

Zadanie 1. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^n X_i^2$ ma rozkład $\chi^2(n)$.

Zadanie 2 (*). Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

ma rozkład $\chi^2(n-1)$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Zadanie 3. Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową. Udowodnij, że

$$\varphi(c) = \mathbb{E}(X - c)^2$$

osiąga najmniejszą wartość, gdy c jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej X .

Zadanie 4. Niech X będzie całkowalną zmienną losową o wartościach rzeczywistych. Medianą zmiennej losowej X nazywamy liczbę $\text{med}(X)$ taką, że $\mathbb{P}(X \geq \text{med}(X)) \geq \frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{P}(X \leq \text{med}(X)) \geq \frac{1}{2}$. Udowodnij, że

$$\varphi(c) = \mathbb{E}|X - c|$$

osiąga najmniejszą wartość, gdy c jest medianą zmiennej losowej X .

Wskazówka: Udowodnij i skorzystaj z tego, że jeśli $X \geq 0$, to $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt$.

Zadanie 5. Wektorem statystyk pozycyjnych dla wektora losowego $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ nazywamy wektor $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = (X_{k_1}, \dots, X_{k_n})$ taki, że $X_{k_1} \leq \dots \leq X_{k_n}$ i $(k_1, \dots, k_n)$ jest permutacją $(1, \dots, n)$. Załóżmy, że $X_1, \dots, X_n$ są i.i.d z rozkładu o dystrybucie F i gęstości f .

- Wyznacz wzór na dystrybuantę i gęstość k -tej statystyki pozycyjnej wektora $\mathbf{X}$.
- W przypadku gdy f jest gęstością rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$ oblicz $\mathbb{E}(X_{(k)})$ korzystając z odpowiedniego rozkładu Beta.

Zadanie 6. Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu o ciągłej dystrybucie F . Statystykę $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ nazywamy rozstępem z próby. Wykazać, że

$$\mathbb{E}R = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - (F(x))^n - (1 - F(x))^n] dx.$$

Oblicz $\mathbb{E}R$ w przypadku gdy F jest dystrybuantą rozkładu jednostajnego.

Wskazówka: Skorzystaj ze wskazówki z zadania 4.

Zadanie 7. Niech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego $\text{Exp}(\lambda)$.

- Znaleźć rozkład statystyki porządkowej $X_{(k)}$.
- Wykazać, że $X_{(k)}$ oraz $X_{(m)} - X_{(k)}$ dla $1 \leq k < m \leq n$ są niezależne.
- Znaleźć rozkład zmiennej $X_{(k+1)} - X_{(k)}$, $1 \leq k \leq n-1$.