

Wektory i kinematyka

1. Dane są dwa wektory: $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ i $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$. Obliczyć:
 - a) długość każdego wektora,
 - b) iloczyn skalarny $\vec{a} \cdot \vec{b}$
 - c) kąt zawarty między nimi,
 - d) sumę i różnicę $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$,
 - e) iloczyn wektorowy $\vec{a} \times \vec{b}$.
2. Samolot leci z miasta A do miasta B, położonego względem A o 2160 km na wschód. Prędkość samolotu względem powietrza wynosi $v_1 = 720$ km/h. Obliczyć czasy przelotu: a) przy bezwietrznej pogodzie oraz gdy na całej trasie wieje wiatr z południa na północ z prędkością $v_2 = 25$ m/s.
3. O czasie $t_1 = 14.0$ s samochód o masie $m = 1200$ kg był w punkcie $\vec{r}_1 = [100, 0, 25]$ m i miał pęd $\vec{p}_1 = [6000, 0, -3600]$ kg·m/s. Jaka była pozycja samochodu w czasie $t_2 = 14.5$ s?
4. Stałe siły $\vec{F}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ N i $\vec{F}_2 = 4\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$ N działają równocześnie na cząstkę w czasie przesunięcia z punktu A=(20,15,0) do punktu B=(0,0,7) m.
 - a) Jaka praca została wykonana przy przesunięciu cząstki?
 - b) Zakładamy, że działają te same siły, ale ruch odbywa się od punktu B do A. Jaka praca została wykonana w tym przypadku przy przesunięciu cząstki?
5. Ile wynosiła prędkość średnia człowieka, który biegł 100 m z prędkością 5 m/s, a następnie szedł przez 80 s z prędkością 1 m/s?
6. Położenie punktu materialnego w czasie opisane jest równaniami: $x(t) = R \cos \omega t$, $y(t) = R \sin \omega t$ (R, ω - stałe).
 - a) Określ rodzaj ruchu.
 - b) Po jakim torze porusza się ten punkt?
 - c) Wyznacz prędkość i przyspieszenie tego punktu.
 - d) Oblicz prędkość średnią tego punktu w czasie 3-8 sekund.
7. Ruch pewnego ciała można w kartezjańskim układzie współrzędnych opisać równaniami:

$$v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t$$

$$y(t) = v_{0y} \cdot t - g \cdot t^2 / 2,$$
 gdzie: v_y i g to współrzędne prędkości i przyspieszenia, a t oznacza czas, a $v_{0y} = 10$ m/s.
 - a) Wyznacz kształt toru, po którym porusza się to ciało.
 - b) Oblicz czas wznoszenia t_w i maksymalną wysokość h_{max} na jaką wzniesie się to ciało.
 - c) Udowodnij, że czas wznoszenia jest równy czasowi spadania oraz, że szybkość początkowa i końcowa są równe.
 - d) Narysuj wykresy $y(t)$, $v_y(t)$ i $a(t)$ w przedziale czasu $[0, 2t_w]$.
 - e) Oblicz, na jakiej wysokości znajdzie się ciało po połowie czasu wznoszenia i jaka będzie wówczas wartość jego prędkości.
 - f) Oblicz, po jakim czasie (t_1 i t_2) ciało znajdzie się na połowie maksymalnej wysokości i jaka będzie wówczas jego szybkość.
8. Piłka została rzucona w kierunku poziomym ze stałą prędkością v . Wyznacz: położenie, prędkość oraz przyspieszenie w tym przypadku.
9. W rzucie ukośnym prędkość początkowa ciała może być wyrażona wzorem: $\vec{v}_0 = [v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha]$, a przyspieszenie $\vec{a} = [0, -g]$, gdzie $g = \text{const}$ oraz położenie początkowe $\vec{r}_0 = [0, 0]$. Wyrazić wektor położenia ciała $\vec{r}(t)$ w zależności od czasu.
10. Ciało spadające swobodnie przebywa ostatnie $h_1 = 20$ m swej drogi w ciągu $t_1 = 0.5$ s. Znaleźć wysokość h , z jakiej spada to ciało.

11. Samolot bojowy leci równolegle do ziemi na wysokości H z prędkością v . Gdy samolot przelatuje nad działem przeciwlotniczym, z działa oddano strzał. Jaki powinien być kąt nachylenia działa, aby kula trafiła w samolot, jeżeli prędkość kuli wynosi v_0 ?
12. Z brzegu szczeliny o gładkich ścianach odległych od siebie o x_0 wystrzelono małą kulkę stalową z prędkością v_{0x} w kierunku poziomym. Kulka odbija się od ścian szczeliny opadając w dół. W jakich odległościach znajdują się punkty kolejnych odbić kulki od ścian szczeliny?
13. Na wzgórzu znajduje się cel widoczny pod kątem $\alpha=10^\circ$ względem poziomu z miejsca stacjonowania baterii artylerii. Odległość w kierunku poziomym od baterii wynosi $d=2$ km. Do celu żołnierze strzelają przy kącie podniesienia lufy $\beta=30^\circ$. Wyznaczyć prędkość początkową v_0 pocisku trafiającego w cel.
14. Samolot musi wypuścić kapsułę ratowniczą dla rozbitka na morzu. Prędkość samolotu wynosi 200 km/h i leci on na wysokości 500 m. Wyznacz kąt α , pod jakim pilot widzi rozbitka w chwili najlepszej do opuszczenia kapsuły. b) Wyznacz prędkość kapsuły w chwili, gdy wpada ona do wody (wyraż ją poprzez wersory i długość i kierunek wektora).

Agnieszka Obłąkowska-Mucha
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>