

Zadanie 1. Pokaż, że zbiór A jest niezależny od σ -ciała $\mathcal{G}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) = \mathbb{P}(A)$ prawie na pewno.

Zadanie 2. Rozważamy zmienną losową X o rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$ oraz zmienną losową N o dwumianowym rozkładzie warunkowym $N|X \sim B(n, X)$, gdzie n jest ustaloną, dodatnią liczbą całkowitą. Sprawdzić, czy zmienna losowa N ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Zadanie 3. Na kołowrocie jest nawiniętych 10 metrów liny. Na skutek zużycia lina zrywa się w punkcie, którego gęstość rozkładu maleje w miarę oddalania się od zwisającego końca liny, osiąga 0 w odległości 5 metrów, i jest postaci $ax^2 + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Pozostała część liny jest nadal używana do moment drugiego zerwania. Tym razem każde położenie punktu zerwania jest jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo, że po drugim zerwaniu a kołowrocie zostanie przynajmniej 5 metrów liny.

Zadanie 4. W znanej rymowance „bociana dziobał szpak”. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że bocian był dziobany w czasie swojego życia więcej niż 16 razy, jeżeli czas życia bociana ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną 3, 5 roku, a ilość dziobań bociana żyjącego t lat ma rozkład Poissona z parametrem $5t$.

Funkcja gamma:

- $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0,$
- $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$

Funkcja beta:

- $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0,$
- $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$