h i 80 km/h. Oblicz prędkość względną pociągu B względem A, gdy pociągi poruszają się: a) w przeciwne strony, b) w tę samą stronę.
32. Pasażer pociągu elektrycznego, poruszającego się z prędkością 15 m/s, zauważył, że drugi pociąg o długości 210 m (jadący w przeciwnym kierunku) minął go w czasie 6 s. Znaleźć prędkość drugiego pociągu.
33. Dwa samochody poruszają się w tym samym kierunku, z prędkościami v_1 i v_2 po tym samym torze prostym. W pewnej chwili drugi samochód wyprzedza pierwszy o x_0 . Znaleźć:
 a) czas, po którym się spotkają,
 b) miejsce spotkania.
 c) Określić, jak zmienia się w czasie odległość między samochodami.
 d) Kiedy zadanie ma rozwiązanie?
34. Łódź płynie z prądem rzeki z przystani A do B w czasie 3 godz., a z B do A w 6 godzin. Ile czasu trzeba, aby łódź spłynęła z A do B z wyłączonym silnikiem?
35. Znaleźć prędkość motorówki na stojącej wodzie, jeżeli podczas ruchu z prądem rzeki szybkość tej motorówki względem brzegu wynosi 10 m/s, a podczas ruchu pod prąd wynosi 6 m/s. Jaka jest prędkość prądu wody w rzece?
36. Z przystani A znajdującej się nad rzeką płynącą z prędkością v_1 , wypływa w dół rzeki łódź motorowa z prędkością v_2 względem wody. Z przystani B znajdującej się w dole rzeki w odległości s_0 od A, wypływa także łódź motorowa prędkością v_3 w kierunku przystani A. Jak daleko od przystani A łodzie się spotkają?
37. Prędkość łodzi względem wody wynosi $v_1=5 m/s$. Woda w rzece płynie z prędkością $v_2=3 m/s$. Jak należy skierować łódź, aby przepłynąć rzekę w kierunku prostopadłym do jej brzegów? W jakim czasie łódź przepłynie rzekę o szerokości L= 80 m?.
38. Samolot leci z miasta A do miasta B, położonego względem A o 2160 km na wschód. Prędkość samolotu względem powietrza wynosi $v_1= 720 km/h$. Obliczyć czasy przelotu: a) przy bezwietrznej pogodzie oraz gdy na całej trasie wieje wiatr z południa na północ z prędkością $v_2= 25 m/s$.

39. Rybak płynie łódką w górę rzeki. Przejeżdżając pod mostem gubi wiosło. Po godzinie spostrzega brak wiosła, wraca i dogania je w odległości 6 km poniżej mostu. Jaka jest prędkość rzeki, jeśli rybak poruszając się zarówno w górę, jak i w dół wiosłuje jednakowo?
40. W wagonie poruszającym się po prostym torze z prędkością 14.4 km/h toczy się kulka z prędkością 3 m/s, w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu wagonu. Oblicz prędkość kulki względem Ziemi.
41. Z jaką największą prędkością może iść po deszczu człowiek, tak aby krople nie spadały mu na nogi, jeżeli trzyma parasol, którego brzeg znajduje się na wysokości $h = 2\text{ m}$ i w odległości $d = 30\text{ cm}$ przed człowiekiem? Krople deszczu spadają pionowo z prędkością $v_d = 8\text{ m/s}$.
42. Motocyklista przejechał $1/3$ drogi z prędkością 10 m/s, a pozostałą drogę z 20 m/s. Znaleźć średnią prędkość motocyklisty na całym odcinku drogi.
43. Pociąg jadący ze średnią prędkością 50 km/h przebywa pewną trasę w ciągu 3 godzin. Z jaką średnią prędkością powinien jechać, aby pokonać tę trasę w ciągu dwóch godzin?
44. Odległość S pokonują jednocześnie dwaj biegacze A i B. Biegacz A przebiega pierwszą połowę dystansu z szybkością v_1 , a drugą połowę z szybkością v_2 . Biegacz B przez pierwszą połowę czasu zużytego na przebycia całego dystansu biegnie z szybkością v_1 , a przez drugą z szybkością v_2 . Który z biegaczy finiszuje wcześniej? O jaką odległość ΔS wyprzedzi on drugiego biegacza?
45. Ile wynosiła prędkość średnia człowieka, który biegł 100 m z prędkością 5 m/s, a następnie szedł przez 80 s z prędkością 1 m/s?
46. Samochód przebył od miasta A do B drogę s , jadąc z prędkością $v_1 = 50\text{ km/h}$, a z powrotem z prędkością $v_2 = 40\text{ km/h}$. Z jaką średnią prędkością jechał?
47. Turysta udaje się z miejscowości A do odległej o 30 km miejscowości B. Ma do wyboru dwa sposoby przebycia tej trasy. W pierwszym z nich przez połowę drogi jedzie rowerem, a następnie maszeruje. W drugim przez połowę czasu jedzie rowerem, a następnie maszeruje. Którym sposobem turysta szybciej dojdzie do celu?
Jakie są średnie prędkości w obydwu przypadkach?
Prędkości marszu i jazdy na rowerze wynoszą odpowiednio : 6 km/h i 24 km/h.
48. Rowerzysta jedzie z jednego miasta do drugiego. Połowę drogi przebywa z prędkością 12 km/h, połowę pozostałego czasu jedzie z prędkością 6 km/h, a następnie do końca drogi idzie pieszo z prędkością 4 km/h. Wyznaczyć średnią prędkość ruchu rowerzysty na całej drodze.
49. Porównać swoją średnią prędkość w następujących przypadkach:
a) drogę 72 metrów przebywa się z prędkością 0.5 m/s, a następnie biegnie się wzdłuż takiego samego odcinka drogi po tej samej linii prostej z prędkością 3 m/s,
b) najpierw po torze prostoliniowym idzie się przez 1 minutę z prędkością 0.5 m/s, a następnie biegnie się tak samo długo z prędkością 3 m/s.
50. Pociąg wyrusza ze stacji i przebywa drogę $s = 750\text{ m}$ ruchem jednostajnie przyspieszonym, osiągając prędkość końcową $v = 60\text{ km/h}$. Obliczyć przyspieszenie pociągu. W jakim czasie t przebywa pociąg początkowy odcinek drogi $s_0 = 500\text{ m}$?
51. Ciało poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym przebyło w ciągu czasu $t = 10\text{ s}$ drogę $s = 30\text{ m}$, przy czym jego prędkość wzrosła $n = 5$ razy. Obliczyć przyspieszenie.
52. Ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym, przebywając kolejno dwa równe odcinki drogi w czasach $t_1 = 2\text{ s}$ i $t_2 = 1\text{ s}$. Znaleźć przyspieszenie ciała a i prędkość na początku pierwszego odcinka.

53. Maksymalna prędkość, jaką może osiągnąć pewien sprinter wynosi 11 m/s. Poruszając się ze stałym przyspieszeniem, osiąga on tę prędkość w odległości 12 m od linii startu, a następnie utrzymuje ją aż do końca biegu na 100 m. a) Po jakim czasie od startu dobiega on do mety? b) Aby skrócić czas biegu, sprinter stara się zmniejszyć drogę, na jakiej osiąga on swoją maksymalną prędkość. Ile musi wynosić ta droga, aby jego czas zmniejszył się do 10 s?
54. Wykaż, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym prędkość końcowa ciała może być wyrażona zależnością : $v_k^2 = v_0^2 + 2 a s$, gdzie v_0 to prędkość początkowa, a - przyspieszenie, s droga.
55. Określić, jak różnią się drogi hamowania samochodu w przypadku hamowania ze stałym opóźnieniem a i hamowania z opóźnieniem liniowo rosnącym od zera do wartości $a_{max} = 2a$. Jak różnią się przy tym czasy hamowania?
56. Samochód rusza i w piątej sekundzie ruchu jednostajnie przyspieszonego przebywa drogę 4.5 m. Ile wynosi przyspieszenie tego ruchu?
57. W ciągu czterech sekund od chwili rozpoczęcia ruchu jednostajnie przyspieszonego ciało przebywa drogę 48 metrów. Jaką drogę przebyło w pierwszej sekundzie jeżeli na początku było w spoczynku?
58. Ciało ruszyło z miejsca ruchem jednostajnie przyspieszonym uzyskując w końcu pierwszej i drugiej sekundy prędkości odpowiednio: 1 m/s i 2 m/s. Oblicz przyspieszenie.
59. Pręt oparty o ścianę i podłogę zsuwa się w dół, tzn koniec spoczywający na podłodze przesuwają się po niej poziomo, a drugi koniec zsuwa się pionowo po ścianie. Wyznacz tor, po jakim będzie się poruszał dowolny punkt leżący na pręcie.
60. Punkt materialny porusza się zgodnie z równaniami: $x = a(e^{kt} + e^{-kt})$ oraz $y = a(e^{kt} - e^{-kt})$, gdzie a i k są stałymi, a t jest czasem ruchu. Znajdź równanie toru, po jakim porusza się ten punkt.
61. Samolot musi mieć prędkość 100 m/s, aby mógł oderwać się od ziemi. Znaleźć czas rozbiegu i przyspieszenie samolotu, jeżeli długość pasa startowego wynosi 600 m. Założyć, że ruch samolotu jest jednostajnie przyspieszony.
62. Samolot musi wypuścić kapsułę ratowniczą dla rozbitka na morzu. Prędkość samolotu wynosi 200 km/h i leci on na wysokości 500 m. Wyznacz kąt α , pod jakim pilot widzi rozbitka w chwili najlepszej do opuszczenia kapsuły. b) Wyznacz prędkość kapsuły w chwili, gdy wpada ona do wody (wyraź ją poprzez wersory i długość i kierunek wektora).
63. Z jaką prędkością należy rzucić piłkę pionowo do góry, aby osiągnęła wysokość 15 m? Jak długo będzie znajdowała się w powietrzu?
64. Ciało rzucone poziomo z wysokości 40 m uderza w ziemię pod kątem 60° do poziomu. Obliczyć wartość prędkości w końcowym punkcie toru.
65. W rzucie poziomym ($v_0 = 20$ m/s) zasięg jest równy wysokości początkowej. Obliczyć wysokość początkową.
66. Z jaką prędkością początkową v_0 trzeba wyrzucić raketę pod kątem 45° względem poziomu, aby rozbiła się w najwyższym punkcie toru, jeżeli czas palenia zapalnika wynosi 6 s?
67. Znaleźć prędkość początkową, którą powinno mieć ciało rzucone pionowo do góry, aby wróciło z powrotem po 6 s. Jaką wysokość osiągnie to ciało?

68. Ciało rzucone poziomo z wysokości $h=40$ m uderza w ziemię pod kątem $\alpha = 60^0$ do poziomu. Oblicz wartość prędkości w końcowym punkcie toru. Opór powietrza pominąć. Dane jest przyspieszenie ziemskie g .
69. Samolot leci na wysokości h po linii poziomej z prędkością v . Pod jakim kątem do poziomu powinien widzieć lotnik swój cel znajdujący się z przodu samolotu w chwili wyrzucania bomby?
70. W rzucie ukośnym prędkość początkowa ciała może być wyrażona wzorem:
 $\vec{v}_0=[v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha]$, a przyspieszenie $\vec{a}=[0,-g]$, gdzie $g=\text{const}$ oraz położenie początkowe $\vec{r}_0=[0,0]$.
 Wyrazić wektor położenia ciała $\vec{r}(t)$ w zależności od czasu.
71. Ruch pewnego ciała można w kartezjańskim układzie współrzędnych opisać równaniami:
 $v_y(t) = v_{0y} - a_y \cdot t$
 $y(t) = v_{0y} \cdot t - a_y \cdot t^2/2$,
 gdzie: v_y i a_y to współrzędne prędkości i przyspieszenia, a t oznacza czas, a $v_{0y}=10$ m/s.
 a) Wyznacz kształt toru, po którym porusza się to ciało.
 b) Oblicz czas wznoszenia t_w i maksymalną wysokość h_{max} na jaką wzniesie się to ciało.
 c) Udowodnij, że czas wznoszenia jest równy czasowi spadania oraz, że szybkość początkowa i końcowa są równe.
 d) Narysuj wykresy $y(t)$, $v_y(t)$ i $a(t)$ w przedziale czasu $[0, 2t_w]$.
 e) Oblicz, na jakiej wysokości znajdzie się ciało po połowie czasu wznoszenia i jaka będzie wówczas wartość jego prędkości.
 f) Oblicz, po jakim czasie (t_1 i t_2) ciało znajdzie się na połowie maksymalnej wysokości i jaka będzie wówczas jego szybkość.
72. Z jaką prędkością początkową v_0 należy rzucić piłkę w dół, aby podskoczyła ona na wysokość $h=15$ m powyżej poziomu wyrzucenia (tarcie zaniedbać, a piłkę uważać za doskonale sprężystą)?
73. Ciało spadające swobodnie ma w punkcie A prędkość $v_1=29$ m/s, a w punkcie B $v_2=49$ m/s. Jaka jest długość AB i w jakim czasie ciało przebyło tę odległość?
74. Ciało rzucono z prędkością początkową v_0 pod kątem α do poziomu. Znaleźć przyspieszenie styczne i normalne ciała po upływie czasu t_1 od rozpoczęcia ruchu.
75. Na wzgórzu znajduje się cel widoczny pod kątem $\alpha=10^0$ względem poziomu z miejsca stacjonowania baterii artylerii. Odległość w kierunku poziomym od baterii wynosi $d=2$ km. Do celu żołnierze strzelają przy kącie podniesienia lufy $\beta=30^0$. Wyznaczyć prędkość początkową v_0 pocisku trafiającego w cel.
76. Kamień rzucony w kierunku poziomym z wysokości $h=2$ m nad poziomem spadł w odległości $s=7$ m od miejsca wyrzucenia. Znaleźć prędkość v_0 z jaką został wyrzucony.
77. Kaskader ma za zadanie przeskoczyć z jednego dachu na drugi, który jest niżej o 5 metrów w odległości 6 metrów. Jest w stanie rozpocząć skok z prędkością 4.5 m/s, a startuje pod kątem 30^0 . Czy wylądować bezpiecznie?
78. Kamień wyrzucony z wysokości $h=2$ m nad poziomem Ziemi pod kątem $\alpha = 40^0$ do poziomu, spadł na ziemię w odległości $s=42$ m od miejsca wyrzutu. Z jaką prędkością v_0 kamień został wyrzucony i jak długo był w powietrzu ?
79. Wyrzucono kamień pod kątem $\alpha = 40^0$ do poziomu z prędkością początkową $v_0 = 36\text{m/s}$. Na jaką wysokość h wzniesie się kamień i jaki czas będzie przebywał w powietrzu?
 W jakiej odległości l od miejsca wyrzutu spadnie i gdzie będzie się znajdował po upływie czasu $t_1 = 3\text{s}$?

80. Piłka została wyrzucona w powietrze. Na wysokości 9 m jej obserwowana prędkość wynosi $\vec{v} = 7.6\hat{i} + 6.1\hat{j}$ m/s.
- Do jakiej wysokości wzniesie się piłka?
 - Jaką odległość poziomą przebędzie piłka?
 - Jaka jest prędkość piłki (wartość, kierunek) tuż przed uderzeniem w ziemię?
81. Z tego samego miejsca na pewnej wysokości h wyrzucono jednocześnie dwa ciała: jedno do góry, drugie na dół pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu z prędkością początkową $v_0 = 30$ m/s. Określić różnicę poziomów na których znajdują się obydwa ciała po upływie czasu $t = 2$ s od wyrzucenia.
82. Określić prędkość początkową kuli armatniej wystrzelonej pod kątem $\alpha = 30^\circ$ do poziomu, jeżeli upadła ona na ziemię w odległości $s = 10$ m, a opór powietrza zmniejszył długość lotu kuli $n = 4$ razy.
83. Działo zostało przygotowane do wystrzelenia pocisku, z prędkością początkową v_0 na wprost wzgórza o kącie nachylenia α . Pod jakim kątem do poziomu powinno być wycelowane działo, aby pociski miały maksymalny zasięg R ?
84. Struga wody opuszcza rurę z prędkością $v = 30$ m/s pod kątem $\alpha = 40^\circ$ do poziomu. Na jakiej wysokości trafia ona w ścianę znajdującą się w odległości $d = 60$ m od wylotu strugi (zaniedbać opór powietrza)?
85. Z jaką prędkością wyrzucono kamień w kierunku poziomym, z góry mającej średnią pochyłość α do horyzontu, jeżeli kamień upadł na zbocze góry w odległości l od miejsca wyrzutu?
86. Ciało spadające swobodnie przebywa ostatnie $h_1 = 20$ m swej drogi w ciągu $t_1 = 0.5$ s. Znaleźć wysokość h , z jakiej spada to ciało.
87. Z jakiej wysokości spadało ciało, jeżeli w ostatniej sekundzie spadania przebyło ono drogę $h_1 = 25$ m?
88. Ciało spada z wieży. W chwili t_0 , gdy przebyło ono drogę równą d , z punktu położonego o h poniżej wierzchołka wieży zaczęło spadać drugie ciało. Oba ciała spadają na ziemię w tym samym czasie. Obliczyć wysokość wieży.
89. W ciągu czasu t_1 wartość prędkości ciała zmienia się wg wzoru:

$$v = at^2 + bt, \quad 0 \leq t \leq t_1$$
gdzie a i b są stałymi. Jaka jest średnia wartość prędkości ciała w ciągu czasu t_1
90. Z powierzchni Ziemi wyrzucono piłkę pionowo do góry z prędkością v_0 . Równocześnie z wysokości, na jaką wzniesie się piłka, zaczyna spadać w dół kamień z tą samą prędkością v_0 . Obliczyć po jakim czasie i na jakiej wysokości te ciała się miną, a także prędkości w chwili mijania.
91. Dwa pociągi jadą po tym samym torze i w tym samym kierunku. Prędkość pierwszego wynosi $v_1 = 48$ km/h, a drugiego $v_2 = 120$ km/h. Gdy odległość między pociągami wynosiła $d = 350$ m, drugi zaczął hamować z opóźnieniem $a_2 = 2$ m/s². Czy doszło do zderzenia? Jeśli nie doszło, to jaka była odległość między pociągami, gdy ich prędkości się zrównały?
92. Łódka przepłynęła rzekę prostopadle do jej brzegów. Prąd zniósł łódkę o $l = 100$ m w swoim kierunku. Szerokość rzeki wynosi $s = 200$ m, a prędkość łódki względem wody $v_1 = 4$ m/s. Wyznacz prędkość prądu rzeki v_p oraz czas przeprawy przez rzekę.
93. Znaleźć prędkość kuli, jeżeli po wystrale z pistoletu w kierunku poziomym kula przebiła dwie pionowe kartki papieru ustawione w odległości 20 m od siebie, przy czym okazało się, że otwór w drugiej kartce znajduje się o 5 cm niżej niż otwór w pierwszej kartce.

94. Jaką minimalną prędkość poziomą musi Janek nadać piłce, jeżeli chce przerzucić ją przez ogrodzenie o wysokości 2 m oddalone o 10 m od budynku? Janek stoi przy otwartym oknie, a jego ramię znajduje się na wysokości 6 m nad ziemią.
95. Jaką prędkość należy nadać piłce golfowej, aby upadła w odległości 20 m od miejsca wybicia i osiągnęła maksymalną wysokość 5 m? Oblicz kąt początkowy tego rzutu.
96. Dwa ciała wyrzucono równocześnie z dwóch różnych punktów. Jedno ciało zostało rzucone poziomo z prędkością początkową v_{ox} z wieży o wysokości H , drugie pionowo z prędkością v_{0y} z miejsca odległego o d od podnóża wieży. Jaka powinna być prędkość v_{0y} , aby ciała zderzyły się nad ziemią?
97. U podnóża zbocza wznoszącego się pod kątem β do poziomu wystrzelono z armaty. Kula wyleciała z lufy z prędkością v_0 pod kątem α do poziomu ($\alpha > \beta$). Wyznaczyć współrzędne punktu, w którym kula trafi w zbocze.
98. Z brzegu studni wyrzucono do góry kamień z prędkością v_0 . Po jakim czasie t spadnie on na dno studni, jeżeli ma ona głębokość h . Obliczyć prędkość v_k kamienia w chwili jego uderzenia o dno studni.
99. Z balonu unoszącego się do góry z prędkością 12 m/s, na wysokości 80 m nad ziemią upuszczono paczkę. Po jakim czasie paczka spadła na Ziemię?
100. Piłka stacza się z poziomego stołu o wys. 1.2 m. Jaką prędkość miała piłka w chwili odrywania się od krawędzi stołu, jeżeli upadła ona na podłogę o odległości 1.5 m od stołu?
101. Samolot bojowy leci równolegle do ziemi na wysokości H z prędkością v . Gdy samolot przelatuje nad działem przeciwlotniczym, z działu oddano strzał. Jaki powinien być kąt nachylenia działu, aby kula trafiła w samolot, jeżeli prędkość kuli wynosi v_0 ?
102. Z armaty wystrzelono pocisk z prędkością v_0 pod kątem α do poziomu. Z jakiej wysokości y_0 należy puścić swobodnie ciało, aby zostało trafione przez pocisk, jeżeli linia pionowa, wzdłuż której spada ciało znajduje się w odległości x_0 od armaty?
103. Od rakiety, wznoszącej się pionowo do góry, w momencie gdy ma ona prędkość v_{0y} odzepia się na wysokości h niepotrzebny już zbiornik paliwa. Obliczyć czas spadania t oraz prędkość v z jaką zbiornik upadł na ziemię.
104. W rzucie poziomym prędkość końcowa ciała jest $n = 3$ razy większa od prędkości początkowej. Prędkość początkowa ciała wynosiła $v_0 = 9.8$ m/s. Obliczyć wysokość początkową rzutu.
105. W rzucie poziomym zasięg równy jest wysokości początkowej. Prędkość początkowa ciała wynosiła v_0 . Obliczyć czas trwania rzutu oraz prędkość końcową ciała.
106. Chłopiec rzuca piłką z prędkością v_0 pod kątem α do poziomu. Piłka uderza o ścianę znajdującą się w odległości S od chłopca. Wyznaczyć wysokość na jakiej piłka uderzy w ścianę.
107. Karabin jest wycelowany w tarczę odległą od niego o 30 metrów. Kula trafia w tarczę 1.9 cm poniżej punktu, do którego celowano. Oblicz czas lotu kuli i prędkość z jaką ją wystrzelono.
108. Piłkarz wykonujący rzut wolny na wprost bramki w odległości 50 m od niej, nadaje piłce prędkość 25 m/s. Wyznacz zakres kąta, pod jakim powinna być uderzona piłka, jeżeli poprzeczka bramki jest na wysokości 3.44 m nad boiskiem.
109. Jaki powinien być czas opóźnienia zapłonu granatu wyrzuconego z prędkością v_0 pod kątem α do poziomu, aby wybuch nastąpił w najwyższym punkcie toru?

110. W czasie t prędkość v_0 samochodu wzrosła n razy. Oblicz stałe przyspieszenie samochodu, prędkość średnią oraz drogę przebytą w czasie t .
111. Pociąg przebywa ruchem jednostajnie opóźnionym dwa kolejne odcinki toru o jednakowych długościach l w czasach t_A i t_B . Znaleźć opóźnienie pociągu oraz prędkość początkową v_0 , z jaką wjechał na pierwszy odcinek toru.
112. Dwa ciała mijają się poruszając się wzdłuż tej samej prostej w tą samą stronę. Pierwsze ciało ma stałą prędkość v_1 , drugie w chwili mijania porusza się z prędkością v_2 i ze stałym przyspieszeniem a , które jest skierowane przeciwnie do v_2 . Obliczyć czas t , po którym te ciała się znów spotkają.
113. Z punktu O wyruszył samochód ze stałą prędkością v_1 , z punktu B odległego od O o x_0 wyruszył drugi samochód z prędkością początkową v_2 i przyspieszeniem a . Samochody jadą wzdłuż tej samej prostej i w tę samą stronę. Wyznaczyć czas t , po którym nastąpi spotkanie, jeżeli $v_1 > v_2$.
114. Dwa ciała spadają swobodnie z różnych wysokości, lecz docierają do ziemi w tej samej chwili, przy czym pierwsze ciało spadało $t_1=1$ s, a drugie $t_2=2$ s. W jakiej odległości od ziemi znajdowało się drugie ciało, gdy pierwsze zaczęło spadać?
115. Z brzegu szczeliny o gładkich ścianach odległych od siebie o x_0 wystrzelono małą kulkę stalową z prędkością v_{0x} w kierunku poziomym. Kulka odbija się od ścian szczeliny opadając w dół. W jakich odległościach znajdują się punkty kolejnych odbić kulki od ścian szczeliny?
116. Prędkość samochodu maleje jednostajnie od 45 km/h do 39 km/h na odcinku 50 m.
- Jaka jest wartość i kierunek przyspieszenia?
 - Jak długo jechał samochód?
 - Ile czasu upłynie do zatrzymania?
 - Jaką drogę przejedzie do zatrzymania?

Ruch po okręgu

- Przedstawić promień wodzący $\vec{r}$ punktu materialnego poruszającego się ruchem jednostajnym po okręgu w kartezjańskim układzie współrzędnych, korzystając z wektorów jednostkowych $\vec{i}$ oraz $\vec{j}$. Mając tak przedstawione $\vec{r}$ znaleźć odpowiednie wyrażenia na prędkość $\vec{v}$ i przyspieszenie $\vec{a}$ punktu materialnego.
 - Udowodnić, że prędkość jest prostopadła do promienia wodzącego.
 - Udowodnić, że przyspieszenie jest skierowane do środka koła.
- Współrzędne ciała poruszającego się w płaszczyźnie xy określone są zależnościami: $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$, gdzie R i ω są to wielkości stałe. Po jakim torze porusza się to ciało? Jakie jest znaczenie stałych R i ω ? Wyznacz wektor prędkości i przyspieszenia w tym ruchu.
- Punkt materialny P poruszający się ze stałą prędkością w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, po okręgu o promieniu 3 m, wykonuje jeden obrót w ciągu 20 s. W czasie $t=0$ punkt przechodzi przez punkt $P = (0, 3m)$. Wychodząc z punktu P znaleźć:
 - wartość i kierunek wektorów położenia po upływie 5 s, 7.5 s i 10 s.
 - wartość i kierunek przemieszczenia w ciągu 5-sekundowego przedziału czasu między piątą a dziesiątą sekundą ruchu,
 - wartość prędkości średniej w tym przedziale,
 - wektory prędkości początkowej i chwilowej na początku i na końcu tego przedziału,
 - wektor średniego przyspieszenia w tym przedziale,
 - wektory przyspieszenia chwilowego na początku i na końcu tego przedziału.
- Chłopiec wiruje w koło kamieniem na sznurku o długości 1.2 m w płaszczyźnie poziomej w odległości 1.8 m od podłoża. Sznupek pęka i kamień zostaje wyrzucony poziomo i uderza w ziemię w odległości 9.1 m. Jakie było przyspieszenie dośrodkowe podczas ruchu obrotowego?
- Obie wskazówki zegara pokrywają się o godzinie dwunastej. Po jakim czasie pokryją się ponownie?
- Minutowa wskazówka jest $n=1.5$ raza dłuższa od wskazówki godzinowej.
 - Ile razy większa jest prędkość liniowa końca wskazówki minutowej od prędkości liniowej końca wskazówki godzinowej?
 - Oblicz stosunek przyspieszeń dośrodkowych końców obu wskazówek.
- Z jaką maksymalną prędkością musi jechać rowerzysta po okręgu o promieniu $r=10$ m, jeżeli maksymalny kąt nachylenia roweru wynosi $\phi = 30^\circ$ do pionu?
- Ile obrotów N dokona koło od momentu włączenie hamulców do momentu zatrzymania się, jeżeli w chwili rozpoczęcia hamowania wykonywało ono $n=1500$ obrotów na minutę, a zatrzymało się po upływie $t=30$ s od chwili rozpoczęcia hamowania? Jakie było przyspieszenie?
- Wał poruszający się ruchem jednostajnie przyspieszonym wykonał $n=100$ obrotów w ciągu $t=20$ s. Określić prędkość kątową wału przy końcu dwudziestej sekundy, jeżeli w chwili $t_0=0$ wał znajdował się w spoczynku.
- Pociąg porusza się po łuku o promieniu krzywizny $r=400$ m, przy czym jego przyspieszenie styczne wynosi $a_t = 0.2m/s^2$. Określić przyspieszenie normalne a_r i całkowite przyspieszenie a pociągu w chwili, gdy jego prędkość wynosi $v = 10m/s$.
- Koło o promieniu $r=10$ cm obraca się z takim przyspieszeniem, że liczba jego obrotów wzrasta o $n_0=1/2$ na s. Znaleźć w końcu drugiej sekundy:
 - prędkość kątową obrotów koła,
 - prędkość liniową punktów na obwodzie koła,
 - normalne, styczne i pełne przyspieszenie punktów na obwodzie.

12. Po włączeniu silnika elektrycznego wirnik osiąga $n=1000$ obrotów na minutę w ciągu $t=5$ s. Określić przyspieszenie kątowe wirnika.
13. Jakie jest przyspieszenie obiektu na równiku i na równoleżniku 60° dzięki obrotowi Ziemi? O ile musiałaby się zwiększyć prędkość obrotów Ziemi dla ciała na równiku, aby przyspieszenie ziemskie g nie było w stanie utrzymać tego ciała na Ziemi? ($R_{Ziemi}=6370$ km).
14. Obliczyć prędkość danego punktu w ruchu obrotowym Ziemi:
 - a) na równiku,
 - b) na szerokości geograficznej $\phi = 48^\circ$.
 Obliczyć przyspieszenie odśrodkowe w punkcie o szerokości geograficznej ϕ . Promień Ziemi wynosi $R_{Ziemi}=6370$ km.
15. Punkt materialny obiega okrąg o promieniu 10 cm ze stałą prędkością 3.14 m/s. Ile razy punkt obiegnie ten okrąg w czasie jednej minuty?
16. Obliczyć wartość promienia R koła, jeżeli przy prędkości liniowej punktów na obwodzie wynoszącej 6 m/s punkty znajdujące się o 15 cm bliżej osi poruszają się z prędkością liniową 5.5 m/s.
17. Punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu $R=8$ cm ze stałym co do wartości przyspieszeniem liniowym $a=5$ cm/s². Po jakim czasie t od chwili rozpoczęcia ruchu przyspieszenie dośrodkowe będzie co do wartości dwa razy większe od przyspieszenia liniowego?
18. Koło zamachowe wykonujące $n=240$ obr/min zatrzymuje się w czasie 0.5 min. Przyjmując, że jest to ruch jednostajnie zmienny obliczyć ile obrotów koło wykonało do chwili zatrzymania się.
19. Przyspieszenie normalne punktu materialnego poruszającego się po okręgu o promieniu $R=4$ m zależy od czasu wzorem: $a_n = 1 + 3t + 2.25t^2$. Znajdź przyspieszenie styczne punktu, jak również przyspieszenie całkowite po czasie $t_1 = 2/3$ s od chwili rozpoczęcia ruchu.
20. Koło o promieniu $R=2$ m obraca się tak, że kąt obrotu promienia kała ϕ zależy od czasu t w następujący sposób:
 $\phi(t) = A + Bt + Ct^2$ gdzie $B=4$ rad/s, $C=3$ rad/s².
 Wyznaczyć po czasie $t=2$ s od momentu rozpoczęcia ruchu dla punktów położonych w odległości $3R/4$ od osi obrotu:
 - a) prędkość kątową,
 - b) prędkość liniową,
 - c) przyspieszenie styczne, normalne i całkowite.
21. Ciało porusza się po okręgu tak, że kąt pomiędzy wektorem przyspieszenia $\vec{a}$ a prędkości liniowej $\vec{v}$ wynosi $\alpha=30^\circ$. Obliczyć stosunek przyspieszenia dośrodkowego do liniowego.
22. Koło o promieniu $R=10$ cm wiruje z prędkością kątową $\omega=628$ rad/s. Znaleźć czas pełnego obiegu T oraz prędkość liniową v punktu znajdującego się na obwodzie koła. Znaleźć liczbę obrotów n koła w ciągu $t=1$ min.
23. Kolarz rozpoczynając jazdę pierwsze 30 s jedzie ruchem jednostajnie przyspieszonym. Jaką prędkość osiągnie po tym czasie, jeżeli promień kół rowerowych wynosi 35 cm, a ich przyspieszenie kątowe 0.5 rad/s?
24. Motocyklista startuje do wyścigu rozgrywanego na torze kołowym o promieniu 60 m. W ciągu pierwszych 10 sekund wartość jego prędkości wzrasta jednostajnie do 58 km/h. Jaka była wartość przyspieszenia liniowego (stycznego) i kąowego motocyklisty? Oblicz przyspieszenie dośrodkowe motocyklisty po ośmiu sekundach. Jaki kąt tworzył w tym momencie wektor przyspieszenia wypadkowego ze styczną do toru?

25. Prędkość kątowna korbowodu samochodu w ciągu 12 s wzrosła z 1200 obr/min do 3000 obr/min. Obliczyć przyspieszenie kątowe przyjmując, że jest ono stałe. Ile obrotów wykonał korbowód w ciągu tego czasu?
26. Koło obraca się ze stałym przyspieszeniem kątowym i wykonuje 90 obrotów na minutę w czasie $t_1=15$ s, osiągając prędkość kątową o wartości 10 obrotów/minutę. Jaka była prędkość kątowa na początku czasu t_1 ? Wyznacz czas t_2 , jaki upłynął od chwili, gdy koło miało prędkość kątową równą zero do początku czasu t_1 .
27. Olbrzymie koło obraca się jednostajnie w płaszczyźnie poziomej z okresem T .
- a) Jaka jest prędkość v_0 oraz przyspieszenie normalne osoby znajdującej się w odległości r od osi obrotu?
 - b) Jakie jest przyspieszenie styczne tej osoby jeśli po zadziałaniu hamulców koło obracając się ruchem jednostajnie opóźnionym wykona jeszcze jeden pełny obrót?
28. Koło o promieniu R toczone się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie po linii prostej przemieszcza się ze stałą prędkością v_0 . Znaleźć zależność prędkości i przyspieszenia punktów na obwodzie tego koła od czasu.