

Zadanie 1. Skonstruować estymator największej wiarygodności parametru θ i asymptotyczny przedział ufności na poziomie ufności 0,95 oparte na n -elementowej próbie prostej z rozkładu o gęstości $p(x|\theta) = \theta^{-1}x^{-1+1/\theta}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$.

Zadanie 2. Wektor losowy (X, Y) ma następujący rozkład łączny

$$P((X, Y) = (1, 1)) = (1 - \theta)/4, \quad P((X, Y) = (1, 2)) = \theta/4,$$

$$P((X, Y) = (2, 1)) = 3\theta/4, \quad P((X, Y) = (2, 2)) = 3(1 - \theta)/4,$$

gdzie $\theta \in (0, 1)$ jest nieznanym parametrem. Na podstawie małej n -elementowej próby prostej wyznaczono estymator największej wiarygodności parametru θ . Obliczyć jego wariancję.

Zadanie 3. Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda > 0$. Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych X_i , tylko wartości zaokrąglone w górę do najbliższej liczby całkowitej. Wyznaczyć estymator największej wiarygodności dla parametru λ oraz asymptotyczny przedział ufności na poziomie 90% oparte na danych obserwacjach.

Zadanie 4. Niech dana będzie próbą prostą $X_1, \dots, X_n$ z rozkładu jednostajnego na odcinku $(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$, $\theta > 0$. Znaleźć estymator największej wiarygodności parametru θ w tym eksperymencie.

Zadanie 5. Niech dana będzie próbą prostą $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ z rozkładu jednostajnego na odcinku $(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$, gdzie $\theta \in \mathbb{R}$ jest nieznanym parametrem. Niech ponadto $X_{(j)}$ oznacza j -tą statystykę pozycyjną. Pokazać, że $T(\mathbf{X}) = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$ jest mocno zgodnym estymatorem parametru θ .