

Zadanie 1. Niech $X_1, \dots, X_m$ i $Y_1, \dots, Y_n$ będą dwoma niezależnymi próbkami prostymi z rozkładów $N(\mu_1, 1)$ i $N(\mu_2, 1)$. Znaleźć 95% przedział ufności dla $\mu_1 - \mu_2$ oparty na odpowiedniej statystyce dostatecznej.

Wskazówka: Wyznacz rozkład $\mu_1 - \mu_2 - (\bar{X}_m - \bar{X}_n)$.

Zadanie 2. Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $U(0, \theta)$. Wyznacz 90% przedział ufności dla θ oparty na odpowiedniej statystyce dostatecznej.

Wskazówka: Wyznacz rozkład $\frac{X_{(n)}}{\theta}$.

Zadanie 3. Próba prosta $X_1, \dots, X_{14}$ pochodzi z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$ z nieznaną wartością oczekiwaną μ i nieznaną wariancją σ^2 . Na podstawie tej próbki zbudowano w standardowy sposób przedział ufności na poziomie $1 - \alpha = 0.995$ dla μ :

$$\left[\bar{X}_{14} - S \cdot r / \sqrt{14}, \bar{X}_{14} + S \cdot r / \sqrt{14} \right], \quad (r = 3, 369).$$

Niech X_{15} będzie zmienną losową pochodzącą z tego samego rozkładu, niezależna od $X_1, \dots, X_{14}$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że X_{15} należy do uprzednio skonstruowanego przedziału ufności.

Zadanie 4. $X_1, \dots, X_{100}$ jest próbą prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, gdzie μ jest nieznanym parametrem, natomiast σ^2 - znanym. Założono, że zmienne te są niezależne i skonstruowano w standardowy sposób przedział ufności na poziomie 0,95 dla μ :

$$\left[\bar{X} - \frac{1,96\sigma}{10}, \bar{X} + \frac{1,96\sigma}{10} \right].$$

W rzeczywistości zmienne $X_1, \dots, X_{100}$ mają łączny rozkład normalny, ale są skorelowane, przy czym współczynnik korelacji wynosi $\rho(X_i, X_j) = 0,1$ dla $i \neq j$. Obliczyć rzeczywisty poziom ufności skonstruowanego przedziału ufności.