

Zadanie 1. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie dwupunktowym

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0).$$

Niech $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Udowodnij, że $\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)$ ma asymptotyczny rozkład normalny $AN(\mu_n, \sigma_n^2)$ oraz podaj postać ciągów μ_n oraz σ_n^2 .

Zadanie 2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Sprawdź ciąg zmiennych losowych

$$Z_n = \sqrt[n]{X_1 X_2 \dots X_n}$$

ma asymptotyczny rozkład normalny.

Zadanie 3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają ten sam rozkład oraz $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\text{Var}X_1 = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{\sqrt{n}(X_1 + \dots + X_n)}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Zadanie 4. Załóżmy, że $X_n \sim AN(n, 2n)$. Pokaż, że

$$\frac{n-1}{n} X_n \sim AN(n, 2n) \quad \text{oraz} \quad \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} X_n \not\sim AN(n, 2n).$$

Zadanie 5. Zmienna losowa X_n ma rozkład $\chi^2(n)$. Udowodnij, że

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \rightarrow N(0, 1)$$

według rozkładu.