

Zadanie 1. Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$. Korzystając z definicji pokazać, że $T(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n X_k$ jest statystyką dostateczną dla λ .

Zadanie 2. Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$. Korzystając z definicji pokazać, że $T(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n X_k$ jest statystyką dostateczną dla λ .

Zadanie 3. Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą. Korzystając z kryterium faktoryzacji, wyznaczyć statystyki dostateczne $T(X_1, \dots, X_n)$ dla nieznanymi parametrów, gdy X_i , $i = 1, \dots, n$ mają rozkład

- (a) gamma z parametrami α oraz λ ,
- (b) jednostajny na odcinku (a, b) ,
- (c) Bernuliego $B(1, p)$ z parametrem p .

Zadanie 4. Losujemy bez zwracania n jednostek z partii N wyrobów, spośród których $N\theta$ jest wadliwych. Niech X_i , $i = 1, \dots, n$, będzie zmienną losową, która przyjmuje wartość 1, gdy i -ta jednostka jest wadliwa i wartość 0, gdy i -ta jednostka jest dobra. Pokazać, że statystyka $T = \sum_{i=1}^n X_i$ jest dostateczna dla parametru θ .

Zadanie 5. Niech $\mathbf{Z} = ((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ będzie próbą prostą z dwuwymiarowego rozkładu normalnego $N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$, gdzie $\mathbf{0}$ jest wektorem zerowym, a macierz

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ \theta & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć statystykę dostateczną dla parametru θ . Udowodnij, że $T_1(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ oraz $T_2(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ są swobodne, ale statystyka $T_1(\mathbf{Z}) + T_2(\mathbf{Z})$ nie jest swobodna.

Zadanie 6. Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $N(\theta, 1)$. Rozpatrzmy problem estymacji prawdopodobieństwa $P(X_i \leq c)$, $i = 1, \dots, n$ dla pewnego ustalonego $c \in \mathbb{R}$ z następującą funkcją straty: $L(\theta, d) = [d - \Phi(c - \theta)]^2$, gdzie Φ jest dystrybucją rozkładu normalnego $N(0, 1)$. Niech

$$d_0(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(-\infty, c]}(X_i).$$

Korzystając z twierdzenia Rao-Blackwella, wyprowadzić funkcję decyzyjną opartą na statystyce dostatecznej dla parametru θ , która jest nie gorsza niż funkcja decyzyjna d_0 .