

Podstawy fizyki – sezon 2

XIII. Mechanika relatywistyczna

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

AGH, WFliS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 111
amucha@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

Fizyka klasyczna się kończy

- Galileusz – (1564) - Prawa mechaniki są jednakowe we wszystkich układach inercjalnych (wykład 2).
- Jednostajny, prostoliniowy ruch układu odniesienia nie ma wpływu na zachodzące w nim zjawiska fizyczne.

Transformacja Galileusza

Nowy układ (y') porusza się ze stałą prędkością u .

położenie punktu m w nowym układzie:

$$x'(t) = x(t) - x_0$$

prędkość w nowym układzie:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}$$
$$v'(t) = v(t) - u$$

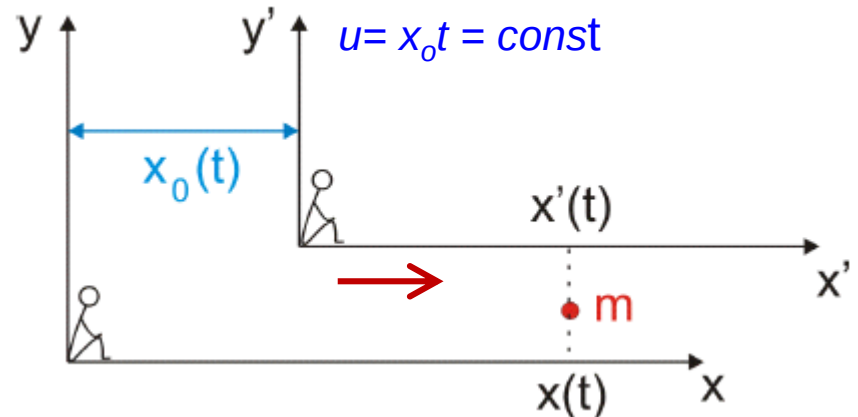
przyspieszenie w nowym układzie:

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt}$$

czyli: $a' = a - 0$

siły: $F' = F$

(tak samo w 3D)



Transformacja Galileusza - zmierzch

- ❓ Transformacja Galileusza dotyczyła procesów mechanicznych, pozwalała na znalezienie wartości danej wielkości fizycznej w nowym układzie odniesienia, o ile znana jest jej wartość w starym układzie odniesienia.

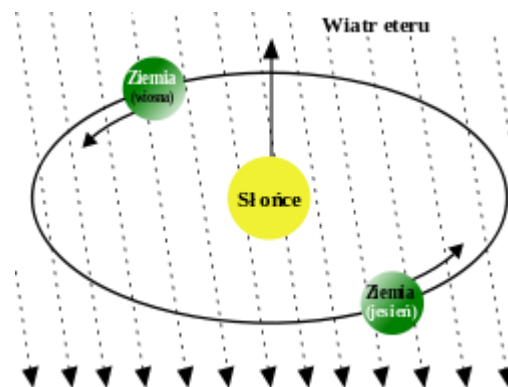
$$\begin{cases} x' = x - ut \\ t' = t \end{cases} \quad v' = v - u$$

Mechanika klasyczna zakłada ponadto, że czas w obu układach odniesienia płynie jednakowo, masa nie zależy od prędkości ($m' = m$)

- ❓ XIX wiek – czy transformacja Galileusza jest dobra dla zjawisk falowych, a zwłaszcza dla światła? Czy $c' = c + u$, czyli czy prędkość światła jest większa, gdy jest wysyłana w poruszającym się pojeździe?
- ❓ W XIX wieku uważano, że fale elm rozchodzą się w pewnej substancji wypełniającej przestrzeń - eterze

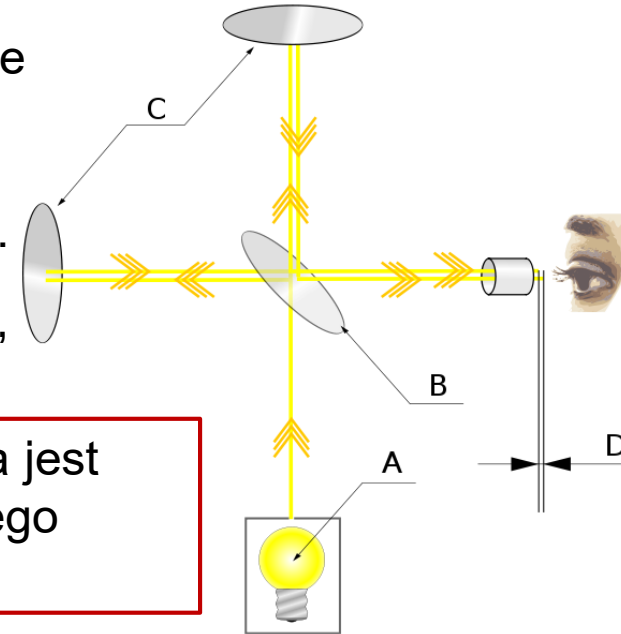
Eter

- ❓ Uważano, że przestrzeń wypełniona jest eterem (jak ośrodek śrężysty dla fal akustycznych), w którym rozchodzi się światło. Eter miałby pozostawać w spoczynku względem Wszechświata.
- ❓ Jeśli inny układ porusza się względem eteru i w nim wysyłane jest światło, to zgodnie z transformacją Galileusza $c' = c + V$.
 - Prędkość Ziemi na orbicie to $3 \cdot 10^4$ km/s – prędkość światła powinna zależeć od prędkości Ziemi! I powinna być różna dla lata i zimy, i różna w kierunkach wschód-zachód i północ-południe (jak to zmierzyć?)
- ❓ Hipotezy te zostały zweryfikowane w doświadczeniu Michelsona-Morley'a (1887)



Doświadczenie Michelsona-Morley'a

- ❓ Interferometr - dwa ciągi fal świetlnych są wysyłane ze wspólnego źródła, interferują ze sobą i punkcie obserwacji wzmacniają się i wygaszają dając prążki (max i min natężenia) w zależności od przebytej drogi.
- ❓ Gdyby istniał eter – po obróceniu interferometru o 90° , układ prążków by się zmienił.



Eksperyment dał wynik negatywny – prędkość światła jest taka sama i ruch Ziemi względem eteru nie ma żadnego znaczenia.

- W przypadku zjawisk elektromagnetycznych nie istnieje żaden wyróżniony inercjalny układ odniesienia – nie ma eteru.
- Fale elektromagnetyczne mogą rozchodzić się w próżni, bez pośrednictwa ośrodka materialnego.
- Jednocześnie dodawanie prędkości wzgl Galileusza nie sprawdza się dla światła

Światło- jakie mamy oczekiwania

❓ Einstein 1905 – **szczególna teoria względności**,

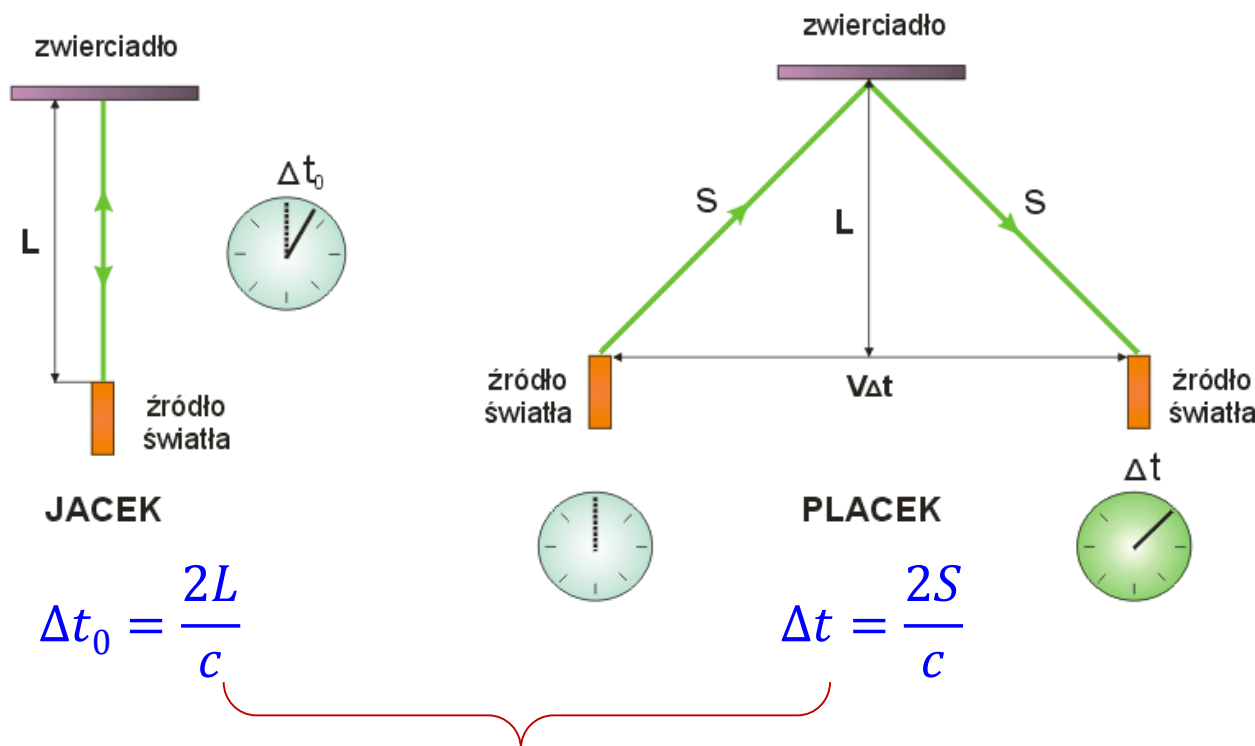
1. Jednostajny prostoliniowy ruch układu odniesienia nie ma wpływu na zachodzące w nim dowolne zjawiska fizyczne (mechaniczne, elektromagnetyczne i inne). Wszystkie inercjalne układy odniesienia są równouprawnione, nie można za pomocą żadnych doświadczeń fizycznych stwierdzić, czy dany układ pozostaje w spoczynku, czy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
2. **Prędkość światła w próżni nie zależy od prędkości obserwatora i źródła światła i jest jednakowa we wszystkich układach odniesienia.**

Kosztym spełnienia tych postulatów jest zmiana definicji czasu i przestrzeni.

Transformacja Galileusza zostaje zastąpiona **transformacją Lorentza**.

Czas w różnych układach

- ❓ Problem z dodawaniem prędkości – obserwator (Placek) stoi na peronie i widzi, jak światło (wysłane przez Jacka) biegnie w odjeżdżającym pociągu:



W układzie Placka światło przebywa dłuższą drogę – czas powinien też być dłuższy

OBYDWA!

który wynik jest poprawny?

Interpretacja wyniku

Droga S przebyta przez światło: $S = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L^2}$

$$S = \frac{1}{2}c\Delta t \quad L = \frac{1}{2}c\Delta t_0$$

$$\frac{1}{2}c\Delta t = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t_0}{2}\right)^2}$$

Obydwa wyniki są poprawne, gdy:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma \Delta t_0$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} > 1$$

czynnik Lorentza

Czas zmierzony w ukł.
spoczywającym Δt_0 – **czas własny**.

Dylatacja czasu – różnica $(\Delta t - \Delta t_0)$

odstęp czasu Δt zmierzony przez Placka
jest dłuższy od czasu Δt_0 uzyskany przez
Jacka

Pomiar długości

❓ Pomiar długości w dwóch układach odniesienia:

W układzie, w którym pręt spoczywa: $l = z_2 - z_1$

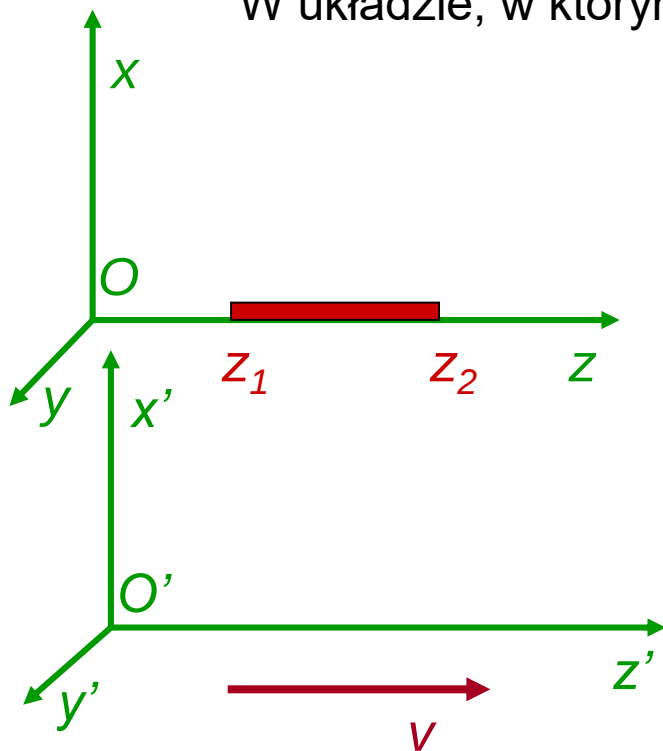
ale układzie poruszającym się: $l' = z'_2 - z'_1$

$$z_1 = \frac{z'_1 + v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad z_2 = \frac{z'_2 + v \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$z_2 - z_1 = \frac{z'_2 - z'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$l' = l \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{l}{\gamma}$$

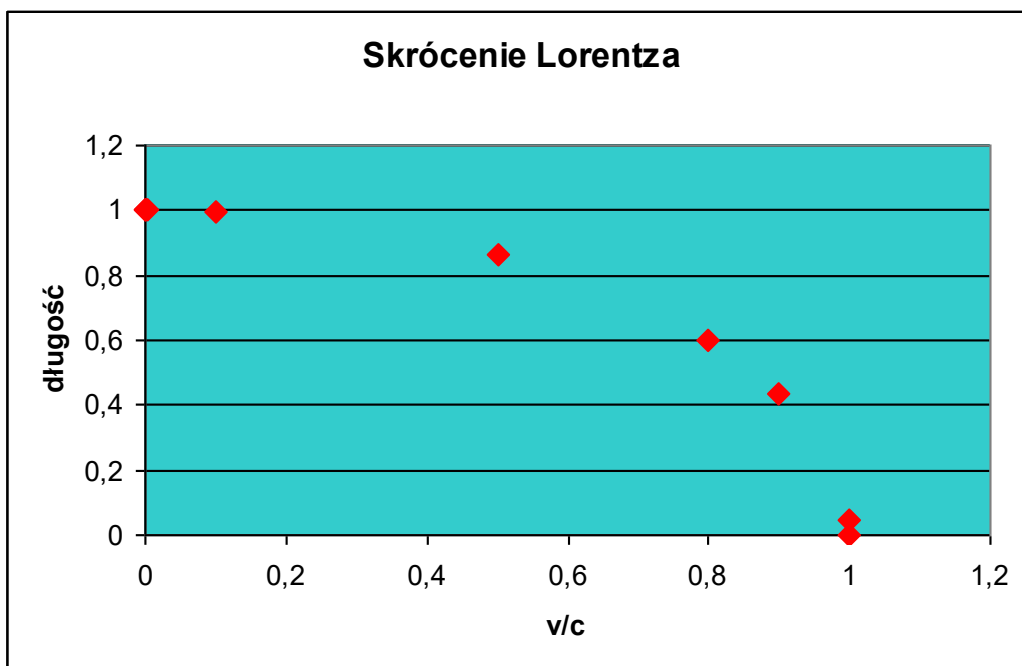
skrócenie Lorentza (kontrakcja długości)



Kontrakcja długości

❓ W układzie własnym mierzymy największą długość i najkrótszy czas.

Przykł: długość 1-metrowego pręta
widziana przez nieruchomego obserwatora
wzgl. prędkości pręta



Przykł: Czas życia pionu:

$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ wynosi $\tau' = 2.5 \cdot 10^{-8} s$
(w jego układzie własnym), a $t = 2.5 \cdot 10^{-6} s$ i droga $d = 750 m$ w
ukł. lab

$$t = \gamma \tau' > \tau'$$

$$d = \gamma \lambda > \lambda$$

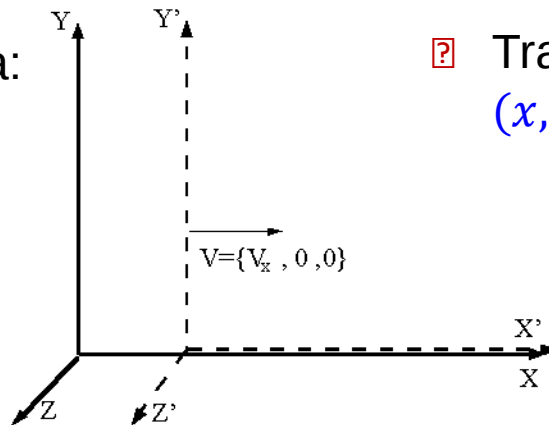
W układzie własnym cząstka żyje
najkrócej i przebywa najmniejszą
drogę do rozpadu

Transformacja Lorentza

❓ Utrzymanie stałej prędkości światła w każdym układzie odniesienia powoduje, że pojęcie czasu i odległości zmienia się i zależy od wyboru układu.

❓ Transformacja Lorentza:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}$$



❓ Transformacja odwrotna
 $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$: $v \rightarrow -v$

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\end{aligned}$$

❓ Jednoczesność: Jeżeli dwa zdarzenia zachodzą w tym samym czasie ale w różnych miejscach układu S' to:

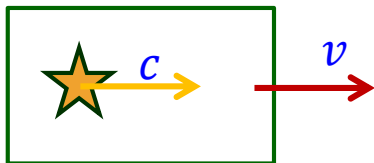
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) = \gamma \frac{v\Delta x'}{c^2} \neq 0$$

zdarzenia nie są jednoczesne w układzie S (względność jednoczesności)

Składanie prędkości

Galileusz:

$$u = u' + v$$



Einstein:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v \frac{\Delta x'}{\Delta t'}}{c^2}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

$$c + c \neq 2c; \quad c + c = c$$

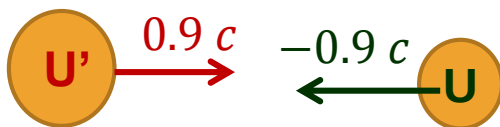
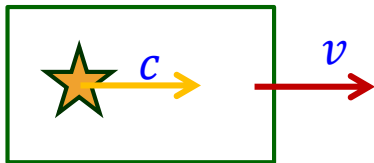
Składanie prędkości

Galileusz:

$$u = u' + v$$

Przykł: światło w poruszającym się pociągu ma prędkość:

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c$$



Einstein:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v \Delta x'}{c^2 \Delta t'}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

$$c + c \neq 2c; \quad c + c = c$$

Przykł: dwie cząstki poruszające się w przeciwnych kierunkach z $v = 0.9c$:

z cząstką 1. $v = -0.9c$ wiążemy układ U ,
z cząstką 2. $u = +0.9c$ wiążemy ukł U' ,
w ukł. U cząstka 1. spoczywa, co oznacza,
że prędkość 2 w ukł. U jest prędkością
względną:

$$v = \frac{v + u}{1 + \frac{vu}{c^2}} = \frac{18c}{1 + 0.9^2} = \frac{1.8c}{1.91} \approx 0.994c$$

Pęd relatywistyczny

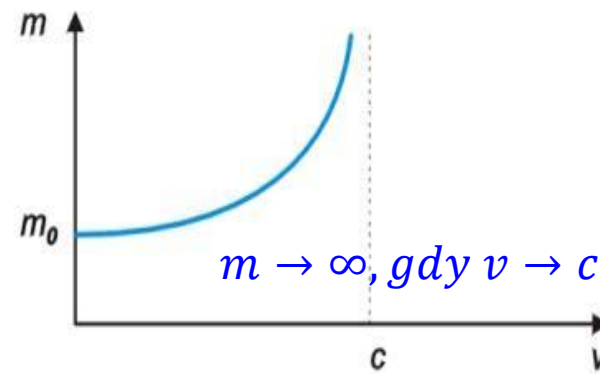
❓ Klasycznie: $p = mv = m \frac{\Delta x}{\Delta t}$

❓ Relatywistycznie: czas – czas własny $\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}$ i nowa def pędu:

$$p = m_0 \frac{\Delta x}{\Delta t} \gamma = \gamma m_0 v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v = mv$$
$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = m \vec{v}$$

❓ **Masa relatywistyczna** m cząstki rośnie z jej prędkością: dla $v \rightarrow 0$; $m \rightarrow m_0$, m_0 – **masa spoczynkowa**

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Energia relatywistyczna

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2$$
$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$$

$$m^2 c^4 = (pc)^2 + m_0^2 c^4$$

?

$$(\gamma m_0 c^2)^2$$

energia kinetyczna

energia spoczynkowa

energia CAŁKOWITA

$$E = mc^2$$

$$E^2 - (pc)^2 = m_0^2 c^4$$

niezmiennik
relatywistyczny

Całkowita energia ciała jest równa iloczynowi jego masy relatywistycznej i kwadratu prędkości światła w próżni

Energie relatywistycznie

❓ Energia spoczynkowa: $E_0 = m_0 c^2$

jest to całkowita energia ciała spoczywającego

❓ Całkowita energia: $E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$

$$? \quad \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

mamy: $x = -\frac{v^2}{c^2}$, $q = -\frac{1}{2}$, czyli:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\text{Rozwinięcie: } (1 + x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!} x^2 + \dots$$

zatem:

$$\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Energia kinetyczna

$$\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

energia
całkowita

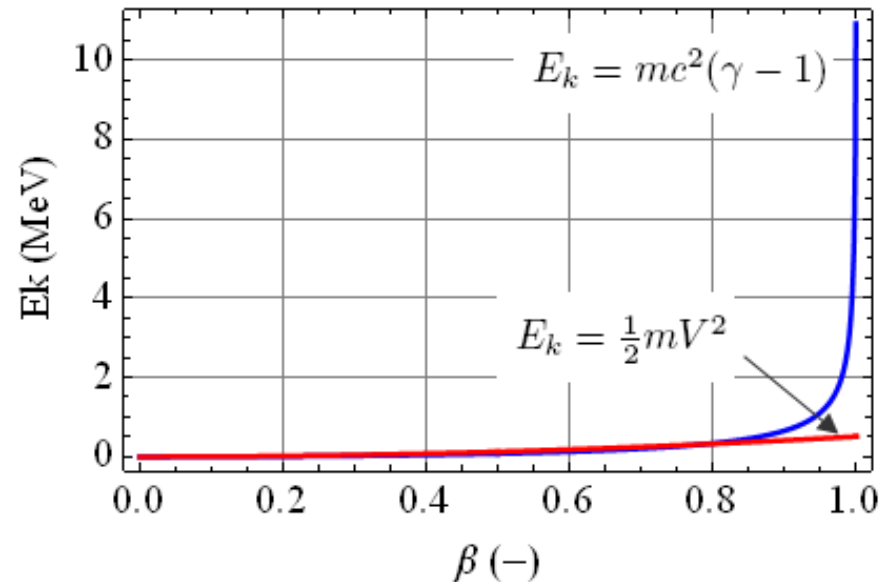
spoczynkowa

kinetyczna

$$E_k = E - m_0 c^2$$

Relatywistyczna energia kinetyczna:

$$E_k = mc^2(\gamma - 1)$$



$$E_K \rightarrow \infty, \text{ gdy } v \rightarrow c$$

co oznacza, że ciało o niezerowej masie spoczynkowej, porusza się z $v < c$

Czterowektory

❓ Jak mierzyć energię i pęd w różnych układach?

Udało się pokazać, że istnieje pewna wartość niezależna od wyboru układu:

$$m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2$$

Transformacja energii i pędu:

$$\begin{cases} p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{\beta E}{c} \right) \\ E' = \gamma (E - p_x c \beta) \end{cases}$$

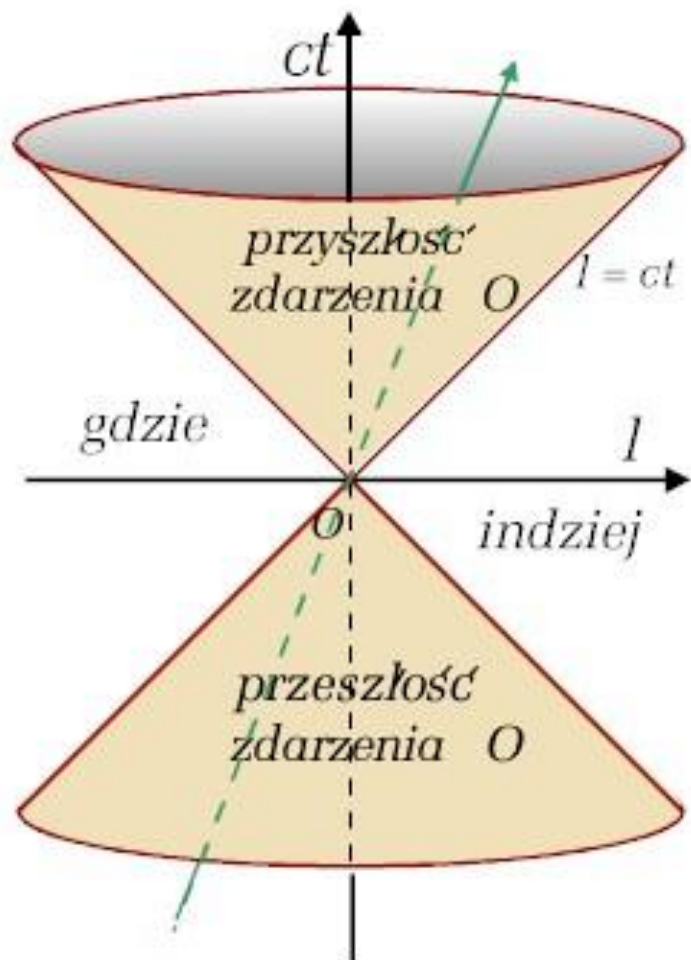
$(ct, \vec{r})$ oraz $(E/c, \vec{p})$ są to

CZTEROWEKTORY

Przestrzeń i czas nie są niezależne – tworzą **czasoprzestrzeń**.

Również energia i pęd – tworzą **czteropęd**

Interwał czasoprzestrzenny



$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = l^2$$

odległość pomiędzy dwoma zdarzeniami w czasoprzestrzeni-
interwał czasoprzestrzenny (jest taki sam we wszystkich układach)

Równoważność masy i energii

- ❓ Możliwość przemiany masy spoczynkowej w energię – najważniejszy wynik teorii względności!

$$E = m_0 c^2$$

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2$$

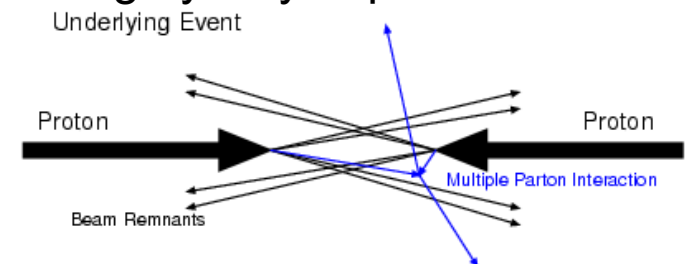
- ❓ Zamiana energii w masę:

- przy małych prędkościach – zderzamy niesprężysto dwie masy 1g o prędkościach 10^3 m/s:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \sim 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 \approx 10^{-11} \text{ g}$$

- produkcja cząstek w zderzeniach wysokoenergetycznych protonów:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \gg 0$$



- produkcja energii z rozszczepienia jądra:

$$\Delta E = c^2(M - m_1 - m_2) > 0$$

Relatywistyka w życiu

❓ Eksperymenty myślowe: paradoks bliźniąt

w układach poruszających się czas biegnie wolniej –

- zegar pozostający w spoczynku w układzie U wskazuje czas własny t , mierzony przez obserwatora w spoczynku w tym układzie U .
- identyczny zegar w układzie U' , również wskazuje t , bo pozostaje w tym układzie w spoczynku.
- ale! Jeżeli mierzymy w układzie U' przedział czasu, który w ukł. U wynosił t , to otrzymujemy czas dłuższy t'
- no i: Jeżeli mierzymy w układzie U przedział czasu, który w ukł. U' wynosił t , to otrzymujemy czas dłuży t'
- Paradoks?

Rozumowanie: mamy dwóch braci bliźniaków (siostry bliźniaczki?), jeden jest astronomem i leci w kosmos, drugi zostaje na Ziemi. Astronom leci na układ ❓ Centaura (4,3 lat świetlnych od Ziemi).

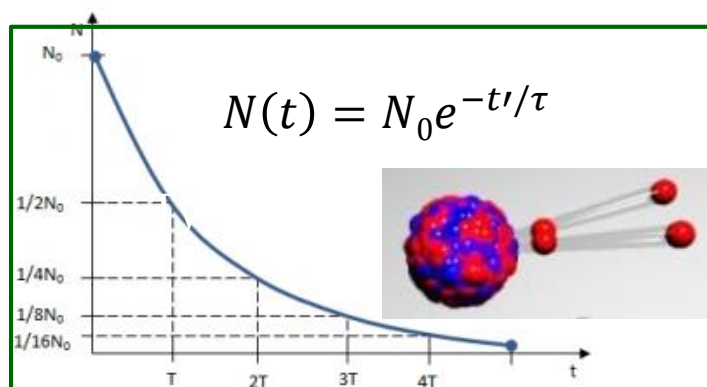
- Który z bliźniaków (wysłany w rakiecie, czy pozostający na Ziemi) będzie młodszy?

Paradoks bliźniąt i rozpadu

❓ Który z bliźniaków jest młodszy? Każdy sądzi, że to ten drugi jest młodszy, bo był w poruszającym się układzie.

- Ale astronauta musi wrócić na Ziemię, zmienia układ inercjalny (widzi inne gwiazdy, czuje działanie siły bezwładności, bo zmienia v na $-v$), powstaje asymetria – no i jednak to **astronauta jest młodszy!**

❓ Lepsze, bo mierzalne i potwierdzone doświadczalnie jest rozumowanie dotyczące rozpadów promieniotwórczych.



porównujemy liczbę jąder, które się nie rozpadły w dwóch układach:

$$\begin{aligned} \frac{N_0 e^{-t'/\tau}}{N_0 e^{-t/\tau}} &= e^{(t-t')/\tau} = e^{(\gamma t' - t')/\tau} = \\ &= e^{t'(\gamma-1)/\tau} > 1, \quad \text{bo } \gamma > 1 \end{aligned}$$

$0.9 c$

W poruszającej się rakiecie zostanie więcej jąder, które się nie rozpadły

Efekty relatywistyczne w życiu

- ❑ Zderzenia wysokoenergetycznych cząstek (np. LHC w CERnie) – za chwilę więcej!
- ❑ Poprawki zegarów atomowych: jeden zegar odbywa podróż w ponaddźwiękowym samolocie, drugi zostaje na Ziemi. Poruszający się zegar spóźniał o kilkanaście ns.
- ❑ Poprawki relatywistyczne GPS – zegary umieszczone na satelitach chodzą wolniej niż zegary na Ziemi

<http://www.if.pwr.wroc.pl/~wsalejda/>
GPS

Podsumowanie

- ❑ Przesłanki prowadzące do szczególnej teorii względności
 - hipoteza eteru,
 - dośw. Michaelsona-Morleya
 - równania Maxwella
- ❑ Postulaty Einsteina
- ❑ Konsekwencje – dylatacja czasu, skrócenie długości.
- ❑ Czerowektory,
- ❑ Energia relatywistyczna, spoczynkowa
- ❑ Mierzalne efekty relatywistyczne