

Zadanie 1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez gęstość

$$f(x, y) = \frac{y-x}{4} e^{-y} \mathbb{1}_{\{(x,y): x>0, |x|<y\}}(x, y).$$

Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych X i Y .

Zadanie 2. Pokazać, że współczynnik korelacji nie zależy od wyboru jednostek, tzn. dla dowolnych stałych $a, c > 0$, $b, d \in \mathbb{R}$ oraz zmiennych losowych X, Y mamy

$$\rho(X, Y) = \rho(aX + b, cY + d).$$

Zadanie 3. Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym $N(0, \frac{1}{2})$. Niech R oznacza odległość punktu (X, Y) od początku układu współrzędnych. Wyznaczyć wartość oczekiwaną $\mathbb{E}R$ oraz współczynnik korelacji $\rho(R^2, X)$.

Zadanie 4. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienna losowa X ma rozkład $N(1, 2)$, zmienna Y ma rozkład $N(-1, 3)$.

- (a) Podać funkcję gęstości dwuwymiarowej zmiennej (X, Y) ;
- (b) Znaleźć współczynnik korelacji zmiennych losowych $U = X + Y$ oraz $V = X - Y$;
- (c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że $Z = X - Y$ przyjmuje wartości ujemne?

Zadanie 5. Rozważamy zmienną losową (X, Y, Z) o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną $(0, 0, 2024)$ oraz macierzą kowariancji

$$\begin{bmatrix} 4 & 1,5 & 1 \\ 1,5 & 2 & 0,5 \\ 2 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponadto rozważmy zmienną losową $V = X + bY + cZ$, która jest niezależna z (Y, Z) . Wyznaczyć parametry a, b, c . Ponadto policzyć $\mathbb{E}V$ oraz $\text{Var}(V)$.

Zadanie 6. Wektor losowy (X, Y) ma gęstość $f(x, y) = c \exp(-2x^2 - y^2 + 2xy)$. Wyznaczyć stałą c . Obliczyć wariancję zmiennej losowej $Z = 4Y - X$.

Zadanie 7. Wektor losowy (X, Y, Z) ma gęstość postaci

$$f(x, y, z) = C \exp\left(-\frac{1}{120} (16(x-2)^2 + 15y^2 + 16(z+2)^2 + 8(x-2)(z+2))\right).$$

Wyznaczyć C . Pokazać, że zmienne losowe $U = Y + Z$ oraz $V = 4X + Z$ są niezależne. Obliczyć $P(U > -2 - \sqrt{8})$.

Zadanie 8. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład o gęstości proporcjonalnej do

$$\exp\left(-\frac{x^2 - xy + 2y^2}{7}\right).$$

Dla zmiennej losowej $Z = X + Y - 1$ wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że $Z^2 < 25$.