Zadanie 1. Skonstruować estymator największej wiarogodności parametru θ i asymptotyczny przedział ufności na poziomie ufności $0,95$ oparte na n-elementowej próbie prostej z rozkładu o gęstości $p(x|\theta) = \theta^{-1}x^{-1+1/\theta}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$.

Zadanie 2. Wektor losowy (X, Y) ma następujacy rozłkad łączny

$$\mathrm{P}((X,Y) = (1,1)) = (1-\theta)/4, \quad \mathrm{P}((X,Y) = (1,2)) = \theta/4,$$

$$\mathrm{P}((X,Y) = (2,1)) = 3\theta/4, \quad \mathrm{P}((X,Y) = (2,2)) = 3(1-\theta)/4,$$

gdzie $\theta \in (0,1)$ jest nieznanym parametrem. Na podstawie małej n-elementowej próby prostej wyznaczono estymator największej wiarogodnoúci parametru θ. Obliczyć jego wariancję.

Zadanie 3. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda > 0$. Nie obserwujemy dokładnych wartości zmiennych X_i, tylko wartości zaokrąglone w górę do najbliższej liczby całkowitej. Wyznaczyć estymator największej wiarogodności dla parametru λ oraz asymptotyczny przedziła ufości na poziomie 90% oparte na danych obserwacjach.

Zadanie 4. Niech dana będzie próbą prostą $X_1, ..., X_n$ z rozkładu jednostajnego na odcinku $(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$, $\theta > 0$. Znaleźć estymator najwiekszej wiarogodnosci parametru θ w tym eksperymencie.

Zadanie 5. Niech dana będzie próbą prostą $\boldsymbol{X} = (X_1, ..., X_n)$ z rozkładu jednostajnego na odcinku $(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$, gdzie $\theta \in \mathbb{R}$ jest nieznanym paramterem. Niech ponadto $X_{(j)}$ oznacza j-ta statystykę pozycyjną. Pokazać, że $T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)} + X_{(n)})/2$ jest mocno zgodnym estymatorem parametru θ.