

Zadanie 1. Niech X ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości $f(x) = c(x+2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Wyznacz stałą c oraz $\mathbb{E}(X|X^2)$

Zadanie 2. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}((X+Y)^2|X^2+Y^2) = X^2+Y^2.$$

Zadanie 3. Niech $X_0, X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Wyznacz $\mathbb{E}(\max\{X_0, X_1, \dots, X_n\}|X_0)$.

Zadanie 4. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x, y) = e^{-x}\mathbb{1}_{\{(x,y): 0 < y < x < \infty\}}(x, y).$$

Oblicz $\mathbb{E}(2Y + X|Y - X = -2)$.

Zadanie 5. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_{25}$ są niezależne o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Wyznacz funkcje regresji zmiennej S_{10}^2 względem S_{25} i ją narysuj.

Zadanie 6. Wektor losowy $(X, Y)^\top$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$, gdzie

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 7. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany funkcją gęstości

$$f(x, y) = \frac{c}{y}\mathbb{1}_{\{0 < x < y < 1\}}(x, y).$$

Wyznacz stałą c . Wyznacz funkcje regresji Y względem X .