

Zadanie 1. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym $Exp(1)$. Znaleźć rozkład warunkowy $X|[X]$, gdzie $[x]$ oznacza cechę z x .

Zadanie 2. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z parametrami λ i μ odpowiednio. Wykazać że rozkład warunkowy $X|X+Y$ jest rozkładem dwumianowym. Znaleźć parametry tego rozkładu.

Zadanie 3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma jednostajny rozkład na trójkącie $\Delta = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Oblicz $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{4} | Y = \frac{1}{2})$.

Zadanie 4. Wektor losowy $(X_1, X_2)^\top$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny $\mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Wyznacz rozkład warunkowy $X_1|X_1 + X_2$, gdy

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Rozważmy dwie zmienne losowe X oraz Y . Pierwsza ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $1/\lambda$. Natomiast rozkład warunkowy Y , gdy znany jest X , jest rozkładem wykładniczym z losowym parametrem $2X$. Wyznacz rozkład warunkowy $X|Y$.

Zadanie 6. Położenie losowego punktu $P(x, y)$ jest jednakowo prawdopodobne w dowolnym punkcie koła o promieniu $R > 0$. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa każdej ze współrzędnych tego punktu i ich wzajemne gęstości warunkowe