

Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^\top$ będzie wektorem losowym. Mówimy, że $\mathbf{X}$ ma d -wymiarowy rozkład normalny z wektorem wartości oczekiwanych

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])^\top \in \mathbb{R}^d$$

oraz macierzą kowariancji

$$\boldsymbol{\Sigma} = [\text{Cov}(X_i, X_j)]_{i,j=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d},$$

jeśli gęstość $\mathbf{X}$ wyraża się wzorem

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Wtedy zapisujemy

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

Poniżej przedstawiamy kilka podstawowych własności wielowymiarowego rozkładu normalnego:

1. Jeśli zmienne losowe $X_1, \dots, X_d$ są **niezależne** i każda z nich ma rozkład normalny, to wektor $(X_1, \dots, X_d)^\top$ ma d -wymiarowy rozkład normalny.
2. Sama informacja, że $X_1, \dots, X_d$ mają brzegowe rozkłady normalne, **nie implikuje**, że wektor $(X_1, \dots, X_d)^\top$ ma łącznie rozkład normalny. Konieczne jest założenie o niezależności.
3. Każdy podwektor zmiennych losowych z wielowymiarowego rozkładu normalnego ma również rozkład normalny (tj. rozkłady brzegowe są normalne).
4. W rozkładzie normalnym wielowymiarowym zachodzi brak korelacji oznacza niezależność (patrz Zadanie 1).
5. Niech $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Dla dowolnej macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times d}$ oraz wektora $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ zachodzi

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^\top).$$

Zadanie 1. Niech $(X, Y)^\top$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny. Sprawdzić, czy

$$X, Y \text{ są niezależne} \iff X, Y \text{ są nieskorelowane.}$$

Zadanie 2. Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)^\top$ ma rozkład zadany przez gęstością

$$f(x, y) = c \exp\left(-x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy\right).$$

Wyznacz stałą c . Oblicz wariancję zmiennej losowej $Z = 4Y - X$.

Zadanie 3. Wektor losowy $(X_1, X_2)^\top$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Wyznacz rozkład warunkowy $(X_1 - X_2, X_1 + X_2)$, gdy

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. Wektor losowy $(X, Y, Z)^\top$ ma gęstość postaci

$$f(x, y, z) = C \exp\left(-\frac{1}{120} (16(x-2)^2 + 15y^2 + 16(z+2)^2 + 8(x-2)(z+2))\right).$$

Wyznaczyć C . Pokazać, że zmienne losowe $U = Y + Z$ oraz $V = 4X + Z$ są niezależne. Obliczyć $P(U > -2 - \sqrt{8})$.