

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli X jest zmienną losową przyjmującą wartości nieujemne całkowite, to

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq j).$$

Zadanie 2. Udowodnić, że dla nieujemnej i całkowalnej zmiennej losowej X oraz dla $p > 0$ zachodzi

$$\mathbb{E}X^p = \int_0^{\infty} pt^{p-1} \mathbb{P}(X > t) dt$$

Zadanie 3. Niech X oraz Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami odpowiednio λ oraz μ . Wyznacz rozkład $X|X+Y$.

Zadanie 4. Wektor losowy $(X, Y)^{\top}$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$, gdzie

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz rozkład $X|Y$.

Zadanie 5. Owad składa X jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ , a owad z jajeczka wylęga się z prawdopodobieństwem p , niezależne od innych. Oblicz średnią liczbę potomków.

Zadanie 6. Niech $X_0, X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Wyznacz $\mathbb{E}(\max\{X_0, X_1, \dots, X_n\} | X_0)$.

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $N(\mu, \sigma^2)$ oraz niech τ będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem λ niezależną od $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$. Wyznacz

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\tau} X_i \right).$$

Zadanie 8. Niech X będzie całkowalną zmienną losową z kwadratem. Warunkowa wariancja pod warunkiem σ -ciała $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ zdefiniowana jest wzorem

$$\text{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G}))^2 | \mathcal{G}].$$

Udowodnij następujące własności warunkowej wariancji:

$$\text{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - \mathbb{E}^2[X|\mathcal{G}],$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|\mathcal{G})] + \text{Var}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})],$$