

Zadanie 1. Niech $\Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T\}$, gdzie $t_j^n = \frac{jT}{n}$, będzie podziałem odcinka $[0, T]$. Udowodnij, że

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 = T \text{ w } L^2(\Omega),$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = \frac{1}{2} W(T)^2 - \frac{1}{2} T \text{ w } L^2(\Omega).$$

Wskazówka: $a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$

Zadanie 2. Czy procesy $W(t)$, $W(\lfloor t \rfloor)$, $W(\lceil t \rceil)$ należą do przestrzeni $\mathcal{M}_{[0,T]}^2$?

Zadanie 3. Oblicz wariancję zmiennej losowej

$$X = \int_0^1 (W(s) - s) dW(s).$$

Zadanie 4. Czy proces

$$X(t) = \int_0^t e^{t-s} dW(s)$$

jest martyngałem? Oblicz $\text{Cov}(X(t), X(s))$ dla $t, s \geq 0$.

Zadanie 5. Oblicz

$$\text{Cov} \left(W(t), \int_0^t s^n dW(s) \right).$$

Zadanie 6. Oblicz całkę

$$\int_0^5 \lfloor s \rfloor dW(s).$$

Zadanie 7. Pokaż, że

$$\int_0^t W(s) dW(s) = \frac{1}{2} (W^2(t) - t).$$

Zadanie 8. Wyznacz poniższe całki stochastyczne korzystając z formuły Itô dla podanej funkcji.

$$(a) \int_0^t e^{-s} dW(s), \quad F(t, x) = e^{-t} x;$$

$$(b) \int_0^t e^{-s} W(s) dW(s), \quad F(t, x) = e^{-t} x^2.$$

Rozwiązanie może być podane za pomocą całki Lebesgue'a.

Zadanie 9. Rozwiąż stochastyczne równanie różniczkowe korzystając z formuły Itô dla podanej funkcji.

(a) Model Blacka-Scholesa:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad F(t, x) = \ln x;$$

(b) Proces Ornsteina-Uhlenbecka

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma dW(t), \quad F(t, x) = e^{-\mu t} x;$$

(c) proces Vasiceka

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t)) dt + \sigma dW(t), \quad F(t, x) = e^{\beta t} x.$$

Rozwiązanie może być podane za pomocą całki Itô.