

Definicja 1. Procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ nazywamy proces $\{N(t), t \geq 0\}$ spełniający następujące warunki:

- (i) $N(0) = 0$ p.n.
- (ii) Przyrosty procesu N są niezależne, tj. dla $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ zmienne losowe $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ są niezależne.
- (iii) Dla $0 \leq s < t$ zmienna losowa $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}(\lambda(t-s))$.

Twierdzenie 1. Proces Poissona $N(t)$ o intensywności $\lambda > 0$ możemy przedstawić jako

$$N(t) = \max\{n : T_n \leq t\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gdzie $T_0 = 0$ oraz $T_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$, zaś ciąg $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ .

Uwaga 1. Zmienna X_i oznacza czas pomiędzy $(i-1)$ -szym a i -tym zdarzeniem. Zmienna T_i oznacza czas zajścia i -tego zdarzenia. Zmienna $N(t)$ oznacza liczbę zdarzeń, które wystąpiły do chwili t .

Definicja 2. Niejednorodnym procesem Poissona z funkcją intensywności $\lambda : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ nazywamy proces $\{N(t), t \geq 0\}$ spełniający następujące warunki:

- (i) $N(0) = 0$ p.n.
- (ii) Przyrosty procesu N są niezależne, tj. dla $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ zmienne losowe $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ są niezależne.
- (iii) Dla $0 \leq s < t$ zmienna losowa $N(t) - N(s) \sim \text{Pois}\left(\int_s^t \lambda(u) du\right)$.

Zadanie 1. Czy proces Poissona jest martyngałem względem swojej filtracji naturalnej? Jeśli nie, to jak zmodyfikować proces Poissona, aby był martyngałem?

Zadanie 2. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Wyznacz

- a) $\mathbb{P}(N(2) + N(7) = 4)$;
- b) $\mathbb{P}(N(t) = i | N(s) = j)$ dla $t \geq s > 0$ i dowolnych i, j ;
- c) $\text{Cov}(N(s), N(t))$ dla $t, s \geq 0$;
- d) $\mathbb{P}(N(1) = 1, N(2) \leq 2, N(3) \leq 3)$;

Zadanie 3. W dzień wyborów, wyborcy docierają do miejsca głosowania zgodnie z procesem Poissona. Średnio, 100 osób na godzinę. Jeżeli 150 osób przybyło podczas pierwszej godziny, jakie jest prawdopodobieństwo, że co najwyżej 350 osób przybędzie na wybory przed trzecią godziną?

Zadanie 4. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Udowodnij, że czas zajścia n -tego zdarzenia T_n ma rozkład gamma. Wyznacz parametry tego rozkładu.

Wskazówka: Warto skorzystać z funkcji charakterystycznej.

Zadanie 5. Czasy zdobywania bramek w meczu hokejowym modelujemy za pomocą procesu Poissona. Przyjmijmy, że średni czas między kolejnymi bramkami wynosi 15 minut, czyli intensywność procesu to $\lambda = \frac{1}{15}$.

- a) W meczu trwającym 60 minut oblicz prawdopodobieństwo, że czwarta bramka padnie w ostatnich 5 minutach spotkania.
- b) Zakładając, że w meczu padły co najmniej trzy bramki, oblicz wartość oczekiwaną czasu strzelenia trzeciej bramki.

Zadanie 6. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ i niech X_1 będzie pierwszym czasem przybycia. Udowodnij, że

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x | N(t) = 1) = \frac{x}{t}$$

dla $0 \leq x \leq t$.

Zadanie 7. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Niech T_n oznacza moment zajścia n -tego zdarzenia. Wyznaczyć dystrybuantę i gęstość rozkładu warunkowego T_4 pod warunkiem $N_1 = 2$. Oblicz $\mathbb{E}(T_4 | N_1 = 2)$.

Zadanie 8. Udowodnij, że suma niezależnych procesów Poissona jest procesem Poissona. Wyznacz intensywność otrzymanego procesu Poissona.

Zadanie 9. Niech $\{N(t), t \geq 0\}$ będzie procesem Poissona o intensywności $\lambda > 0$. Każde zdarzenie, niezależnie od innych, klasyfikujemy jako zdarzenie typu 1 z prawdopodobieństwem p , oraz zdarzenie typu 2 z prawdopodobieństwem $1 - p$, gdzie $0 < p < 1$. Niech $N^{(1)}(t)$ oznacza liczbę zdarzeń typu 1 w przedziale $[0, t]$, a $N^{(2)}(t)$ liczbę zdarzeń typu 2 w przedziale $[0, t]$. Udowodnij, że

- a) $\{N^{(1)}(t), t \geq 0\}$ jest procesem Poissona o intensywności λp .
- b) $\{N^{(2)}(t), t \geq 0\}$ jest procesem Poissona o intensywności $\lambda(1 - p)$.
- c) Procesy $N^{(1)}$ i $N^{(2)}$ są niezależne.

Zadanie 10. Rozważmy proces narodzin chłopców i dziewczynek. Załóżmy, że na oddziale położniczym liczba dzieci rodzi się zgodnie z procesem Poissona o intensywności 2.

- a) Podczas 8-godzinnej zmiany oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe liczby narodzin dziewczynek.
- b) Oblicz prawdopodobieństwo, że w godzinach od 14:00 do 17:00 urodziły się wyłącznie dziewczynki.
- c) Wiadomo, że wczoraj na oddziale urodziło się pięcioro dzieci. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwoje z nich to chłopcy.

Zadanie 11. Studenci przychodzą na lunch do stołówki zgodnie z niejednorodnym procesem Poissona. Liczba studentów przybywających na godzinę zwiększa się liniowo z 100 do 200 studentów na godzinę między godziną 11:00 a 12:00. Następnie liczba studentów przybywających pozostaje stała przez kolejne 2 godziny, po czym zmniejsza się liniowo z 200 do 100 między 14:00 a 15:00. Znajdź prawdopodobieństwo, że w stołówce między 11:30 a 13:30 będzie co najmniej 400 osób.

Zadanie 12. Niech $N(t)$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ . Udowodnij, że

$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{p.n.} \lambda$$

przy $t \rightarrow \infty$.