

Zadanie 1. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o skończonych wartościach oczekiwanych. Niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Udowodnij, że

- (a) jeśli $\mathbb{E}X_i = 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to proces $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- (b) jeśli $\mathbb{E}X_i \geq 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to proces $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest submartyngałem (podmartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- (c) jeśli $\mathbb{E}X_i \leq 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to proces $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest supermartyngałem (nadmartyngałem) względem filtracji $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Zadanie 2. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie całkowalnych z kwadratem i o średniej zero. Niech

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n) \quad n \in \mathbb{N}$$

Udowodnij, że $Y_n = S_n^2 - n\text{Var}(X_1)$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces X_n .

Zadanie 3. Przypuśćmy, że cząstka błądzi losowo po prostej $\mathbb{R}$ po wszystkich współrzędnych całkowitych. Załóżmy, że cząstka startuje z punktu zero. Z dowolnego punktu j przechodzi na prawo do punktu $j + 1$ z prawdopodobieństwem p , a lewo do punktu $j - 1$ z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Poprzez X_n oznaczmy pozycję cząstki po n ruchach. Wyznacz $\mathbb{E}(X_n)$ oraz $\text{Cov}(X_n, X_m)$. Czy X_n jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej?

Zadanie 4. Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie symetrycznym błędzeniem losowym z czasem dyskretnym. Znajdź deterministyczny ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że proces $Y_n = X_n^3 + a_n X_n$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces X_n .

Zadanie 5. Niech X będzie całkowalną zmienną losową oraz niech $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie pewną filtracją. Udowodnij, że proces $Y_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Zadanie 6. Niech X_n będzie (sub-, super-) martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n$. Dla ustalonego $k > 1$, zdefiniujmy proces $\tilde{X}_n = X_{k+n} - X_k$, $n = 1, \dots$. Pokaż, że $\tilde{X}_n$ jest (sub-, super-) martyngałem względem $\tilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_{n+k}$.

Zadanie 7. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych oraz $\mathbb{E}X_k = 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez zmienne losowe X_n .

Zadanie 8. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, $n = 1, 2, \dots$. Wyznacz wartość parametru a , aby ciąg $Y_n = a^n \cos(\pi \sum_{k=1}^n X_k)$ był martyngałem względem filtracji generowanej przez X_n .

Zadanie 9. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Niech $Y_n = \exp(h \sum_{k=1}^n X_k)$.

- (a) Wyznacz funkcje wartości oczekiwanej i funkcje autokowariancji procesu Y_n .
- (b) Dla jakiej wartości $h \in \mathbb{R}$ proces Y_n jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej? Dla jakich h proces Y_n jest sub- lub supermartyngałem?

- (c) Wyznacz funkcję średniej i funkcję autokowariancji procesu Y_n , tj. $\mu(n) = \mathbb{E}Y_n$ oraz $R(n, m) = \text{Cov}(Y_n, Y_m)$.

Zadanie 10. Udowodnij, że funkcja wartości oczekiwanej martyngału jest stała w czasie. Co w przypadku sub- lub supermartyngału?

Zadanie 11. Niech proces X_n będzie submartyngałem względem pewnej filtracji o stałej wartości oczekiwanej. Udowodnij, że proces X_n jest martyngałem względem tej samej filtracji.

Zadanie 12. Udowodnij, że suma procesów stochastycznych będących martyngałami względem tej samej filtracji jest martyngałem względem tej filtracji.

Zadanie 13. Udowodnij, że przyrosty martyngału są parami nieskorelowane.

Zadanie 14. Udowodnij, że procesy stochastyczny będący martyngałem względem pewnej filtracji jest też martyngałem względem swojej naturalnej filtracji.